2- $x=0 \quad y=\frac{t^2}{4} \quad z=t$ $\qquad x^2+z^2=m \Rightarrow 0+z^2=m$

$y=n \quad x^2+z^2=m$ $\qquad \Rightarrow t^2=m=4n$

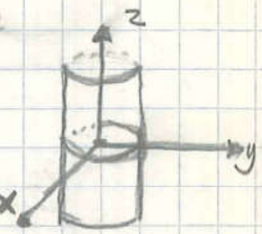
$y=\frac{t^2}{4} \Rightarrow n=\frac{t^2}{4} \Rightarrow t^2=4n \qquad m=4n$

$z^2+x^2=4y \Rightarrow x^2+z^2-4y=0$ //

3- $x=0 \quad y=a$

$x^2+y^2=a^2 \quad \Delta(0,0,1)$

Dönel yüzeyin paralelinden bulursak



$x=x_0+0.t$
$y=y_0+0.t$
$z=z_0+1.t$

$x^2+y^2=m$
$z=n \qquad 0+y^2=m$

$(x+0)^2+(y+0)^2=a^2$ // $\qquad x=0 \quad y=a \qquad a=x^2+y^2$ //

4- $(x-a)^2+z^2-r^2=0, \ y=0 \quad$ ox ekseni

$\left.\begin{array}{l} x=n \\ z^2+y^2=m \end{array}\right\} (n-a)^2+m-r^2=0 \Rightarrow (x-a)^2+y^2+z^2-r^2=0$

oz ekseni, $\left.\begin{array}{l} z=n \\ x^2+y^2=m \end{array}\right\} \Rightarrow (\mp\sqrt{m}-a)^2+n^2-r^2=0$

$x^2=m \qquad \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2-r^2=0$

$x=\mp\sqrt{m}$

2. BÖLÜM

2.1. İkinci Dereceden Yüzeyler (Kuadrikler):

İkinci dereceden yüzey diye x,y,z ye göre ikinci dereceden olan,

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2b_1xy+2b_2xz+2b_3yz+2c_1x+2c_2y+2c_3z+d=0 \quad \text{---} (2,1,1)$$

biçimindeki denklemlerle gösterilen yüzeylere denir. Ve bu yüzeylere kısaca kuadrik denir. a_1,a_2,a_3 ve b_1,b_2,b_3 katsayılarından en az birinin sıfır olması gerekir. Kabul edelim ki $a_1 \neq 0$ olsun. O zaman bu denklem;

$$x^2+\frac{a_2}{a_1}y^2+\frac{a_3}{a_1}z^2+2\frac{b_1}{a_1}xy+2\frac{b_2}{a_1}xz+2\frac{b_3}{a_1}yz+\frac{2c_1}{a_1}x+\frac{2c_2}{a_1}y+\frac{2c_3}{a_1}z+\frac{d}{a_1}=0 \quad \text{...} (2,1,2)$$

şeklinde olur.

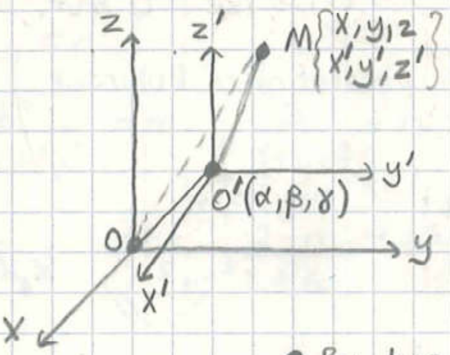
(2.1.1) denkleminin sadeleştirilmesi =

(2,1,1) denkleminin sadeleştirilmesi, iki ayrı işlemle yapılır.

1— Denklemde I. dereceden olan terimlerin kaldırılması işlemi. Eksenler paralel ötelenir.

Yani denklemde x,y ve z nin, c_1, c_2, c_3 katsayılarının sıfıra eşlenmesi ile. Bu koordinat eksenlerinin paralel ötelenmesi ile yapılır.

2- Denklemde 2. dereceden olan xy, xz ve yz çarpımlarının ortadan kaldırılması. Yani bu terimlerin b_1, b_2, b_3 çarpımlarının sıfıra eşit kılınması. Bu işlem, eksenlerin koordinat başlangıcı etrafında döndürülmesi ile olur.



$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ vektör eşitliğini önce

• OX eksenine izdüşürelim.

iz $\vec{OM}$ = iz $\vec{OO'}$ + iz $\vec{O'M}$

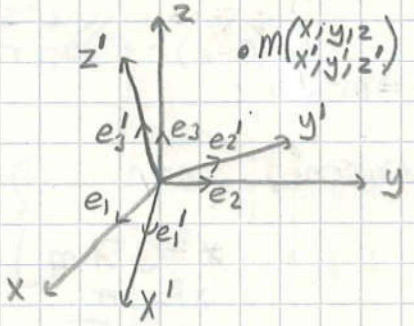
$$x = \alpha + x_1$$

• Bu kez oy eksenine izdüşürelim.

iz $\vec{OM}$ = iz $\vec{OO'}$ + iz $\vec{O'M}$ $\quad y = \beta + y_1$

• Bu kez de oz eksenine izdüşürelim.

iz $\vec{OM}$ = iz $\vec{OO'}$ + iz $\vec{O'M}$ $\quad z = \gamma + z_1$



$$x' = x - \alpha$$
$$y' = y - \beta$$
$$z' = z - \gamma$$

ox' ekseninin ox, oy ve oz ile yapmış olduğu açılar sırayla, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

oy' " " " " , $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$

oz' " " " " , $\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3''$

olsunlar. $\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}' + z'\vec{e_3}'$

x'i çekelim, $x = x'e_1'e_1 + y'e_2'e_1 + z'e_3'e_1$

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_1' + z'\cos\alpha_1''$$

y'yi çekelim, $y = x'e_1'e_2 + y'e_2'e_2 + z'e_3'e_2$

$$y = x'\cos\alpha_2 + y'\cos\alpha_2' + z'\cos\alpha_2''$$

z'yi çekelim, $z = x'e_1'e_3 + y'e_2'e_3 + z'e_3'e_3$

$$z = x'\cos\alpha_3 + y'\cos\alpha_3' + z'\cos\alpha_3''$$

2.2. İkinci Dereceden Yüzeylerin Sınıflandırılması :

İkinci dereceden yüzeylerin sınıflandırılması yapılırken, çarpımların ortadan kaldırıldığı varsayılarak işlem yapılır.

(2,1,1) xy, xz ve yz çarpımlarının ortadan kaldırıldığı varsayılarak işlem yapılır. $ax^2+by^2+cz^2+2a'x+2b'y+2c'z+d=0$ ---- (2,2,1)

(0 ise, hepsi 0 olur.)

$$\mp\frac{x^2}{\lambda^2} \pm \frac{y^2}{\mu^2} \mp \frac{z^2}{\nu^2} - 1 = 0 \quad \text{---- } (2,2,2)$$

$$\pm\frac{x^2}{\lambda^2} \pm \frac{y^2}{\mu^2} \mp \frac{z^2}{\nu^2} = 0 \quad \text{---- } (2,2,3)$$

$$\mp\frac{x^2}{\lambda^2} \mp \frac{y^2}{\mu^2} \mp 2z = 0 \quad \text{---- } (2,2,4)$$

$$\mp\frac{x^2}{\lambda^2} \mp \frac{y^2}{\mu^2} - 1 = 0 \quad \text{---- } (2,2,5)$$

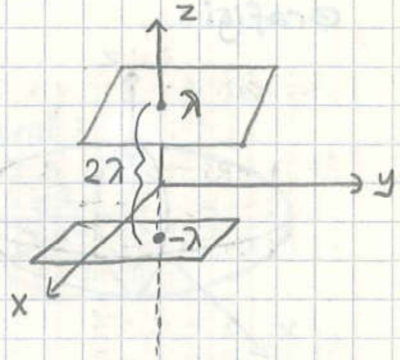
$$\frac{x^2}{\lambda^2} \mp \frac{y^2}{\mu^2} = 0 \quad \text{---- } (2,2,6)$$

$$x^2 - 4cy = 0 \quad \text{---- } (2,2,7)$$

$$x^2 \mp \lambda^2 = 0 \quad \text{---- } (2,2,8)$$

$$x^2 = 0 \quad \text{---- } (2,2,9)$$

$z^2=\lambda^2 \quad z=\mp\lambda$



2.3. ELİPSOİT

(2,2,2) denkleminin birinci yarının ilk üç teriminin işaretleri aynı ise,

$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ biçiminde yazılabilir. ---- (2,3,1)

(2,3,1) denkleminin gösterdiği yüzeye elipsoit denir.

Özellikleri :

1- x, y, ve z = (−) konulduğunda işaret değiştirmez. Çünkü kareleri vardır. Elipsoit, koordinat düzlemlerine, koordinat eksenlerine göre simetriktir.

2- ox eksenini, $\mp\lambda$; oy eksenini, $\mp\mu$; oz eksenini $\mp\nu$ de keser.

3- Bu yüzeyin koordinat arakesitleri,

xoy düzlemiyle arakesiti, $\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ elipsidir.

xoz düzlemiyle arakesiti, $\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ elipsidir.

yoz düzlemiyle arakesiti, $\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ elipsidir.

4- Elipsoidin $z=z_0$ düzlemiyle arakesiti,

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\nu^2}(\nu^2-z_0^2)}+\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\nu^2}(\nu^2-z_0^2)}=1 \text{ elipsidir.} \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=\frac{\nu^2-z_0^2}{\nu^2}$$

$\nu^2-z_0^2 \geqslant 0$ olmalı $\qquad -\nu \leqslant z_0 \leqslant \nu$

Elipsoidin $x=x_0$ düzlemiyle arakesiti,

$$\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\lambda^2}(\lambda^2-x_0^2)}+\frac{z^2}{\frac{\nu^2}{\lambda^2}(\lambda^2-x_0^2)}=1 \text{ elipsidir.}$$

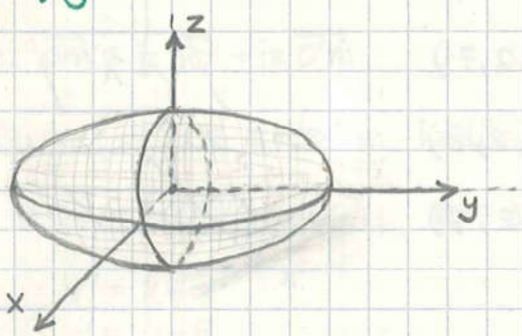
$\lambda^2-x_0^2 \geqslant 0$ ise gerçel elipstir.

Elipsoidin $y=y_0$ düzlemiyle arakesiti,

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\mu^2}(\mu^2-y_0^2)}+\frac{z^2}{\frac{\nu^2}{\mu^2}(\mu^2-y_0^2)}=1 \text{ elipsidir.}$$

$\mu^2-y_0^2 \geqslant 0$ olmalı.

Grafiği :



Denklemi :

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$$

İşaretleri (–) ise

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=-1 \quad \text{sanal elipstir.}$$

2.4. HİPERBOLOİTLER

A - Bir Kanatlı Hiperboloitler :

(2,2,2) denkleminin üç teriminin ikisinin işareti (+), diğerinin işareti (–) ise bu denklem bir kanatlı hiperboloit gösterir.

$$+\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2}-1=0\,,\ \frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}-1=0\,,\ -\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}-1=0 \quad \text{---} (2,4,1)$$

Özellikleri :

1- Koordinat düzlemlerine, koordinat eksenlerine ve başlangıcına göre simetriktirler.

2- Ox eksenini $\mp\lambda$, Oy eksenini $\mp\mu$ de keser. Oz eksenini kesmez.

3- Bu yüzeyin koordinat eksenleri ile arakesiti;

xoy düzlemini, $\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ elipsi boyunca keser. $(z=0)$

xoz düzlemini, $\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ hiperbolü boyunca keser. $(y=0)$

yoz düzlemini $\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ hiperbolü boyunca keser $(x=0)$

4- Bu yüzeyin $z=z_0$ düzlemi ile arakesiti,

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z_0^2}{\nu^2}-1=0 \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=\frac{z_0^2}{\nu^2}+1$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=\frac{\nu^2+z_0^2}{\nu^2} \qquad \frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\nu^2}(\nu^2+z_0^2)}+\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\nu^2}(\nu^2+z_0^2)}=1 \quad \text{elipsidir.}$$

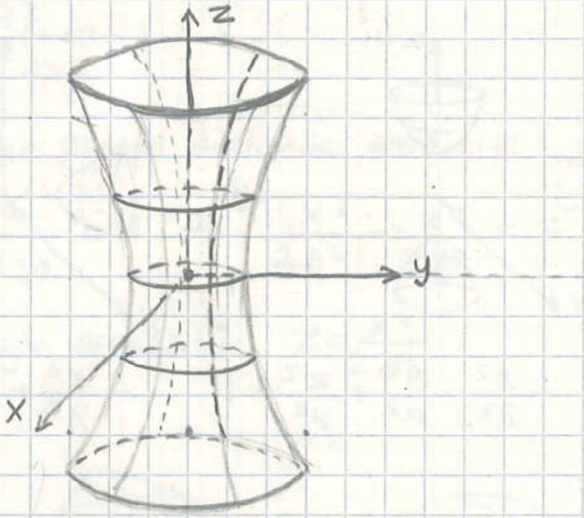
Bu yüzeyin $x=x_0$ düzlemi ile arakesiti,

$$\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\lambda^2}(\lambda^2-x_0^2)}-\frac{z^2}{\frac{\nu^2}{\lambda^2}(\lambda^2-x_0^2)}=1 \quad \text{hiperbolüdür.}$$

Bu yüzeyin $y=y_0$ düzlemi ile arakesiti,

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\mu^2}(\mu^2-y_0^2)}-\frac{z^2}{\frac{\nu^2}{\mu^2}(\mu^2-y_0^2)}=1 \quad \text{hiperbolüdür.}$$

Grafiği :



Denklemi :

$$\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$$

8 - İki Kanatlı Hiperboloitler :

(2,2,2) denkleminde ilk üç terimin herhangi ikisi (-), birisi (+) ise bu denklem iki kanatlı hiperboloit gösterir.

$$+\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2}-1=0 \; ----- \; (2,4,2)$$

Özellikleri :

1- Bu yüzey, koordinat düzlemlerine, koordinat eksenlerine ve başlangıç noktasına göre simetriktir.

2- OX eksenini $\mp\lambda$, oy 'yi $\mp\mu$ de ~~oz 'yi $\mp\nu$ de~~ keser.

3- Koordinat düzlemlerini,

Xoy düzlemini, $\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ hiperbolü boyunca keser.

xoz düzlemini, $\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ hiperbolü boyunca keser.

yoz düzlemini $-\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2}-1=0$ hiperbolü boyunca keser. Sanaldır.

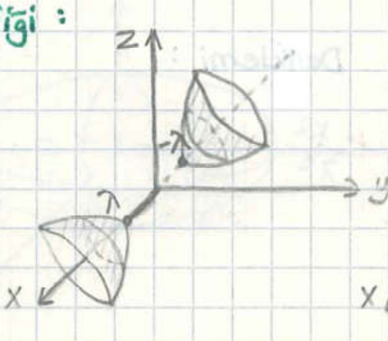
4- Bu yüzeyin $z=z_0$ ile arakesiti,

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\nu^2}(\nu^2+z_0^2)}+\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\nu^2}(\nu^2+z_0^2)}=1$$

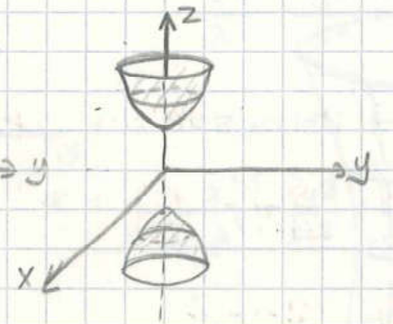
$y=y_0$ ile arakesiti, $$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\mu^2}(\mu^2+y_0^2)}-\frac{z^2}{\frac{\nu^2}{\mu^2}(\mu^2+y_0^2)}=1$$

$x=x_0$ ile arakesiti, $$\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\lambda^2}(x_0^2-\lambda^2)}+\frac{z^2}{\frac{\nu^2}{\lambda^2}(x_0^2-\lambda^2)}=1$$ her zaman yoktur. Sanaldır. $-\lambda < x_0 < \lambda$

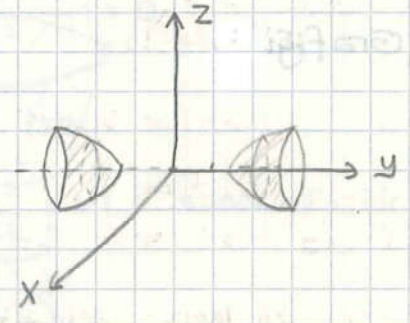
Grafiği :



$$\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2}=1$$



$$-\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=1$$



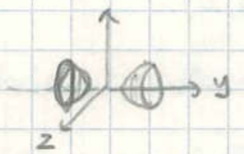
$$-\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2}=1$$

Soru// $2x^2-3y^2+5z^2-4=0$?

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{\frac{4}{3}}+\frac{z^2}{\frac{4}{5}}=1$ tek kanatlı hiperboloit.

Soru// $2x^2-3y^2+5z^2+7=0$ ismini yazıp, grafiğini çiziniz.

$-\frac{x^2}{\frac{7}{2}}+\frac{y^2}{\frac{7}{3}}-\frac{z^2}{\frac{7}{5}}=1$ iki kanatlı hiperboloit.



2.5. PARABOLOİTLER :

A- Hiperbolik Paraboloit

(2,2,4) denkleminde birinci yandaki ilk iki terim zıt işaretli ise bu denklem, hiperbolik paraboloit gösterir.

$$\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}=2z \quad ------ \quad (2,5,1)$$

Özellikleri :

1- Bu yüzey xoz ve yoz düzlemlerine göre simetriktir. Çünkü xoz ve yoz eksenine göre simetriktir.

$$\frac{x^2}{\lambda^2} \mp \frac{y^2}{\mu^2} \pm \frac{z^2}{\nu^2} = 0 \quad ---- \quad (2,2,3)$$

2- Koordinat başlangıcından geçerler. Onun dışında eksenleri kesmezler.

3- xy düzlemi ile arakesiti $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 0 \Rightarrow y = \mp \frac{\mu}{\lambda} x$

$x = 0$ düzlemi ile arakesiti, yz düzlemidir, $z = -\frac{y^2}{2\mu^2}$ dir.

$z = 0$ düzlemi ile arakesiti, xy düzlemidir, $z = \frac{x^2}{2\lambda^2}$ dir.

4- xoy düzlemine paralel düzlemde arakesiti $z = z_0$ dır.

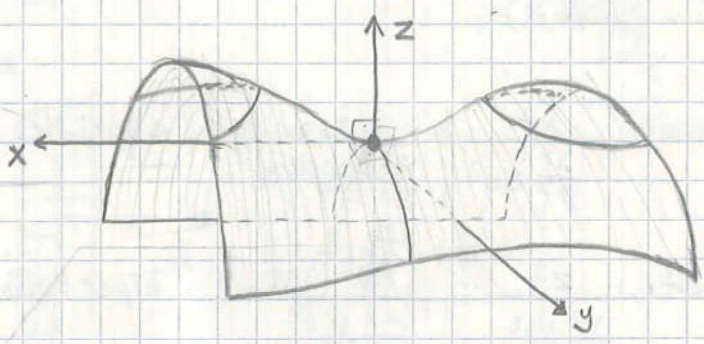
$$\frac{x^2}{\lambda^2 2z_0} - \frac{y^2}{\mu^2 2z_0} = 1$$

xoz düzlemine paralel düzlemde arakesiti $y = y_0$ dır.

$$\frac{x^2}{\lambda^2 2y_0} - \frac{z^2}{\nu^2 2y_0} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2\lambda^2} - \frac{z^2}{2\nu^2} = z \qquad z = Ax^2 + B \text{ paraboldür.}$$

$y = 0$ düzlemiyle arakesiti $z = \frac{x^2}{2\lambda^2}$

Grafiği :



B- Eliptik Paraboloit

(2,2,4) denkleminde ilk iki terimin işareti aynı ise bu denklem, bir eliptik paraboloit gösterir.

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 2z$$

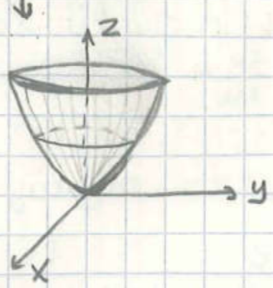
Özellikleri :

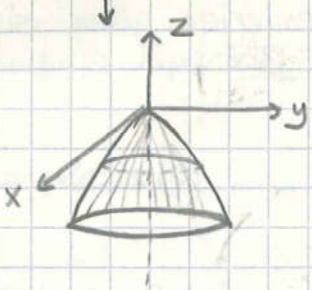
1- Xo~~z~~, yoz düzlemine ~~ve~~ oz eksenine ~~göre~~ simetriktir.

2- Bu yüzey oz eksenine göre simetriktir.

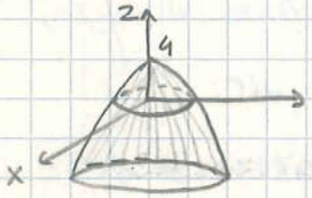
3- $z = z_0 \qquad \frac{x^2}{2z_0\lambda^2} + \frac{y^2}{2z_0\mu^2} = 1$

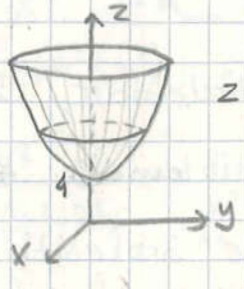
$z_{,}(+)$ ise grafik aynı, şekil aşağı doğrudur.





Örnek// $z=4-x^2-y^2 \Rightarrow$ eliptik paraboloit





$z=4+x^2+y^2$

$z=3x^2+4y^2 \Rightarrow$ eliptik paraboloit.

$z=4-x^2-\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow$ " " .

2.6. KONİLER :

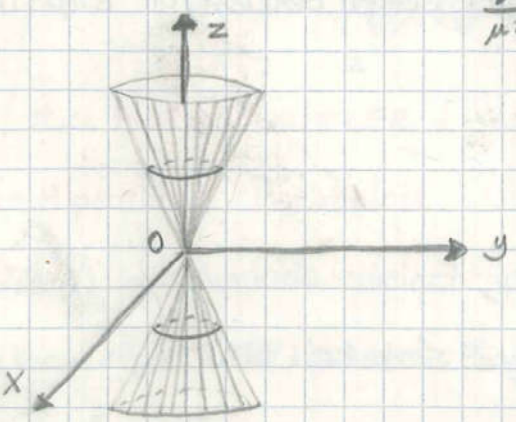
$\mp \frac{x^2}{\lambda^2} \mp \frac{y^2}{\mu^2} \mp \frac{z^2}{\nu^2} = 0$ ... (2,2,3) denkleminin 1. yanının herhangi iki terimi aynı işaretli, üçüncüsü zıt işaretli ise bu koni denklemidir.

$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\nu^2} = 0$ ---- (2,6,1)

$z=z_0$ düzlemiyle arakesiti, $\dfrac{x^2}{\frac{\lambda^2}{\nu^2} z_0^2} + \dfrac{y^2}{\frac{\mu^2}{\nu^2} z_0^2} = 1$ elipsidir.

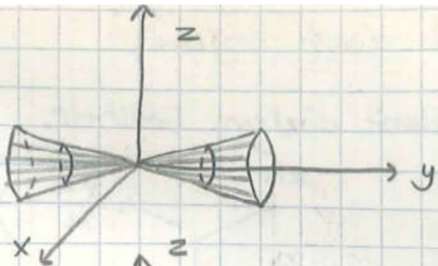
$x=x_0$ düzlemiyle arakesiti, $\dfrac{z^2}{\frac{\nu^2}{\lambda^2} x_0^2} - \dfrac{y^2}{\frac{\mu^2}{\lambda^2} x_0^2} = 1$ hiperbolüdür.

$y=y_0$ düzlemiyle arakesiti, $\dfrac{y^2}{\frac{\nu^2}{\mu^2} y_0^2} - \dfrac{z^2}{\frac{\lambda^2}{\mu^2} y_0^2} = 1$ hiperbolüdür.

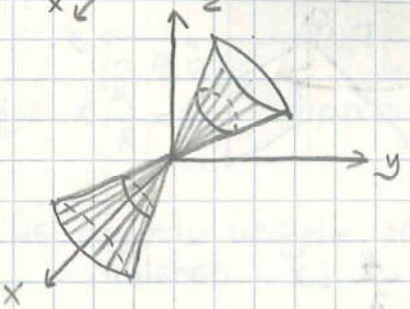


$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\nu^2} = 0$

$$\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=0$$



$$-\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=0$$

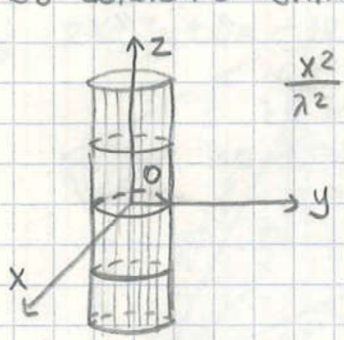


2.7. SİLİNDİRLER :

$\mp\frac{x^2}{\lambda^2}\mp\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ ... (2,2,5) denklemi dört şekilde yazılabilir.

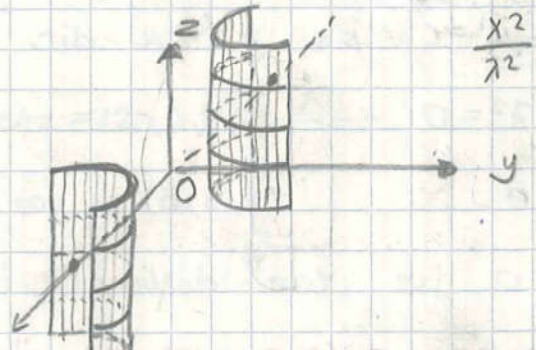
$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ $\quad \frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ $\quad -\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$ $\quad \left[\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=-1\right.$ sanaldır.

Bu denklemler silindir belirtirler.



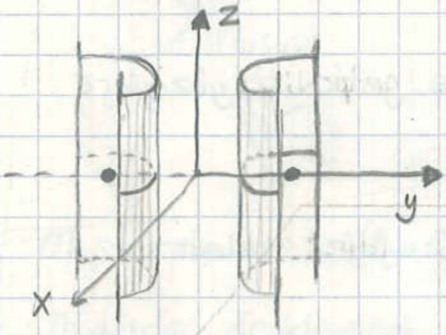
$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$

eliptik silindir.



$\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$

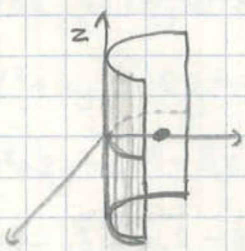
hiperbolik silindir.



hiperbolik silindir.

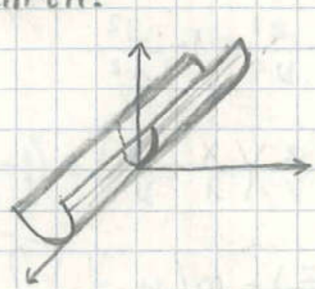
$-\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-1=0$

- $x^2-4cy=0$ ... (2,2,7) denklemi ana doğrusu z eksenine paralel



$c>0$ parabolik silindir belirtir.

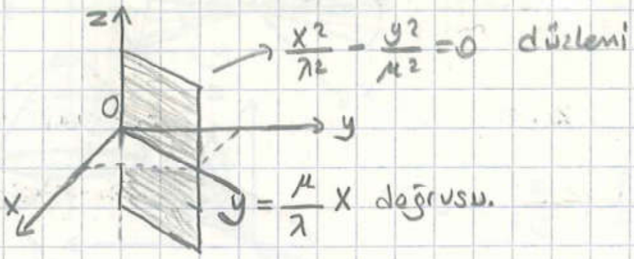
- $2z-y^2=0 \quad z=\frac{y^2}{2}$



2.8. DÜZLEMLER :

$\mp \frac{x^2}{\lambda^2} \mp \frac{y^2}{\mu^2} = 0$ (2,2,6) denklemi düzlem belirtir.

$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 0 \qquad y = \mp \frac{\mu}{\lambda} x$



$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 0$ --- (2,8,1)

$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 0$ --- (2,8,2) $\quad y = \mp \frac{\mu}{\lambda} i x$ sanaldır.

$x^2 \mp \lambda^2 = 0$ ---- (2,2,8)

$x^2 = 0$ ----- (2,2,9) denklemleri düzlem denklemidir.

$x^2 - \lambda^2 = 0$ ---- (2,8,3) ise $x = \mp \lambda$ dır. yoz düzlemine paralel bir çift düzlendir.

$z^2 - \nu^2 = 0$ ise $z = \mp \nu$ dir. xoy düzlemine paralel çift düzlendir.

$y^2 - \mu^2 = 0$ ise $y = \mp \mu$ dir. xoz " " " "

$x^2 + \lambda^2 = 0$ --- (2,8,4) sanal düzlendir. $x = \mp \lambda i$

$x^2 = 0$ -------- (2,8,5) yoz düzlemidir. iki kattır.

$y^2 = 0$ ise xoz düzlemidir, iki kattır.

2.9. REGLE (Doğru Çizgili) YÜZEYLER :

TANIM 2.9.1. Bir parametreli doğru ailesinin meydana getirdiği yüzeylere regle yüzey denir. (Silindir, koni, v.b.)

① $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\nu^2} - 1 = 0$ tek kanatlı hiperboloid (regle yüzeydir.)

② $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 2z$ hiperbolik paraboloid (regle yüzeydir.)

1 $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{z^2}{\nu^2} = 1 - \frac{y^2}{\mu^2}$

$\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{z}{\nu}\right)\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{z}{\nu}\right) = \left(1 - \frac{y}{\mu}\right)\left(1 + \frac{y}{\mu}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{z}{\nu}\right) &= m\left(1 + \frac{y}{\mu}\right) \\ \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{z}{\nu}\right) &= \frac{1 - \frac{y}{\mu}}{m} \end{aligned}\right\} \text{---- (2,9,1)}$$

→ x, y ve z 'ye göre birinci dereceden düzlem denklemi.
λ, ν, μ sabittir.
m parametredir (değişkendir.)

↓
Regle yüzeyin ana doğrularıdır.

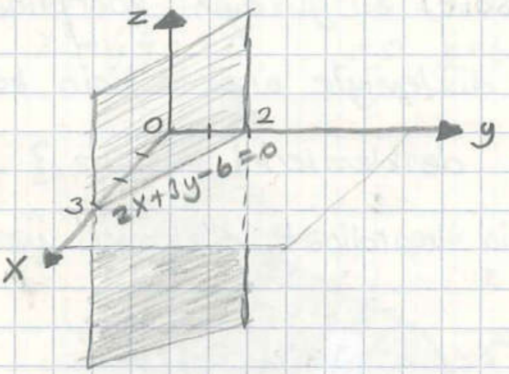
2 • $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 2z$

$$\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu}\right)\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu}\right) = 2z$$

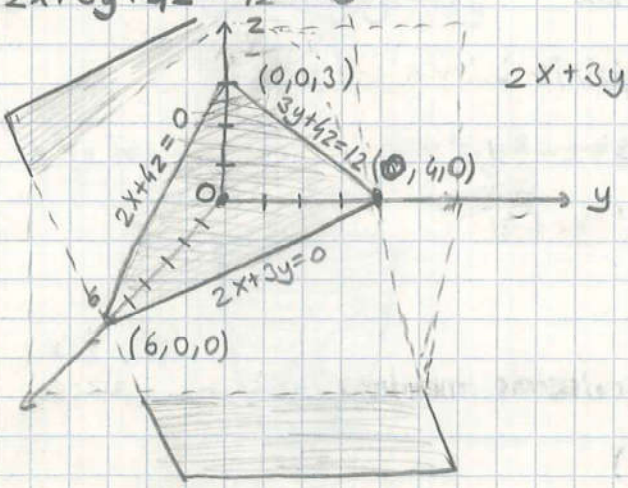
$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu} &= 2m \\ \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} &= \frac{z}{m} \end{aligned}\right\} \text{---- } (2,9,2)$$

x, y, z ye göre 1. dereceden düzlem denklemidir. 3 boyutlu uzayda Oz'ye paralel düzlemdir.

Örnek $2x+3y-6=0$ Üç boyutlu uzayda Oz'ye paralel düzlemdir.



Örnek // $2x+3y+4z-12=0$



$2x+3y+4z=12$

Alıştırmalar : (Bk. S: 670)

1- Aşağıda denklemleri yazılı, 2. derece yüzeyleri gerekli öteleme dönüşümü yaparak, yüzeylerin adlarını yazınız ve grafiklerini çiziniz.

$x^2+4y^2+2z^2-4z=0$

$x^2+2y^2+z^2-8y=0$

$x^2-y^2-2z^2-x+4=0$

$x^2-y^2+4z^2-z=0$

$2x^2-3y^2+4z^2+4x-12y+16z-1=0$

2- Aşağıdaki yüzeylerin adlarını yazınız ve grafiklerini çiziniz?

$x^2+4y^2+2z^2-1=0$ $\quad$ $x^2-2y^2-4z=0$ $\quad$ $3y^2-4x^2-1=0$

$x^2+y^2-z=0$ $\quad$ $3x^2+4y^2-z^2=0$ $\quad$ $y-2z^2=0$

$x^2+2y^2+z^2-1=0$ $\quad$ $x^2+y^2-4z^2=0$ $\quad$ $2x+5y-10=0$

$x^2+3y^2-z^2-1=0$ $\quad$ $x^2+6y^2-1=0$ $\quad$ $y=2x$

$4x^2-y^2-2z^2-1=0$ $\quad$ $2x^2-y^2-1=0$ $\quad$ $x+y+z-1=0$

$x=\mp 5$ $\quad$ $y=\mp 2$ $\quad$ $z=\mp 4$

3- $x^2+y^2+2z^2-1=0$ yüzeyi veriliyor. (elipsoit) Bu yüzeyin koordinat düzlemleriyle arakesitini ve $x+y+z-1=0$ düzlemiyle arakesitinin koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümlerinin denklemlerini bulunuz ?

4- Aşağıdaki yüzey çiftlerinin arakesitlerinin koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümlerinin denklemlerini bulunuz ?

$x^2-4y^2-2z=0$ $\quad$ $4(x^2+y^2)+z^2-1=0$ $\quad$ $2x^2+y^2-z^2-x=0$

$2x-y+z-4=0$ $\quad$ $x^2+y^2+z^2-1=0$ $\quad$ $x^2-4y^2+2z^2-3y=0$

5- Aşağıdaki yüzeylerin grafiklerini çiziniz.

$x^2+4y^2-z^2=0$ $\quad$ $6x^2-y^2-1=0$

$4x^2-3y^2-z^2=0$ $\quad$ $y^2-4x=0$

$x^2+2y^2-1=0$

6- Aşağıdaki regle yüzeylerin ana doğrularını bulunuz.

$4x^2+9y^2-36z^2-36=0$

$x^2-4y^2-8z=0$

7- Aşağıdaki düzlem çiftlerinin arakesiti olan ve bir m parametresine bağlı bulunan doğru ailelerinin geometrik yerini bulunuz.

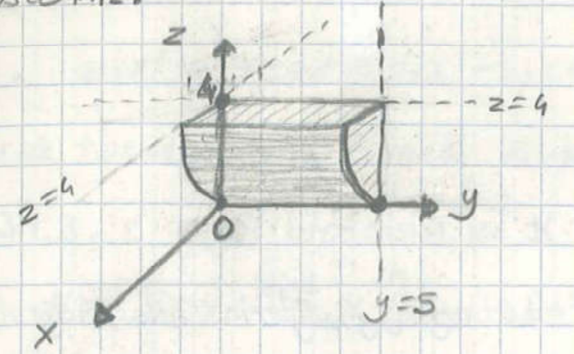
a- $2x+z=m(1+4y)$ $\quad$ b- $x+4z=m(1-2y)$ $\quad$ c- $x+4y=mz$

$2x-z=\frac{1}{m}(1-4y)$ $\quad$ $x-4z=\frac{1}{m}(1+2y)$ $\quad$ $x-4y=\frac{2}{m}$

(Bk. S: 670)

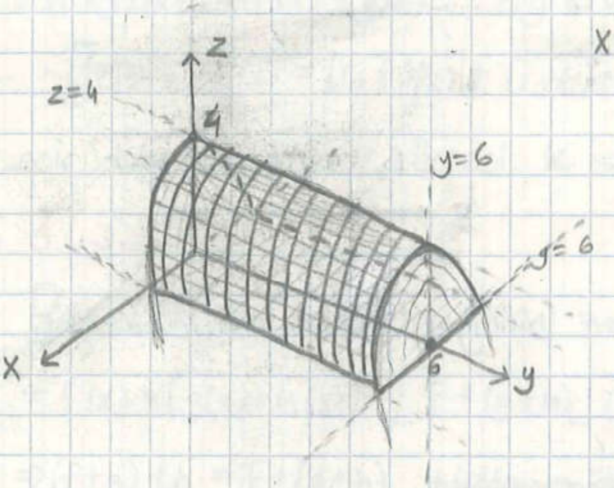
Sorυ// $x^2-z=0$, $y=0$, $y=5$, $z=4$, $x=0$ bu yüzeylerin sınırladığı bölgeyi çizerek gösteriniz?

$x^2-z=0 \quad x^2=z$

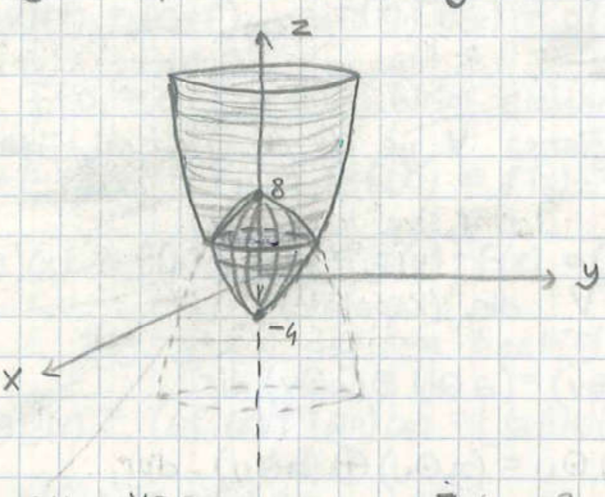


Sorυ// $x^2-4+z=0 \quad y=0 \quad y=6 \quad z=0$

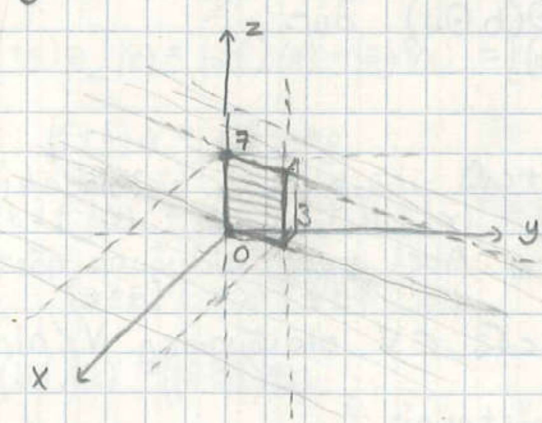
$x^2=4-z$ Ana doğruları Oy eksenine paralel parabolik silindir.

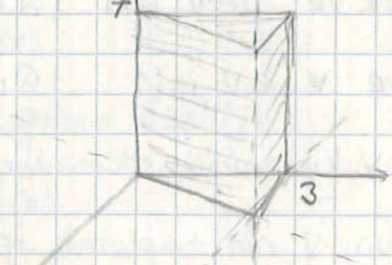


Sorυ// $x^2+y^2-z-4=0 \quad -x^2-y^2-z+8=0$

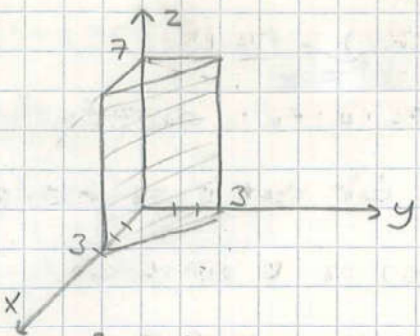


Sorυ// $y=2x \quad x=0 \quad z=0 \quad z=7 \quad y=3$





Soru// $x+y-3=0$ $\quad z=0$ $\quad z=7$ $\quad x=0$ $\quad y=0$



Soru// $4x^2-9y^2=6z$ $\quad 9x^2+16y^2-25z^2=1$ regle yüzeylerin ana doğruları ?

Soru// $2x^2-3y^2-1=0$, $3x^2-z=0$, $5y^2-3x^2-1=0$ $\quad 2x^2-3y^2-5z^2=0$

$2x^2-3y^2-z^2+3=0$

3. BÖLÜM

- VEKTÖR UZAYI -

3.1. Ön Bilgiler :

İç işlem, dış işlem, grup, halka, cisim biliniyor kabul edilecektir.

TANIM 3.1.1

$(V,\oplus)$ değişmeli grup, $(K,+,\cdot)$ bir cisim olsun.

$$\odot : K \times V \longrightarrow V$$
$$(a,v) \longrightarrow (a \odot v)$$

dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa V ye $(K,+,\cdot)$ cismi üzerinde vektör uzayı denir.

1- $\forall a \in K$ ve $\forall v \in V$ için $a \odot v \in V$ dir. (Kapalılık)

2- $\forall a,b \in K$ ve $\forall u,v \in V$ için $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ dir.

3- $\forall a,b \in K$ ve $\forall u \in V$ için $(a \oplus b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u)$ dur.

4- $\forall a,b \in K$ ve $u \in V$ için $(a.b) \odot u = a \odot (b \odot u)$ dur.

5- $1 \in K$ ve $\forall u \in V$ için $1 \odot u = u$ dur.

Örnek 3.1.1. V kümesinin elemanları $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $a,b,c \in \mathbb{Q}$ biçimindeki bütün sayılar olsun. V nin toplama işlemine göre Abel grubu olduğunu gösteriniz ? $d \in \mathbb{Q}$ ise , $d(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}) = da+db\sqrt{2}+dc\sqrt{3} \in V$ olduğundan V 'nin $\mathbb{Q}$ üstünde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz ?

Örnek 3.1.2. $V=\{a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}$, 2. dereceden bütün polinomlar kümesi olsun V üzerinde toplama işlemi ile çarpma ve eşitlik işlemleri

a. $(a_2X^2+a_1X+a_0)+(b_2X^2+b_1X+b_0)=(a_2+b_2)X^2+(a_1+b_1)X+(a_0+b_0)$

b. $r(a_2X^2+a_1X+a_0)=(ra_2)X^2+(ra_1)X+(ra_0)$, $r\in\mathbb{R}$

c. $a_2X^2+a_1X+a_0=b_2X^2+b_1X+b_0 \iff a_2=b_2,\ a_1=b_1,\ a_0=b_0$

olarak tanımlansın. V kümesi IR kümesi üzerine bir vektör uzayıdır, gösteriniz?

Örnek 3.1.3. K keyfi bir cisim ve X'de boş olmayan bir küme olsun.

$V=\{f: X \xrightarrow{\text{içine}} K\}$ bütün fonksiyonların kümesi olsun. V üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri

1- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\quad f,g\in V,\ x\in X$

2- $[(r_1+r_2)f](x)=(r_1f)(x)+(r_2f)(x)=r_1(f(x)+r_2f(x)$

olarak tanımlansın. V kümesi K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır, göster?

Çözüm 3.1.3.

1. $[(f+g)+h](x)=(f+g)(x)+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)$

$=f(x)+(g(x)+h(x))=[f+(g+h)](x)$, $\quad f,g,h\in V \quad \forall x\in X$ kapalılık.

$\Rightarrow (f+g)+h=f+(g+h)$ birleşme özelliği.

2. $(f+0)(x)=(0+f)(x)=f(x)+0(x)=0(x)+f(x)=f(x)$

$\Rightarrow f+0=0+f=f$ birim eleman.

3. $(f+(-f))(x)=f(x)+(-f(x))=f(x)-f(x)=0(x)$

4. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$

$f+g=g+f$ değişme özelliği

5. $[a(f+g)](x)=(af)(x)+(ag)(x)=[(af)+(ag)](x)$

$a(f+g)=af+ag$ soldan dağılma özelliği

$[(f+g)a](x)=(af)(x)+(ag)(x)=[(af)+(ag)](x)$

$(f+g)a=af+ag$ sağdan dağılma özelliği

6. $[(a+b)f](x)=(af)(x)+(bf)(x)=[(af)+(bf)](x)$

$(a+b)f=af+bf$

7. $(a(bf))(x)=((ab)f)(x)$

$a(bf)=(ab)f$

8. $(1.f)(x)=f(x)$

$1.f=f$

TANIM 3.1.2

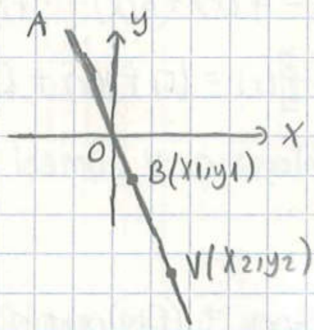
V, K cismi üzerinde vektör uzayı ve $A \subset V$ olsun. $A \neq \emptyset$, Eğer,

1. $\forall x, y \in A$ için $(x+y) \in A$
2. $\forall a \in K$ ve $\forall x \in A$ için $ax \in A$

oluyorsa A'ya V vektör uzayının bir alt uzayı denir.

Örnek 3.1.4. R^2de başlangıç noktasından geçen $x+5y=0$ doğrusu R^2nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz?

Çözüm// $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+5y=0\}$ olsun. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



① $(u,v) \in A \Rightarrow (u+v) \in A$?

$(u+v) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$u = (x_1, x_2) \quad v = (y_1, y_2)$

$x_1 + x_2 + 5(y_1+y_2) = 0$

$u \in A$ olduğundan $x_1 + 5y_1 = 0$

$v \in A$ olduğundan $x_2 + 5y_2 = 0$

$$(x_1+x_2)+5(y_1+y_2) = 0 \Rightarrow (u+v) \in A \,//$$

② $ku = (kx_1, kx_2)$

$kx_1 + 5ky_1 = 0$?

$u \in A$ olduğundan $x_1 + 5y_1 = 0$

$$kx_1 + k5y_1 = 0 \Rightarrow ku \in A \,//$$

TANIM 3.1.3

V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ elemanları verilsin. $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ olmak üzere

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarının doğrusal (lineer) toplamı denir.

TANIM 3.1.4

V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ olsun.

1. $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$ olacak biçimde en az biri sıfırdan farklı $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ skalarları verilsin. $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarına

doğrusal bağımlıdır denir.

2- Her bir $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ için

$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0 \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ oluyorsa,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarına doğrusal bağımsızdır denir.

TANIM 3.1.5

Bir V vektör uzayında $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarının bütün doğrusal toplamlarından oluşan

$$A = \{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in K\}$$

kümesine $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ elemanlarının gerdiği ya da ürettiği (doğurduğu) alt uzay denir.

TANIM 3.1.6

Bir V vektör uzayındaki $(V \neq \{0\})$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları V uzayını geriyorsa ve doğrusal bağımsız ise $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarına V nin bir tabanı (bazı), buradaki n vektör sayısına da V'nin boyutu denir ve

$\boxed{boy(V) = n}$ yazılır.

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanı $\quad boy(\mathbb{R}^2) = 2$

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanı $\quad boy(\mathbb{R}^3) = 3$

Örnek 3.1.5 ① $\vec{A} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}$, $\vec{B} = -3\vec{e_1}$ veriliyor. $\{\vec{A}, \vec{B}\}$, $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanı olduğunu gösteriniz?

② $\vec{a} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad \vec{b} = -3\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad \vec{c} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$ veriliyor.

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanı olduğunu gösteriniz?

$\forall \vec{d} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{d} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c}$

① $\forall \vec{D} \in \mathbb{R}^2$ ise $\vec{D} = c_1\vec{A} + c_2\vec{B} \quad c_1\vec{A} + c_2\vec{B} = 0$

$c_1\vec{A} + c_2\vec{B} = c_1\vec{e_1} - 2c_1\vec{e_2} - 3c_2\vec{e_1} = (c_1 - 3c_2)\vec{e_1} - 2c_1\vec{e_2} = 0$

② $\forall \vec{d} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{d} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c}$

$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = 0$ olması $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olmasıyla mümkündür.

$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = (2c_1 - 3c_2 + c_3)\vec{e_1} + (c_1 + c_2 - c_3)\vec{e_2} + (c_1 + 2c_2 - c_3)\vec{e_3} = 0$

$$2\vec{c_1} - 3c_2 + c_3 = 0$$
$$c_1 + c_2 - c_3 = 0$$
$$c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$$

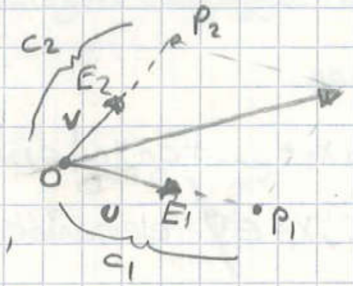
$$2c_1 + c_3 = 0$$
$$\underline{+\; c_1 - c_3 = 0}$$

$c_1 = 0$ $\quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$ $\quad$ a,b,c vektörleri doğrusal bağımsızdır

ve R^3 ün bir bazıdır(

3.2. Düzlende Afin Koordinat Sistemi =

Düzlende (R^2 de) bir taban $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ve keyfi bir nokta O olsun.



$$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$$

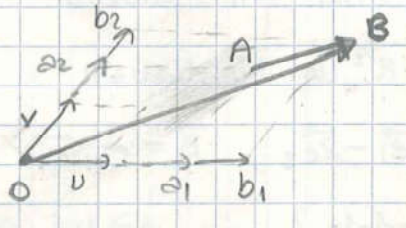
$$\vec{OP_1} = c_1 \quad \vec{OP_2} = c_2 \quad \vec{OP_1} = c_1 \vec{OE_1} = e_1 \vec{u}$$
$$\vec{OP_2} = c_2 \vec{OE_2} = c_2 \vec{v}$$

$$\vec{OP} = c_1 \vec{OE_1} + c_2 \vec{OE_2} \quad \vec{OP} = c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v} \qquad P \longleftrightarrow (c_1, c_2)$$

$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{başlangıç} \\ \text{noktası}}}{O(0,0)}$ $\quad \underbrace{E_1 = (1,0) \quad E_2 = (0,1)}_{\text{birim noktalar}}$

Düzlemin bir tabanı $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ keyfi nokta O olsun.

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$



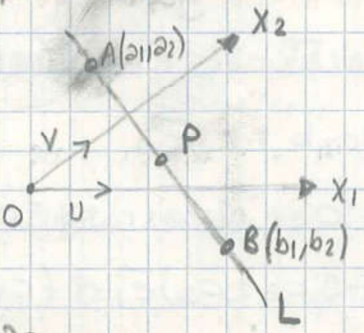
$A = (a_1, a_2) \quad B = (b_1, b_2)$

$$\vec{OA} = a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v}$$

$$\vec{OB} = b_1 \vec{u} + b_2 \vec{v} \qquad \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}, \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= (b_1 - a_1)\vec{u} + (b_2 - a_2)\vec{v}$$

$$A = B \iff a_1 = b_1, \; a_2 = b_2$$

$c_1 x_1 + c_2 x_2 = d$ şeklinde ifade edilebilir.



$$c\vec{AP} = \vec{AB}$$

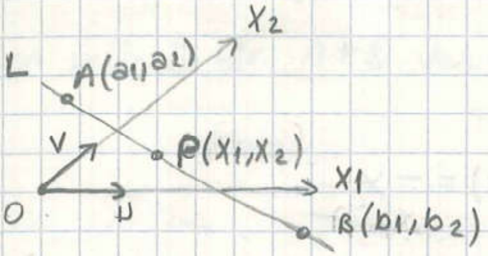
$$c\vec{AP} = c x_1 \vec{u} + c x_2 \vec{v}$$

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1)\vec{u} + (b_2 - a_2)\vec{v}$$

$$c x_1 = b_1 - a_1 \quad c x_2 = b_2 - a_2$$

$$\Rightarrow c = (b_1 - a_1)/x_1 \quad c = (b_2 - a_2)/x_2$$

$$\frac{b_1-a_1}{x_1}=\frac{b_2-a_2}{x_2} \qquad \frac{x_1}{b_1-a_1}=\frac{x_2}{b_2-a_2}$$



$$\vec{AP}=(x_1-a_1)\vec{u}+(x_2-a_2)\vec{v}$$

$$\vec{AB}=(b_1-a_1)\vec{u}+(b_2-a_2)\vec{v}$$

$$c\vec{AP}=\vec{AB}$$

$$\left.\begin{aligned} c(x_1-a_1)&=(b_1-a_1)\\ c(x_2-a_2)&=(b_2-a_2)\end{aligned}\right\} c=\frac{b_1-a_1}{x_1-a_1} \quad c=\frac{b_2-a_2}{x_2-a_2}$$

$$\frac{b_1-a_1}{x_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{x_2-a_2}$$ iki noktadan geçen doğru denklemi.

$$\boxed{\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}=\frac{x_2-a_2}{b_2-a_2}}$$ Afin koordinat sisteminde iki noktadan geçen doğru denklemi.

$$\frac{1}{b_1-a_1}x_1-\frac{a_1}{b_1-a_1}-\frac{1}{b_2-a_2}x_2=\frac{-a_2}{b_2-a_2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{b_1-a_1}}_{c_1}x_1-\underbrace{\frac{1}{b_2-a_2}}_{c_2}x_2=\underbrace{\frac{a_1}{b_1-a_1}-\frac{a_2}{b_2-a_2}}_{d}$$

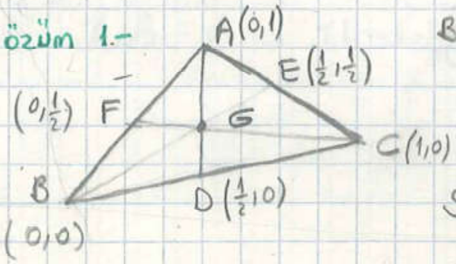
$$c_1x_1+c_2x_2=d$$

$$\frac{x_2-a_2}{x_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$$

Soru// 1- Bir $\hat{ABC}$ de kenarortaylar ağırlık merkezi denen öyle bir G noktasında kesişirler ki bu G noktası kenarortayları tabandan tarafa 1 ve köşeden tarafa 2 kalacak şekilde ½ oranında böler. Gösteriniz?

Soru// 2- R^2 de bir afin koordinat sisteminde $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}=1$ denklemi $(a_1,0)$ ve $(0,a_2)$ noktalarından geçen bir doğru denklemi olduğunu gösteriniz?

Çözüm 1.-



Başlangıç noktası B ve birim noktalar C ve A olsunlar. Buna göre B noktası ve $\vec{BC}$ ve $\vec{BA}$ vektörlerine göre (vektörleriyle) oluşturulan afin koordinat sistemine göre $B=(0,0)$ $C=(1,0)$ $A=(0,1)$ dir.

$D=\left(\frac{1}{2},0\right) \quad E=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad F=\left(0,\frac{1}{2}\right)$

BE nin denklemi, $\frac{y-0}{x-0}=\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}-0} \Rightarrow x-y=0$

CF " " , $2y+x-1=0$

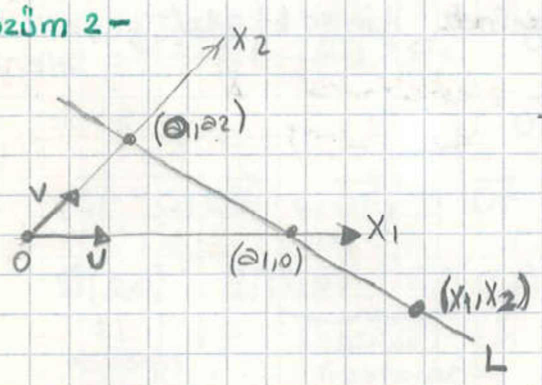
AD " " , $\frac{y-1}{x-0}=\frac{0-1}{\frac{1}{2}-0} \quad \frac{1}{2}(y-1)=-x$

Bu üç denklem $x=\frac{1}{3}$ ve $y=\frac{1}{3}$ için sağlanır.

$\vec{BG}=\frac{2}{3}\vec{BE} \quad \vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AD} \quad \vec{CG}=\frac{2}{3}\vec{CF}$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{BE}}=\frac{2}{3}=\frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{1}{2}-0}$$

Çözüm 2 -



$$\frac{x_2-0}{x_1-a_1}=\frac{0-a_2}{a_1-0}$$

$$\frac{x_2}{x_1-a_1}=\frac{-a_2}{a_1} \qquad \frac{x_2}{a_2}=-\frac{x_1-a_1}{a_1}$$

$$\frac{x_2}{a_2}=-\frac{x_1}{a_1}+1 \Rightarrow \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}=1$$

3.3. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ Üzerinde Tanımlanan Vektör Uzayları :

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırası ile gerçel ve karmaşık sayılar cismi göstersin. n keyfi ~~fakat~~ sabit bir pozitif tamsayı olsun. $\mathbb{R}^n$ gerçel sayıların bütün sıralanmış n-lerin kümesi göstersin. n'liyi büyük harfle göstereceğiz.

$A\in\mathbb{R}^n$ ise $A=\{\underbrace{a_1,a_2,\dots,a_n}_{n \text{ tane}}\}$ dır. Bu küme,

Bunu kısaca $A=(a_i)$ $i=1,2,\dots,n$ ile gösterelim.

$A=(a_i)$ $B=(b_i)$ gibi iki sıralanmış n'lide $\forall i$ $1\leq i\leq n$ için $a_i=b_i$ ise $A=B$ dir.

Benzer şekilde $a_1,a_2,\dots,a_n$ karmaşık sayılar olmak üzere bütün sıraların $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ n-lilerin kümesi $\mathbb{C}^n$ ile gösterilir.

$\mathbb{K}$ $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ yi göstermek üzere,

Eksik

TANIM 3.3.1.

$\mathcal{F}^n$'de $A=(a_i)$ ve $B=(b_i)$ için bileşenleri (a_i+b_i) $1\leq i\leq n$, olan üçüncü bir $A+B$ vektörü toplamı.

Eksik

Tanım 3.3.2. (skalerle çarpma).

$\mathcal{F}^n$ de $A=(a_i)$ için ve $\mathcal{F}$ de de c için bileşenleri (ca_i) $1\leq i\leq n$ olan ~~vektör~~ skaler cA ile gösterilir ve A'nın skaler ile çarpımı olarak adlandırılır.

Burada da c skalerA ve bir A vektörüne A gibi bir ikinci vektör, skaler ile çarpım işlemiyle karşılık getirmiş olur. Bu da bir

$$\mathcal{F}\times\mathcal{F}^n\longrightarrow\mathcal{F}^n$$
$$(c,A)\longrightarrow f(c,A)=c.A$$

dönüşümünden ibarettir.

0 ile $(0,0,\ldots,0)$ n'lisini göstereceğiz ve buna sıfır vektörü diyeceğiz.

Teorem 3.3.1.

$\mathcal{F}^n$ de toplama ve skaler ile çarpma aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $A+B=B+A$ (değişme özelliği)
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (birl. öz)
3. $\forall A$ vektörü için $A+0=A$
4. Herhangi bir $A\in\mathcal{F}^n$ için $A+(-A)=0$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $-A$ vektörü vardır.
5. $c(A+B)=cA+cB$ $\quad c\in\mathcal{F}$, $A,B\in\mathcal{F}^n$
6. $(c+d)A=cA+dA$ $\quad c,d\in\mathcal{F}$, $A\in\mathcal{F}^n$
7. $(c.d)A=c(dA)$
8. $1.A=A$

TANIM 3.3.3

Yukarıda tanım (3.3.1) ve tanım (3.3.2) ile tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemleriyle birlikte $\mathcal{F}^n$ kümesine $\mathcal{F}$ üzerinde bir n-boyutlu standart vektör uzayı denir. $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}^n$ ye n-boyutlu standart gerçel vektör uzayı $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ ise $\mathbb{C}^n$ ye de n-boyutlu standart karmaşık vektör uzayı denir.

Teorem 3.3.2.

$\forall A \in \mathcal{F}^n$ vektörü, $\mathcal{F}^n$ nin $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ standart baz (taban) vektörlerinin bir tek doğrusal toplamı olarak yazılabilir.

İspat// $\mathcal{F}^n$ de herhangi bir $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektörü uzunluğunda A nın e_i üzerindeki i. bileşeni a_i olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i} \qquad \text{yazılabilir.}$$

Eğer $A = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e_i}$ şeklinde de $\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\vec{e_i} = 0$

$\Rightarrow \forall i$ için $a_i - b_i = 0$ dır.

$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i}}$ yazış tarzına Einstein toplam tarzı denir.

Alıştırmalar :

1- $\mathbb{R}^3$'de aşağıdaki doğrusal toplamları hesap ediniz ?
(lineer birleşimleri)

a) $2(1,0,4) + (-4)(2,1,5)$

b) $3(2,-1,-2) + 2(-3, \frac{2}{3}, 3)$

2- $\mathbb{R}^2$'de $i(2, -1+3i) + (3-i)(1+i, 4)$ ifadesini hesap ediniz.

3- $\mathbb{R}^3$de $(1,0,0)$ vektörünü $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ ve $(1,1,0)$ vektörlerinin doğrusal toplamı olarak yazınız.

4- $\mathcal{F}^n$ de herhangi iki $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörü için $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v}$ olacak biçimde bir tek $\vec{x}$ vektörünün varolduğunu gösteriniz.

5- Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ nin ağırlık merkezi G ise $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$ dır. Gösteriniz.

6- $\mathbb{R}^3$ de bir $\overset{\triangle}{ABC}$ için $A = (a_1, a_2, a_3)$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ $C = (c_1, c_2, c_3)$ olduğuna göre ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

· Çözümler

1- a) $(2,0,8)+(-8,-4,-20) = (-6,-4,-16)$

b) $(6,-3,-6)+(-6,\frac{4}{3},+6) = (0,-\frac{5}{3},0)$

2- $(2i - i+3i^2)+(2i+4,12-4i) = (2i,-i-3)+(2i+4,12-4i)$

$= (4i+4, 9-5i)$

3- $c_1(0,1,1)+c_2(1,0,1)+c_3(1,1,0) = (1,0,0)$

$(0,c_1,c_1)+(c_2,0,c_2)+(c_3,c_3,0) = 0$

$(c_2+c_3, c_1+c_3, c_1+c_2) = 0 \qquad c_1+c_2=0 \quad c_1+c_3=0 \quad c_2+c_3=0$

$c_1-c_3=0 \qquad c_2=-c_3$

$2c_1=0$

$c_1=0 \qquad c_3=0 \qquad c_2=0$

$\mathbb{R}^3$ de doğrusal bağımsız vektörlerdir ve doğrusal toplam olarak yazılır.

$c_2+c_3=1 \qquad c_2=c_3 \quad c_3=c_2=\frac{1}{2} \quad c_1=-\frac{1}{2}$

$c_1+c_3=0$

$c_1+c_2=0$

$-\frac{1}{2}(0,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0)$

$= (0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})+(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$= (1,0,0)$

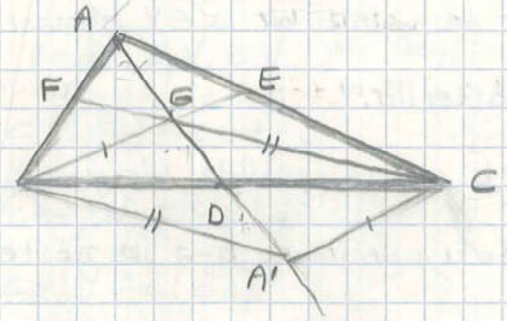
4- Teorem 3.3.1'in 4. şıkkından.

$\vec{u}+(-\vec{u})+\vec{x} = \vec{v}+(-\vec{u})$

$\Rightarrow \vec{0}+\vec{x} = \vec{v}+(-\vec{u})$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{v}-\vec{u}$

5-



$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{A'G}+\vec{GB}+\vec{GC}$

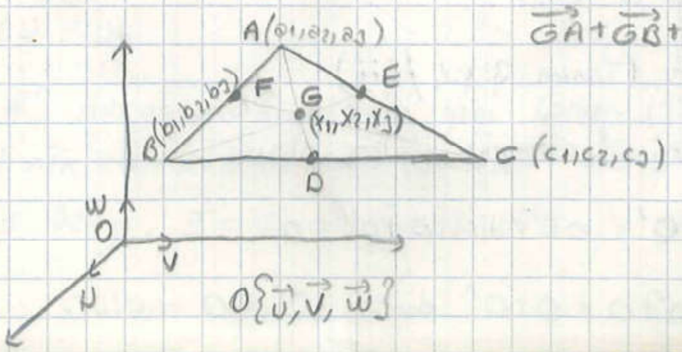
$= (\vec{A'B}+\vec{BG})+\vec{GB}+\vec{GC}$

$= \vec{CG}+\vec{BG}+\vec{GB}+\vec{GC}$

$= -\vec{GC}-\vec{GB}+\vec{GB}+\vec{GC}$

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = 0$

6-



$O\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

$D\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}, \frac{b_3+c_3}{2}\right)$

$E=\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}, \frac{a_3+c_3}{2}\right)$

$F=\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$

$2\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GA}$

$$\Rightarrow 2\left(x_1 - \frac{b_1+c_1}{2}\right)\vec{u} + 2\left(x_2 - \frac{b_2+c_2}{2}\right)\vec{v} + 2\left(x_3 - \frac{b_3+c_3}{2}\right)\vec{w} = (a_1 - x_1)\vec{u} + (a_2 - x_2)\vec{v} + (a_3 - x_3)\vec{w}$$

$$\Rightarrow (a_1 - x_1)\vec{u} + (a_2 - x_2)\vec{v} + (a_3 - x_3)\vec{w} = (2x_1 - b_1 - c_1)\vec{u} + (2x_2 - b_2 - c_2)\vec{v} + (2x_3 - b_3 - c_3)\vec{w}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - b_1 - c_1 &= a_1 - x_1 \\ 2x_2 - b_2 - c_2 &= a_2 - x_2 \\ 2x_3 - b_3 - c_3 &= a_3 - x_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ x_2 &= \frac{a_2+b_2+c_2}{3} \\ x_3 &= \frac{a_3+b_3+c_3}{3} \end{aligned}$$

Vektör uzaylarının toplam grubu denen özelliği de vardır.

TANIM: 3.3.4

Toplam grubu diye bir V kümesi ile toplam denen bir işleme denir. Bu işlem herhangi iki $a, b \in V$ elemanlarına bir tek $(a+b) \in V$ elemanını o şekilde karşılık getirir ki aşağıdaki kurallar sağlanır.

i- $a+b = b+a$

ii- $(a+b)+c = a+(b+c)$

iii- $\forall a \in V$ için $a+0 = a$ olacak biçimde belli bir $0 \in V$ elemanı vardır.

iv - $\forall a \in V$ için $a+a' = 0$ olacak biçimde bir $a' \in V$ vardır.

Teorem 3.3.3.

V bir toplama grubu olsun.

1- $\forall a \in V$ için $a+0 = a$ olacak biçimde belli bir ve yalnız bir $a \in V$ elemanı vardır. Bu elemana V nin sıfır elemanı denir.

2- $\forall a \in V$ için $a+a' = 0$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $a' \in V$ elemanı vardır. Bu elemana a'nın tersi denir ve $-a$ ile gösterilir.

3- Herhangi $a, b \in V$ elemanları için $a+x = b$ olacak şekilde, bir ve yalnız bir $x \in V$ elemanı vardır. Bu elemana "b ile a'nın farkı" denir ve $b-a$ ile gösterilir.

4- Eğer $\exists a$ için $a+x = a$ ise $x = 0$ dır.

İspat 1// $a+0 = a$ $0 \in V$ elemanı vardır. (Tanım 3.3.4 / iii)

Bu koşulu sağlayan başka bir $0'$ elemanı daha olsun.

$a+0' = a$ $\quad 0' \in V$, $0'+0 = 0'$ $\quad 0 \in V$ dir. $0+0' = 0$

yine (Tanım 3.3.4/i) e göre $0'+0 = 0+0'$ dur. $0' = 0$ olur.

İspat 2// V toplam grubu olduğunda (tanım 3.3.4/iv) den

$a + a' = 0$ olacak biçimde $a' \in V$ vardır. Bu özelliği sağlayan başka bir a'' elemanı daha olduğunu kabul edelim. Yani $a + a'' = 0$ dır.

$$a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a'' \Rightarrow a' = a'' \quad //$$

İspat 3//
$$a + (-a) + x = b + (-a)$$
$$0 + x = b - a$$
$$x = b - a \quad //$$

İspat 4//
$$a + (-a) + x = a + (-a)$$
$$0 + x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Soru// $\forall a \in V$ için $-(-a) = a$ olduğunu gösteriniz.

$$-(-a) + 0 = -(-a) + [(-a) + a]$$
$$= [-(-a) + (-a)] + a = 0 + a = a \quad //$$

Bir toplam grubunda $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gibi herhangi sayıda elemanın toplamı tümevarım yoluyla bu elemanların toplamının,

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + a_k$ olduğu görülür. Bunu, $\sum_{i=1}^{k} a_i$ şeklinde yazarız.

TANIM 3.3.5

V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olsun. V öyle bir toplam grubudur ki, bu grup için skaler ile çarpma denen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan (olan) bir

$$\mathcal{F} \times V \longrightarrow V$$
$$(c, u) \longrightarrow cu \quad \text{dönüşümü vardır.}$$

keyfi $u, v \in V$ ve keyfi $c, d \in \mathcal{F}$ için

1- $c(u + v) = cu + cv$

2- $(c + d)u = cu + du$

3- $(cd)u = c(du)$

4- $1.u = u$.

$\mathcal{F}^n$ durumunda olduğu gibi Tanım (3.3.5) de de $\mathcal{F}$ nin elemanlarına skaler ve V nin elemanlarına da vektör denir. $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ olduğunda V ye gerçel vektör uzayı, $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ olduğunda da V ye karmaşık vektör uzayı denir.

Teorem 3.3.4 V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

① $\forall v \in V$ için $0 \cdot v = 0$ — ~~skaler~~ vektör
(0: skaler, v: vektör)

② $\forall c \in \mathcal{F}$ için $c \cdot 0 = 0$

③ $c \cdot v = 0$ ise $c = 0$ ya da $v = 0$ dır.

④ Herhangi $c \in \mathcal{F}$ ve $v \in V$ için $(-c)v = -(cv)$ dur.

İspat 1// $0 \cdot v = [c + (-c)]v = cv + (-c)v = 0$

2// $c \cdot 0 = c(v + c(-v)) = cv + (-cv) = 0$

$c \cdot (-v) = c(-1 \cdot v)$
$(ab)v = a(bv)$

③ $c \neq 0$ $\quad c^{-1} \cdot c \cdot v = c^{-1} \cdot 0$
$v = 0$

④ $0 \cdot v = (c + c - c)v = 0$
$cv + (-c)v = 0$
$cv + (-cv) + (-c)v = -(cv)$
$0 + (-c)v = -(cv)$
$(-c)v = -(cv)$

$\mathcal{F}^n$ nin $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

$\mathcal{F}$ bir cisim olsun. Sonlu sayıdaki $a_i \in \mathcal{F}$ ler hariç diğerleri sıfır olmak üzere bütün $v = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ biçiminde sıralanışların kümesi $\mathcal{F}^n$ olsun. $\mathcal{F}^\infty$ kümesi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma iki cebirsel işlem

$+ : \mathcal{F}^\infty \times \mathcal{F}^\infty \longrightarrow \mathcal{F}^\infty$
$(u, v) \longrightarrow +(u, v) = u + v = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$
$u = (a_i) \quad v = (b_i)$

$\cdot : \mathcal{F} \times \mathcal{F}^\infty \longrightarrow \mathcal{F}^\infty$
$(c, v) \longrightarrow \cdot(cv) = cv = (ca_0 + ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots)$

biçiminde tanımlanır.

$\mathcal{F}^\infty$ nın bu iki işleme göre $\mathcal{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

3.4. İÇ ÇARPIM UZAYLARI :

TANIM 3.4.1

U ve V veya K cismi üzerinde vektör uzayları olsunlar. Bir $F : U \longrightarrow V$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa F'ye doğrusal (lineer) dönüşüm ya da homomorfizm denir.

1- Herhangi $v, w \in U$ için $F(v + w) = F(v) + F(w)$

2) Herhangi $k \in K$ ve herhangi $v \in U$ için $F(kv) = kF(v)$

TANIM 3.4.2 V bir gerçel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç-çarpım diye aşağıdaki aksiyomlarla tanımlanan bir $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ gerçel değerli fonksiyona denir. $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ biçiminde gösterilir.

1- $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ (simetri aksiyomu)

2- $\langle u_1+u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ $\quad \forall u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$

$\langle u, v_1+v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$

$\langle cu, v \rangle = \langle u, cv \rangle = c\langle u, v \rangle$ $\quad c \in \mathbb{R}$ bilineerlik (iki defa lineer)

Bu aksiyomu kısaca $\langle a u_1 + b u_2 + v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v)$

$\langle u, a v_1 + b v_2 \rangle = a\langle u, v_1 \rangle + b\langle u, v_2 \rangle$ biçiminde yazılabilir.

3- $\langle u,u \rangle \geqslant 0$

$\langle u,u \rangle = 0 \iff u = 0$ (pozitif tanımlılık aksiyomu)

TANIM 3.4.3

V bir karmaşık vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomlarla tanımlanan bir

$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ karmaşık değerli fonksiyona denir ve $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ biçiminde gösterilir.

1. $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$ (Hermit aksiyomu)
2. $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$, $c \in \mathbb{C}$

   $\langle u, cv \rangle = \bar{c}\langle u, v \rangle$

   $\langle u_1+u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$

   $\langle u, v_1+v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ (bilineerlik aksiyomu)
3. $\langle u,u \rangle$ = Gerçeldir. ve $\geqslant 0$ dır.

   $\langle u,u \rangle = 0 \iff u = 0$ (pozitif tanımlılık aksiyomu)

Teorem 3.4.1.

ⓐ bir f fonksiyonu $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ biçiminde tanımlanırsa

f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma öklid anlamındaki

$\left(x,y \in \mathbb{R}^n \quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \quad y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\right) \quad x,y\in\mathbb{R}$

iç çarpım ya da $\mathbb{R}^n$ deki standart iç çarpım denir.

(b) Bir g fonksiyonu $g: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(x,y) \longrightarrow g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \quad y=(y_1,y_2,\dots,y_n) \qquad x,y\in\mathbb{C}^n$

biçiminde tanımlanırsa, g fonksiyonu $\mathbb{C}^n$ de bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Hermit anlamındaki iç çarpım denir.

(c) Bir L fonksiyonu $L: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow L(x,y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i - c^2 x_4 y_4 \qquad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanan L fonksiyonu $\mathbb{R}^4$ de pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Lorentz iç çarpımı denir.

İSPAT// ① $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow \underset{\langle x,y\rangle}{f(x,y)} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = f(y,x) = \langle y,x\rangle$$

simetri aksiyomu.

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ için

② $\langle x+y,z\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$\langle x,y+z\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i+z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

$\langle cx,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} c x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (c y_i) = c\sum x_i y_i = c\langle x,y\rangle$

$\langle x,cy\rangle$ bilineerlik aksiyomu.

③ $\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$ pozitif tanımlılık aksiyomu.

ispat 2// $g: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(x,y) \longrightarrow g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

① $\overline{g(y,x)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}\,\overline{(\overline{x_i})} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = g(x,y)$

② $\forall x,y,z \in \mathbb{C}^n$ için $g(x+y,z) = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i}$

$= g(x,z) + g(y,z)$

$$③\quad g(x,y+z)=\sum_{i=1}^{n} x_i(\overline{y_i+z_i})=\sum_{i=1}^{n} x_i(\overline{y_i}+\overline{z_i})=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}+\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z_i}$$ 613

$$=g(x,y)+g(x,z)$$

$$g(cx,y)=\sum_{i=1}^{n}(cx_i)\overline{y_i}=c\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$$

$$=c\,g(x,y)\qquad x,y\in\mathbb{C}^n,\ c\in\mathbb{C}$$

$$g(x,cy)=\sum_{i=1}^{n}x_i(\overline{cy_i})=\sum_{i=1}^{n}x_i(\overline{c}\,\overline{y_i})=\overline{c}\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}=\overline{c}\,g(x,y)$$

$$③\quad g(x,x)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{x_k}\qquad x_k=a_k+ib_k\quad \overline{x_k}=a_k-ib_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)>0\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=0\quad a_k=0\quad b_k=0$$

$$x=(a_1+ib_1+a_2+ib_2+\dots+a_n+ib_n)=(0,0,\dots,0)$$

Sol:

$$L:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,y)\longrightarrow L(x,y)=\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-c^2x_ny_n$$

$$①\quad L(x,y)=\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-c^2x_ny_n=\sum_{i=1}^{n-1}y_ix_i-c^2x_ny_n=L(y,x)$$ simetri aksiyomu

$$②\quad L(x+y,z)=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i+y_i)\cdot z_i-c^2(x_n+y_n)\quad -c^2(x_n+y_n)z_n$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}x_iz_i-c^2x_nz_n}_{L(x,z)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}y_iz_i-c^2y_nz_n}_{L(y,z)}$$

$$L(x,y+z)=\sum_{i=1}^{n-1}x_i(y_i+z_i)-c^2x_n(y_n+z_n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-c^2x_ny_n}_{L(x,y)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}x_iz_i-c^2x_nz_n}_{L(x,z)}$$

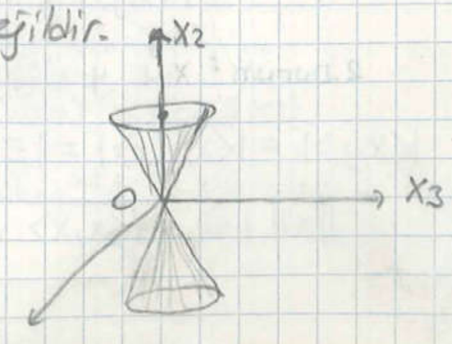
$x,y,z\in\mathbb{R}^n$ ve $k\in\mathbb{R}$ için

$$L(kx,y)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}(kx_i)y_i-c^2kx_ny_n}_{k\,L(x,y)}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}x_i(ky_i)-c^2x_n(ky_n)}_{L(x,ky)}$$

$$=k\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-c^2x_ny_n\right)$$ Bilineerlik aksiyomu

3. aksiyomun sağlanabilir olması garantili değildir.

$$L:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,y)\rightarrow L(x,y)=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i-x_3y_3>0$$



TANIM 3.4.4

Bir gerçel ya da karmaşık vektör uzayı üzerinde belli bir iç çarpım tanımlanırsa, bu vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

TANIM 3.4.5

Bir V iç çarpım uzayında bir u vektörünün normu,

$\boxed{\sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{u.u} = \sqrt{u^2} = \|u\|}$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.4.2.

Bir V iç çarpım uzayında $\forall\, x,y \in V$ için

$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|}$ dir. (Schwarz Eşitsizliği) - - - (3,4,1)

İspat// 1.Durum: x ile y vektörleri doğrusal bağımsız olsunlar.

$ax \neq by \quad ax - by \neq 0$ dır.

$\langle ax-by, ax-by\rangle$

$$\langle ax-by, ax-by\rangle = \langle ax,ax\rangle - \langle ax,by\rangle - \langle by,ax\rangle + \langle by,by\rangle$$

$$= a\bar{a}\langle x,x\rangle - a\bar{b}\langle x,y\rangle - b\bar{a}\langle y,x\rangle + b\bar{b}\langle y,y\rangle$$

$z = a+ib$
$\bar{z} = a-ib$
$z\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2$
$z+\bar{z} = 2a$
$= 2\,\text{Reel}(z)$

$$= |a|^2\|x\|^2 - (a\bar{b}\langle x,y\rangle + ab\langle x,y\rangle) + \|b\|^2\|y\|^2$$

$$\left[\, x,y \in \mathbb{C}^n,\ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}\,\right]$$

$$= |a|^2\|x\|^2 - 2\,\text{Reel}\{a\bar{b}\langle x,y\rangle\} + \|b\|^2\|y\|^2$$

Özel olarak, $a = \|y\|^2$ ve $b = \langle x,y\rangle$

Bu eşitlik $\forall\, a,b \in \mathbb{C}$ ve $\forall\, x,y \in V$ için doğru olduğundan

Bu eşitlik için de, doğru olacaktır.

$$= \|y\|^4\|x\|^2 - 2\|y\|^2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2\|y\|^2 > 0$$

$$= \|y\|^4\|x\|^2 - \|y\|^2|\langle x,y\rangle|^2\|y\|^2 > 0$$

$$= \|y\|^2\|x\|^2 > |\langle x,y\rangle|^2$$

$$= |\langle x,y\rangle| < \|x\|.\|y\|$$

2.Durum: x ve y doğrusal bağımlı olsunlar. O zaman $y = cx$ biçiminde yazılabilir.

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle x,cx\rangle| = |\bar{c}\langle x,x\rangle| = |\bar{c}|\,|\langle x,x\rangle|$$

$$\|x\|\,\|y\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle\langle cx,cx\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x,x\rangle c\bar{c}\langle x,x\rangle} \qquad z\bar{z} = |z|^2$$

$$= \sqrt{|c|^2(\langle x,x\rangle)^2} = |c|\,|\langle x,x\rangle| \Rightarrow |\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$$

3.Durum : Vektör uzayı gerçel ise $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle = \lambda^2\langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle = \|y\|^2 \geq 0$$

$$\|x\|^2\lambda^2 + 2\langle x,y\rangle\lambda + \|y\|^2 \qquad f(x) = ax^2+bx+c$$

$$\Delta \geq 0$$

Soru// $\mathbb{C}^n$ de standart iç çarpım tanımlandığı zaman

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}$ (Cauchy Eşitsizliği) yazılabilir.

Bu eşitsizlik $\mathbb{R}^n$ de

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ biçimindedir. Kanıtlayınız.

Çözüm// $\langle , \rangle \; \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(x,y) \longrightarrow |\langle x,y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\right| \leq \|x\|.\|y\|$$

$\|x\| \to \sqrt{\langle x,x\rangle} \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}}$, $\quad \|y\| \to \sqrt{\langle y,y\rangle} \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{y_i}}$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{y_i}}$$

Çözüm// $\langle , \rangle \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i y_i}$$

Teorem 3.4.3. Bir iç çarpım uzayında normun aşağıdaki özellikleri vardır.

1- $\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2- $\|cx\| = |c|.\|x\|$, $\forall x \in V$ ve $\forall c \in \mathbb{C}$ $\qquad \|.\| \; V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (Norm)

3- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

İspat// 1- $\sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\| \geq 0 \quad \langle x,x\rangle = 0, \; x=0$ //

2- $\|cx\| = \sqrt{\langle cx,cx\rangle} = \sqrt{c\overline{c}\langle x,x\rangle} = \sqrt{|c|^2\langle x,x\rangle} = |c|\,\|x\|$

3- Schwarz eşitsizliğinde $a=1$ $b=-1$ alalım.

$ax - by$

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2$

$= \|x\|^2 + 2\,\text{Reel}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$

$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Teorem 3.4.4. V bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in V$ elemanının sıfır olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall y \in V$ elemanı için $\langle x,y\rangle = 0$ olmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$ $x=0$ ise $\langle 0,y\rangle = \langle \underset{\text{skaler}}{0}\underset{\text{vektör}}{0}, y\rangle = 0\langle 0,y\rangle = 0$

$\Leftarrow$ $\forall y \in V$ için $\langle x,y\rangle = 0$ ise $x=y$ için de $\langle x,x\rangle = 0$ dır.

İç çarpımın 3. aksiyomundan $x=0$ dır.

TANIM 3.4.6

A bir küme olsun. $d: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$

d fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, d'ye A üzerinde bir metrik fonksiyon, A'ya da metrik uzay denir.

1- $\forall x,y \in A$ için $d(x,y) \geqslant 0$

2- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3- $\forall x,y \in A$ için $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri öz.)

4- $\forall x,y,z \in A$ için $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (Üçgen eşitsizliği)

Örnek// R^3 de x, Y gibi herhangi iki nokta arasındaki uzaklığı $d(x,y)$ ile gösterir ve $d(x,Y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}$ $x,Y \in R^3$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olarak tanımlanırsa d bir metrik fonksiyondur.

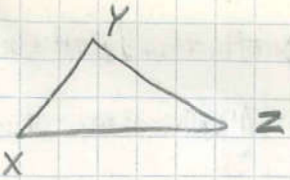
1- $d(x,Y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2} \geqslant 0$

2- $(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 = 0 \Rightarrow y_1 - x_1 = 0$ $y_2 - x_2 = 0$ $y_3 - x_3 = 0$

$\Rightarrow x = Y$

3- $d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2} = d(Y,x)$

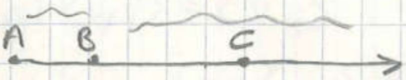
4- $d(X,Z)=\sqrt{(z_1-x_1)^2+(z_2-x_2)^2+(z_3-x_3)^2}=\overline{XZ}$



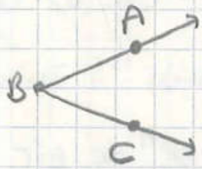
$d(X,Y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}=\overline{XY}$

$d(Y,Z)=\sqrt{(z_1-y_1)^2+(z_2-y_2)^2+(z_3-y_3)^2}=\overline{YZ}$

$\overline{XZ}\leq\overline{XY}+\overline{YZ}$ $\qquad d(X,Z)\leq d(X,Y)+d(Y,Z$



$\overline{AB}$ doğru parçası ile bütün C noktalarının birleşimine ışın denir.



Aynı doğru üzerinde bulunmayan iki ışının uç noktaları ortak (iki ışının) birleşimine açı denir.

Her $\widehat{ABC}$'na 0 ile 180 arasında bir açı karşılık gelir.

$m\widehat{ABC}=r \Rightarrow 0<r<180$

$\mathbb{R}^n$ deki metrik özellikler ;(uzunluk ve açıyla ilgili özelliklerdir.)

$\mathbb{R}^n$ deki bir u vektörünün uzunluğu (normu) : $\|u\|$

$\|c.u\|=|c|.\|u\|$

Teorem 3.4.5 $\mathbb{R}^2$ gerçel vektör uzayı için $\langle\,,\,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$(u,v)\longrightarrow\langle u,v\rangle=\|u\|.\|v\|\cos\theta$

biçiminde tanımlanırsa bu dönüşüm $\mathbb{R}^2$ de bir iç çarpımdır.

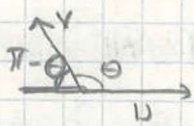
İspat// 1- $\langle u,v\rangle=\|u\|.\|v\|\cos\theta=\|v\|.\|u\|\cos\theta=\langle v,u\rangle$

2- $c>0$ ise $\langle cu,v\rangle=\|cu\|.\|v\|\cos\theta=|c|\,\|u\|.\|v\|\cos\theta=c.\|u\|.\|v\|\cos\theta=c\langle u,v\rangle$

$c<0$ ise $\langle cu,v\rangle=\|cu\|.\|v\|\cos(\pi-\theta)\qquad c<0\Rightarrow|c|=-c$

$=|c|\,\|u\|.\|v\|\cos(\pi-\theta)$

$=-c\,\|u\|.\|v\|(-\cos\theta)=c\,\|u\|\,\|v\|\cos\theta$



$\langle u_1+u_2,v\rangle=\|u_1+u_2\|\,\|v\|\cos\theta$

$\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{OA}$

$\overline{OA}=\|u_1\|\cos\theta_1$

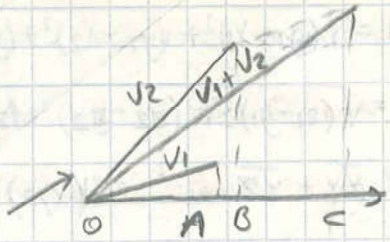
$\overline{OB}=\|u_2\|\cos\theta_2$

$\langle u_1+u_2, v\rangle = \|u_1+u_2\| \|v\| \cos\theta = \|u_1+u_2\| \cos\theta \|v\| = \overline{OC} \|v\|$

$= (\|u_1\| \cos\theta_1 + \|u_2\| \cos\theta_2) \|v\|$

$= \|u_1\| \|v\| \cos\theta_1 + \|u_2\|.\|v\| \cos\theta_2$

$= \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$



Benzer şekilde, $\langle u, v_1+v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$

3- $\langle u, u\rangle = \|u\| . \|u\| \cos 0 = \|u\|^2 > 0 \quad u \neq 0$

Genelleme: $\mathbb{R}^n$ gerçel vektör uzayı üzerinde

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ için

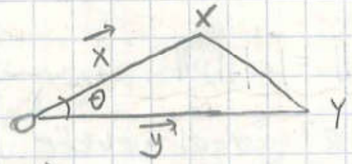
$\langle x, y\rangle = \|x\| . \|y\| \cos\theta$ biçiminde tanımlanırsa bu dönüşüm $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır.

$\mathbb{R}^n$, $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow \langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır. Gösteriniz.

ispat// $\|xy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos\theta$



$\|y-x\|^2 = \langle y-x, y-x\rangle$

$= \langle y, y\rangle + \langle y, -x\rangle + \langle -x, y\rangle + \langle -x, -x\rangle$

$= \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|x\|^2$

$-2\langle x, y\rangle = -2\langle x, y\rangle \cos\theta$

$\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta$

Alıştırmalar:

1 - V bir gerçel vektör uzayı olsun. $\forall\, x, y \in V$ ortogonal vektörler için,

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, $x \neq 0 \quad y \neq 0$ olduğunu gösteriniz.

2 - Bir V gerçel iç çarpım uzayında $\forall\, u, v \in V$ için,

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ olduğunu gösteriniz.

3 - Bir V gerçel vektör uzayında $\forall\, x, y \in V$ için

$\langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$ old. gösteriniz.

4 - Eğer X n boyutlu gerçel iç çarpım uzayının bir elemanı ise

$|x| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ old. göst?

boy $V = n$

$x \in V \Rightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

5- Bir V iç çarpım uzayında $\|X-Y\| \leq \|X\|+\|Y\|$ old. göst.?

6- Bir V iç çarpım uzayında $\forall X,Y \in V$ için

$$\|X-Y\| \geq \big|\|X\|-\|Y\|\big|$$ old. göst.?

7- Herhangi bir $u,v \in \mathbb{C}^n$ vektörleri ve herhangi $z \in \mathbb{C}$ skaleri için

a) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

b) $\langle zu,v\rangle = z\langle u,v\rangle$

c) $\langle u,zv\rangle = \bar{z}\langle u,v\rangle$ olduğunu gösterin.

8- $u,v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$2\langle u,v\rangle \leq \|u\|^2\|v\|^2$$ old. göst?

9- $u,v \in \mathbb{R}^n$ ve $\langle u,v\rangle \neq 0$ olmak üzere

$$W = u - \frac{\langle u,u\rangle}{\langle u,v\rangle}v$$ ise

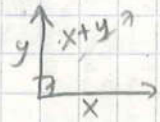
$\langle u,w\rangle = 0$ dır. $W=0 \iff v = c\cdot u$ dır $c \in \mathbb{R}$

10- $\vec{u} = AB$ $\vec{v} = AD$ olsun. ABCD paralelkenarının alanının

$$\sqrt{\langle \vec{u},\vec{u}\rangle \cdot \langle \vec{v},\vec{v}\rangle - \langle \vec{u},\vec{v}\rangle^2}$$ olduğunu gösterin.

Çözümler :

1- $$\langle X+Y, X+Y\rangle = \langle X,X\rangle + 2\langle X,Y\rangle + \langle Y,Y\rangle$$
$$= \|X\|^2 + 2\langle X,Y\rangle + \|Y\|^2$$
$$= \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\|\underbrace{\cos\theta}_{0} + \|Y\|^2$$
$$= \|X\|^2 + \|Y\|^2$$



2- $$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$$
$$+\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$$
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

3- $$\|u+v\|^2 - \|x\| - \|v\|^2 = 2\langle u,v\rangle$$
$$-\ \|u-v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = -2\langle u,v\rangle$$
$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle X,Y\rangle.$$

4- $$(|x_1|+|x_2|)^2 = |x_1|^2 + \overbrace{2|x_1||x_2|} + |x_2|^2$$
$$(|x_1|+|x_2|+|x_3|)^3 = |x_1|^3 + |x_2|^3 + |x_3|^3 +$$
$$|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq (|x_1|+|x_2|)^2$$
$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 \leq (|x_1|+|x_2|+|x_3|)^2$$
$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq (|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|)^2$$

$$\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$
$$|x_i|^2 = (x_i)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\Rightarrow \sqrt{\langle X,X\rangle} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$
$$\downarrow$$
$$\|X\|$$

5- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ y yerine $-y$ yazılırsa

$\|x-y\| \leq \|x\| + \|-y\|$

$\|-y\| = \sqrt{\langle -y,-y\rangle} = \sqrt{(-1)(-1)\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle y,y\rangle} = \|y\|$

$\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$ yazılabilir.

6- $\|x-y\| \overset{?}{\geq} \big|\|x\| - \|y\|\big|$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle -y,-y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \langle x,-y\rangle + \overline{\langle x,-y\rangle} + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + 2\,\text{Reel}\langle x,-y\rangle + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 - 2\,\text{Reel}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\geq \|x\|^2 - 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$\|x-y\|^2 \geq (\|x\| - \|y\|)^2$

$\big|\|x-y\|\big| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$

$\|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$

8- $(\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0 \Rightarrow \|u\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \geq 0$

9- $w = u - \dfrac{\langle u,u\rangle}{\langle u,v\rangle} v$ ise $\langle u,w\rangle = \left\langle u, u - \dfrac{\langle u,u\rangle v}{\langle u,v\rangle}\right\rangle$

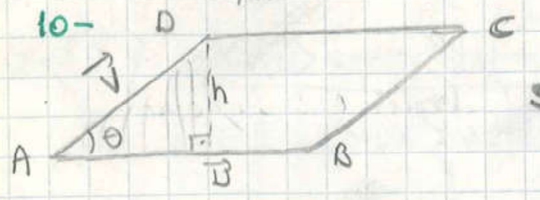
$$= \langle u,u\rangle + \left\langle u, -\frac{\langle u,u\rangle v}{\langle u,v\rangle}\right\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle - \langle u,u\rangle = 0$$

$w = 0 \Rightarrow u - \dfrac{\langle u,u\rangle}{\langle u,v\rangle} v = 0$

$\dfrac{\langle u,u\rangle}{\langle u,v\rangle} v = u$ $v = u \Rightarrow 0 = u - \dfrac{\langle u,u\rangle}{\langle u,cu\rangle} cu$

10-



$S = \|u\|.h$ $\sin\theta = \dfrac{h}{\|v\|}$ $S = \|u\|\,\|v\|\sin\theta$

$S^2 = \|v\|^2\|u\|^2(1-\cos^2\theta)$

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{AD}$

$S^2 = \|v\|^2\|u\|^2 - (\|v\|.\|u\|\cos\theta)^2$

$S^2 = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - (\langle u,v\rangle)^2$

$S = \sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2}$

//

– 4. BÖLÜM –

Koordinat Çatıları ve Koordinat Sistemleri :

3 boyutlu uzayda en çok kullanılan koordinat sistemleri ;

a- Afin koordinat sistemi (eğik koordinat sistemi)

b- Öklid " " (ortonormal)

c- Silindirik " " (ortonormal)

d- Küresel " " (")

e- Toroidal " " dir. (")

$X_0 = \frac{X}{\|X\|}$ X vektörünün normlandırılmışıdır. (normlandırılmış hali)

Bir vektör uzayının r sayıda vektörlerden oluşan bir vektör sisteminin bütün vektörleri normlandırılmış ve ikişer ikişer ortogonal (dik) iseler, sisteme ortogonal ve normlandırılmış ya da kısaca ortonormal denir. (Bir vektör normlandırılmış ise uzunluğu 1 br'dir.)

AFİN UZAY VE AFİN ÇATI

TANIM 4.1.1 $A \neq \emptyset$ bir küme ve V'de IR cisminde bir vektör uzayı olsun.

Eğer bir ψ dönüşümü $\psi : A \times A \to V$
$(P,Q) \to \psi(P,Q) = \overrightarrow{PQ} \in V$ biçiminde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa A kümesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay denir.

i) $\forall P,Q,R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \vec{\alpha}$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $Q \in A$ noktası vardı

(Bu aksiyomlara Herman Weyl aksiyomları denir.)

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P ye başlangıç, Q ya uç noktası denir. Öte yandan A'nın boyutuna boy A = boy V olarak tanımlanır.

$Q \in A \xrightarrow{\text{bire-bir}} \overrightarrow{PQ} \in V$

Örnek // IR^3 cismi üzerinde 3 boyutlu vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$V = IR^3$ alalım. Bu durumda $A \times A \to V$ dönüşümü $\forall P = \alpha \in V$

$\forall Q = \beta \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \beta - \alpha$ biçiminde tanımlanırsa IR^3e 3 boyutlu standart afin uzay denir.

$\forall P = \alpha$ ve $\forall Q = \beta$ $\quad P, Q \in \mathbb{R}^2$

$\overrightarrow{PQ} = \beta - \alpha \quad A = \mathbb{R}^3$ (nokta kümesi) $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay olur.

Bu örnekte belirtilen $A = \mathbb{R}^3$ afin uzayına 3 boyutlu afin uzay denir.

Teorem 4.1.1. Bir V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay A olsun.

i- $\forall P \in A$, $\overrightarrow{PP} = \vec{0} \in V$

ii- $\forall P, Q \in A$ için, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

iii- $\forall P, Q, P', Q' \in A$ için $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

İspat// i- $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$

$\overrightarrow{PP} - \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} - \overrightarrow{PP}$

$0 = \overrightarrow{PP}$

ii- $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \qquad R = Q$

$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \qquad R = P$

$0 = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$

$0 - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QP}$

$-\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ}$ //

iii- P, P', Q' noktaları için $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ'}$

P, Q, Q' " " $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'}$

$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$

$\Rightarrow -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{PQ}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

TANIM 4.1.2.

3 boyutlu V gerçel vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için

$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \in V$

vektörleri V nin bir bazı (tabanı) ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne A afin uzayının bir <u>afin çatısı</u> denir.

Teorem 4.1.2. Üç boyutlu vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay A olsun. A'da belli bir P_0 noktası seçildiğinde başlangıcı P_0 olan bir afin çatı vardır.

İspat// V vektör uzayının bir tabanı $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun.

$\overrightarrow{P_0P_i} = \alpha_i$ olacak şekilde bir ve yalnız bir P_i noktası vardır. $\alpha_i \in V$, $P_0 \in A$

$i=1$ için $\overrightarrow{P_0P_1} = \alpha_1$
$i=2$ " $P_0P_2 = \alpha_2$
$i=3$ " $P_0P_3 = \alpha_3$

$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \in V$ $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ noktaları A'nın bir çatısıdır.

4.2. AFİN KOORDİNAT SİSTEMİ

3 boyutlu vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. A'daki afin çatı da $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ olsun. Bu afin çatının afin koordinat sistemi denen sistemi nasıl oluşturduğunu görelim.

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ sistemi V nin bir tabanıdır. $\forall P \in A$ için tek türlü olarak $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$ yazılabilir.

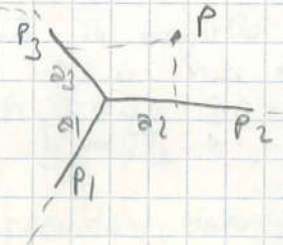
$X_i : A \to \mathbb{R}$
$P \to X_i(P) = a_i$ biçiminde tanımlayalım. Böylece $P \in A$ noktasına $\mathbb{R}^3$ standart afin uzayının $(X_1(P), X_2(P), X_3(P))$ elemanını karşılık tutmuş oluruz. Bu sıralı üçlüye P noktasının afin koordinatları denir.

Tersine a_1, a_2, a_3 gibi üç tane reel sayı verildiğinde bunlardan oluşturulan sıralı afin koordinatları (a_1, a_2, a_3) olan A'da bir ve yalnız bir nokta vardır.

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{P_0P_i} \in V$$

Böylece $X_i : A \to \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq 3$

fonksiyonlarının bir $\{X_1, X_2, X_3\}$ sistemini elde etmiş oluyoruz. Bu sistem yardımıyla $A \xrightarrow{\text{birebir}} \mathbb{R}^3$ dönüşümü elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlar sistemine A afin uzayında afin koordinat sistemi denir.

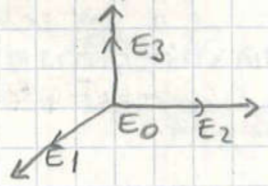


Örnek 4.2.1. 3 boyutlu afin uzayın afin çatılarından biri $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ olsun.

$P_0(0,0,0)$ $\quad P_0 \to$ başlangıç noktası.
$P_1(1,0,0)$
$P_2(0,1,0)$ $\}$ bu çatının oluşturduğu koordinat sistemi
$P_3(0,0,1)$

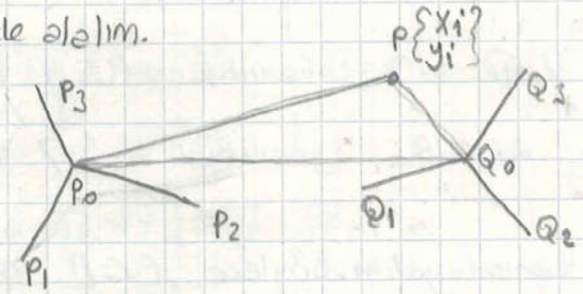
Örnek 4.2.2. Üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ standart afin uzayında

$E_0 = (0,0,0)$
$E_1 = (1,0,0)$
$E_2 = (0,1,0)$
$E_3 = (0,0,1)$ noktalarının oluşturduğu $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ çatısına <u>standart afin çatı</u> ve bu afin çatının oluşturduğu koordinat sistemine de <u>standart afin koordinat sistemi</u> denir.



4.3. AFİN KOORDİNAT SİSTEMLERİNİN DEĞİŞİMİ

3 boyutlu A afin uzayının farklı iki tane afin çatısı Q_i ve P_j, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ çatılarını ele alalım.



$\{Q_i\} = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ $\quad \{P_j\} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$

P_0 noktasının $\{Q_i\}$ çatısına göre koordinatları a_i olsun.

$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{Q_0Q_i}$ $\quad \overrightarrow{P_0P_i}$ nün $\{Q_i\}$ çatısına göre koordinatları a_{ij} olsun.

$$\overrightarrow{P_0P_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \overrightarrow{Q_0Q_i}$$

$P \in A$ noktasının Q_i çatısına göre koordinatları y_i

P noktasının P_j 〃 〃 〃 X_j olsun.

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j\, Q_0Q$$

$$P_0P = \sum_{j=1}^{3} X_j \overrightarrow{P_0P_j} = \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} (a_{ij} X_j) \Big) \overrightarrow{Q_0Q_i}$$

$y_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} X_j + a_i \quad y_1 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} X_j + a_1 \quad y_2 = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} X_j + a_2 \quad y_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} X_j + a_3$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1 \quad --- \; 4.3.1$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad --- \; 4.3.2$$

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad --- \; 4.3.3$$

$$y = AX + C \implies X = A^{-1}Y - A^{-1}C$$

$\{P_j\}$ $\{Q_i\}$ A daki farklı iki çatıdır.

$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1} a_i \overrightarrow{Q_0Q_i}$ ve $\overrightarrow{P_0P_j} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \overrightarrow{Q_0Q_i}$ bu iki çatı bu şekilde bağlantılı ise bu çatıların belirlediği afin koordinat sistemleri olan X_j ve y_i koordinat sistemleri de,

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P_0 = Q_0$ ise $Y = AX$ $\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \implies X = A^{-1}Y$

(Aşağıdaki 2 sorunun aynısıdır.)

$\overrightarrow{P_0P_i} = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ $P_0 \neq Q_0$ $Y = X + C$

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad X = Y - C \quad C = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Soru // 1 A bir afin uzay ve $\{P_j\}$ ile $\{Q_i\}$ A 'da iki afin çatı olsun. $P_0 = Q_0$ ise bu iki çatının belirlediği afin koordinat sistemleri $\{X_j\}$ ve $\{Y_i\}$ ise bu afin koordinat sistemleri arasındaki bağıntıyı yazın.

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

matris formunda yazılırsa C sıfır olur.

$Y = AX + C$ $\quad X = A^{-1}Y$

Soru // 2 A bir afin uzay ve $\{P_j\}$ ile $\{Q_i\}$ A da iki afin çatı olsun.

$P_0 \neq Q_0$ olmak üzere eğer $\overrightarrow{P_0P_j} = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ ise bu afin çatılara karşılık gelen koordinat sistemleri arasındaki bağıntıyı matris formunda yazınız.

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y = X + C \quad X = Y - C$$

Soru // 3 İki boyutlu gerçel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzayı A olsun.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2 \\ y_2 &= 4x_2 - 7 \end{aligned}\right\}$$ dönüşümü veriliyor. A 'daki iki afin koordinat sistemleri arasındaki bağıntıyı matris biçiminde gösteriniz.

$y_1 = 3x_1 + 0x_2 + 2$

$y_2 = 0x_1 + 4x_2 - 7$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & +1/4 \end{bmatrix} \qquad BA = I_2$$

$$x_1 = \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{4} y_2 + \frac{7}{4} \qquad b = -A^{-1}C = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 7/4 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.3.1. $\mathbb{R}^3$ standart afin uzayında bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta sisteminin bir afin çatı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$P_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq i \leq 3 \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ olmasıdır.}$$

İspat// $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$

$$\begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{vmatrix} p_{11}-p_{10} & p_{12}-p_{10} & p_{13}-p_{10} \\ p_{21}-p_{20} & p_{22}-p_{20} & p_{23}-p_{20} \\ p_{31}-p_{30} & p_{32}-p_{30} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12}-p_{10} & p_{13}-p_{10} \\ p_{21} & p_{22}-p_{20} & p_{23}-p_{20} \\ p_{31} & p_{32}-p_{30} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -p_{10} & p_{12}-p_{10} & p_{13}-p_{10} \\ -p_{20} & p_{22}-p_{20} & p_{23}-p_{20} \\ -p_{30} & p_{32}-p_{30} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13}-p_{10} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23}-p_{20} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11}-p_{10} & p_{13}-p_{10} \\ p_{21}-p_{20} & p_{23}-p_{20} \\ p_{31}-p_{30} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -p_{10} & p_{12} & p_{13}-p_{10} \\ -p_{20} & p_{22} & p_{23}-p_{20} \\ -p_{30} & p_{32} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -p_{10} & -p_{10} & p_{13}-p_{10} \\ -p_{20} & -p_{20} & p_{23}-p_{20} \\ -p_{30} & -p_{30} & p_{33}-p_{30} \end{vmatrix}}$$

$$= \underset{(1)}{\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12}-p_{10} \\ p_{12} & p_{22}-p_{20} \\ p_{13} & p_{32}-p_{30} \end{vmatrix}} + \overset{0}{\underset{(3)}{\begin{vmatrix} p_{11}-p_{0} & p_{13} \\ p_{21}-p_{20} & p_{23} \\ p_{31}-p_{30} & p_{33} \end{vmatrix}}} + \overset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} p_{11}-p_{10} & -p_{10} \\ p_{21}-p_{20} & -p_{20} \\ p_{31}-p_{30} & -p_{30} \end{vmatrix}}} + \overset{(2)}{\begin{vmatrix} -p_{10} & p_{12} & p_{13} \\ -p_{20} & p_{22} & p_{23} \\ -p_{30} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}}$$

$$+ \underset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} -p_{10} & p_{12}-p_{10} \\ -p_{10} & p_{22}-p_{20} \\ -p_{30} & p_{32}-p_{30} \end{vmatrix}}}$$

$$= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{10} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{10} & p_{11} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Alıştırmalar :

1- $P_1, P_2, \dots, P_k$ bir afin uzayının herhangi noktaları iseler
$\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\dots+\overrightarrow{P_{k-1}P_k}=0$ olduğunu gösteriniz.

2- $\mathbb{R}^3$ standart gerçel afin uzayında aşağıdaki nokta kümelerinin birer afin çatı olup olmadıklarını araştırınız ?

a) $P_0=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $P_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

b) $P_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$ $P_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$ $P_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}$ $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ nokta sistemleri bir afin çatı oluştururlar mı ?

3- $\mathbb{C}^2$ standart karmaşık afin uzayında

$P_0=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ $P_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $P_2=\begin{bmatrix}1+i\\1\end{bmatrix}$ noktalarının afin çatı oluşturup

oluşturmadıklarını araştırınız.

Çözüm 1// P, Q, R için $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$ idi. $P_1, P_2, \dots P_k$ noktaları için

$$\overrightarrow{P_1P_k}=\overrightarrow{P_1P_2}+\cancel{\overrightarrow{P_2P_k}}$$
$$\cancel{\overrightarrow{P_2P_k}}=\overrightarrow{P_2P_3}+\cancel{\overrightarrow{P_3P_k}}$$
$$\cancel{\overrightarrow{P_3P_k}}=\overrightarrow{P_3P_4}+\overrightarrow{P_4P_k}$$
$$\vdots$$
$$+\ \cancel{\overrightarrow{P_{k-2}P_k}}=\overrightarrow{P_{k-2}P_{k-1}}+\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$$

$$\overrightarrow{P_1P_k}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\dots+\overrightarrow{P_{k-1}P_k}-\overrightarrow{P_1P_k}=0$$

2// $\begin{vmatrix}P_0 & P_1 & P_2 & P_3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$

a) $\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

b) $\begin{vmatrix}-1&0&0&1\\0&1&0&0\\2&-2&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&-3\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&1&-3\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$

3// $\begin{vmatrix}1&0&1+i\\i&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1+i\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=(i+1)\begin{vmatrix}i&1\\1&1\end{vmatrix}=(1+i)(1-i)=-2\neq 0$

4.4. ÖKLİD UZAYI, ÖKLİD ÇATISI VE ÖKLİD KOORDİNAT SİSTEMİ

TANIM 4.4.1.

3 boyutlu gerçel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen A afin uzayına 3 boyutlu öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir.

Bazı kitaplar öklid uzayını ; "her gerçel iç çarpım uzayına öklid uzayı, her karmaşık iç çarpım uzayına da bir üniter uzay denir" şeklinde tanımlar.

TANIM 4.4.2

E^3, 3 boyutlu öklid uzayında bir nokta X olsun. E^3 de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatı (x_1, x_2, x_3) olsun.

$$\begin{aligned} x_i : E^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow x_i(P) = x_i \end{aligned}$$

bileşenlerine E^3 ün i. koordinat fonksiyonu denir.

$\mathbb{R}^3$ standart gerçel afin uzayı olmak üzere $\mathbb{R}^3$ de bir

$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow \langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\forall x,y \in \mathbb{R}^3 \\ &X = (x_1, x_2, x_3) \\ &Y = (y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de standart iç çarpım ya da öklid iç çarpımı denir. İşte bu standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^3$ afin uzayına 3 boyutlu standart öklid uzayı denir. Ve E^3 ile gösterilir.

$\mathbb{R}$ vektör uzayında iç çarpım

$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow \langle X,Y\rangle = X \cdot y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlandığı için $\mathbb{R}^1$ afin uzayı 1-boyutlu öklid uzayı olur ve E ile gösterilir. Bu uzaya öklid doğrusu da denir.

Gerçel düzlem, 2-boyutlu gerçel standart vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^2$ afin uzayıdır. Bu vektör uzayında öklid iç çarpımı da

$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow \langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &X = (x_1, x_2) \\ &Y = (y_1, y_2) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlandığından $\mathbb{R}^2$ afin uzayı 2-boyutlu öklid uzayı olur ve E^2 ile gösterilen bu uzaya öklid düzlemi de denir.

3-boyutlu standart gerçel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında öklid iç çarpımını

$$\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \longrightarrow \langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \qquad X=(x_1,x_2,x_3),\ Y=(y_1,y_2,y_3)$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, 3 boyutlu öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir.

TANIM 4.4.3

3 boyutlu gerçel iç çarpım uzayı V ile birleşen öklid uzayı E^3 olsun. Bir

$$d : E^3 \times E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall\, x,y \in E^3$ için V'deki norm $\|\,,\|$ olmak üzere

$$\boxed{d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \|Y-X\|}$$

biçiminde tanımlanır. Ve E^3 deki X ile Y arasındaki uzaklık adını alır.

Soru// E^3 3-boyutlu öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir. Kanıtlayınız.

Çözüm// 1- $d(X,Y) \geq 0$, $d(X,Y)=0 \iff X=Y$ $\qquad \alpha = 0 \Rightarrow \overrightarrow{XY} = 0$

2- $d(X,Y) = d(Y,X)$

3- $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ olduğunu göstermek gerekir.

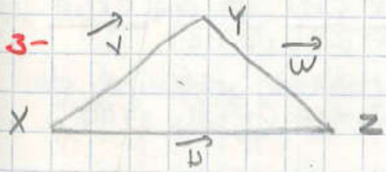
1- $d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\langle XY, XY\rangle} \geq 0$

$d(X,Y) = 0 \iff X = Y$

2- $d(X,Y) = \|XY\|$ $\qquad \overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$

$$\|\overrightarrow{XY}\| = \|-\overrightarrow{YX}\| = \|\overrightarrow{YX}\|$$
$$d(X,Y) = d(Y,X)$$

3-



$$\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} \qquad \|\underbrace{\overrightarrow{XZ}}_{U}\| = \|\underbrace{\overrightarrow{XY}}_{V} + \underbrace{\overrightarrow{YZ}}_{W}\| \leq \|\underbrace{XY}_{V}\| + \|\underbrace{YZ}_{W}\|$$

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

$$\|V+W\| \leq \|V\| + \|W\|$$

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$$

TANIM 4.4.4

E^3 3-boyutlu öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna öklid metriği denir.

TANIM 4.4.5

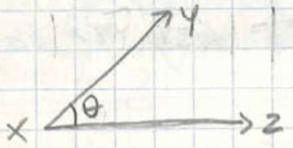
E^3 3-boyutlu öklid uzayında X, Y, Z gibi farklı üç nokta seçelim.

$\overrightarrow{XY}$ ile $\overrightarrow{XZ}$ arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\| \overrightarrow{XY} \| . \| \overrightarrow{XZ} \|}}$$ biçiminde tanımlanır.

Burada $\forall \theta \in \mathbb{R}$ açısı için $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ olduğu için

$$|\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle| = \left| \|\overrightarrow{XY}\| . \|\overrightarrow{XZ}\| \cos\theta \right|$$

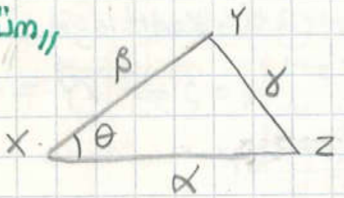


$X \neq Y = Z$ için $\theta = 0$ dır.

Soru// E^2 2-boyutlu öklid uzayında farklı üç nokta X, Y, Z olsun. $\overrightarrow{XY}$ ile $\overrightarrow{XZ}$ arasındaki açı θ olduğuna göre

$(d(Y,Z))^2 = (d(X,Y))^2 + (d(X,Z))^2 - 2d(X,Y).d(X,Z)\cos\theta$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm//



$\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \qquad \vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad (\vec{\alpha} = \overrightarrow{XZ}, \vec{\beta} = \overrightarrow{XY}, \vec{\gamma} = \overrightarrow{YZ})$

$$\|\vec{\gamma}\|^2 = \langle \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta} \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \overset{\beta}{XY}, \overset{\alpha}{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|XZ\|}$$

$$= \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle - 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \|\vec{\alpha}\| . \|\vec{\beta}\| \cos\theta$$

$$= \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 - 2\|\vec{\alpha}\| . \|\vec{\beta}\| \cos\theta$$

$$(d(Y,Z))^2 = (d(X,Z))^2 + (d(X,Y))^2 - 2\, d(X,Z)\, d(X,Y) \cos\theta \; //$$

TANIM 4.4.6

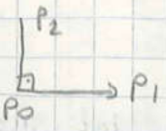
3-boyutlu gerçel iç-çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^3 öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsü için eğer $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör sistemi V nin ortonormal tabanı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ çatısına dik çatı ya da öklid çatısı denir. Böyle bir çatıda tanımlanan $\{x_1, x_2, x_3\}$ afin koordinat sistemine de dik (veya öklid) koordinat sistemi denir. Bu sistemdeki

$x_i : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonlarına da öklid koordinat fonksiyonları denir.

Örnek 4.4.1. 3-boyutlu standart öklid uzayı E^3 de $E = (0,0,0)$ $E_1 = (1,0,0)$ $E_2 = (0,1,0)$ $E_3 = (0,0,1)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar. Demek ki standart afin koordinat sistemi bir dik koordinat sistemidir.

Örnek 4.4.2. E^2 2-boyutlu standart öklid uzayında $P_0=(a_1,a_2)$, $P_1=(a_1+\cos\theta, a_2+\sin\theta)$ $P_2=(a_1-\sin\theta, a_2+\cos\theta)$ noktaları $a_1,a_2,\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere bir dik çatı oluştururlar.

Gerçekten $\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j}\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i\neq j \text{ ise}\end{cases}$



$P_0P_1=(\cos\theta,\sin\theta)$ (uç − başlangıç)

$P_0P_2=(-\sin\theta,\cos\theta)$

$\langle P_0P_1, P_0P_1\rangle = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$

$\langle P_0P_2, P_0P_2\rangle = \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$i\neq j$ için $\langle P_0P_1, P_0P_2\rangle = -\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=0$

$\langle P_0P_i, P_0P_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i\neq j \text{ ise}\end{cases}$

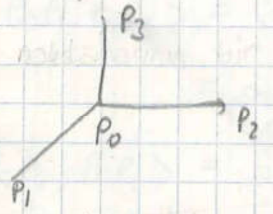
Örnek 4.4.3.

E^3 de genel olarak dik çatı $P_0=(a,b,c)$

$P_1=(a+\cos\theta_2\cos\theta_3,\ b+\cos\theta_1\sin\theta_3+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\ c+\sin\theta_1\sin\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3)$

$P_2=(a-\cos\theta_2\sin\theta_3,\ b+\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3,\ c+\sin\theta_1\cos\theta_3 + b+\cos\theta_1\cos\theta_3 -$
$- \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)$

$P_3=(a+\sin\theta_2,\ b-\sin\theta_1\cos\theta_2,\ c+\cos\theta_1\cos\theta_2)$ noktalarından oluşur.



$\langle P_0P_i, P_0P_j\rangle = \delta_{ij}$

$\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \|\overrightarrow{P_0P_2}\| = \|\overrightarrow{P_0P_3}\| = 1$

NOT: (iki vektör birbirine dikse skaler çarpımları sıfırdır.)

$\langle P_0P_2, P_0P_3\rangle = 0$

$P_0P_2 = (-\cos\theta_2\sin\theta_3,\ \cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3,\ \sin\theta_1\cos\theta_3+\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)$

$P_0P_3 = (\sin\theta_2, -\sin\theta_1\cos\theta_2, \cos\theta_1\cos\theta_2)$

$\langle P_0P_2, P_0P_3\rangle = -\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_3 - \sin\theta_1\cancel{\cos\theta_1}\cos\theta_2\cos\theta_3 + \sin^2\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_2$
$+ \sin\theta_1\cos\theta_1\cancel{\cos\theta_2}\cos\theta_3 + \cos^2\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_2 = 0$

$\|P_0P_3\| = \sqrt{\langle P_0P_3, P_0P_3\rangle} = \sqrt{\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2} = \sqrt{1}=1$

$P_0P_1 \perp P_0P_3 \quad P_0P_1\perp P_0P_2 \quad \|P_0P_1\|=1 \quad \|P_0P_2\|=1 \quad \|P_0P_3\|=1$

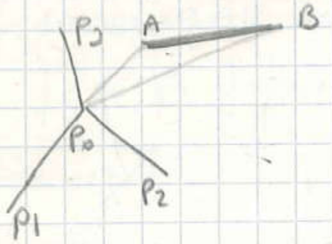
Teorem 4.4.1. E^3 öklid uzayında bir $\{x_1,x_2,x_3\}$ afin koordinat sisteminin bir dik koordinat sistemi olması için gerekli ve yeterli koşul $A,B\in E^3$ noktalarının koordinat sistemine göre koordinatları, $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere

A ile B noktaları arasındaki uzaklığın,

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i)^2}} \quad \text{-- -- --} \quad (4,4,1)$$

olmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$: $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemi, dik koordinat sistemi ise E^3 de bu koordinat sistemini oluşturan bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ dik çatısı vardır.



$$\vec{AB} = \vec{P_0B} - \vec{P_0A}$$

$$\vec{P_0B} = b_1 \vec{P_0P_1} + b_2 \vec{P_0P_2} + b_3 \vec{P_0P_3}$$

$$\vec{P_0A} = a_1 \vec{P_0P_1} + a_2 \vec{P_0P_2} + a_3 \vec{P_0P_3}$$

$$\Rightarrow: \vec{AB} = \vec{P_0B} - \vec{P_0A} = (b_1-a_1)\vec{P_0P_1} + (b_2-a_2)\vec{P_0P_2} + (b_3-a_3)\vec{P_0P_3}$$

$$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle AB, AB\rangle} = \sqrt{\langle (b_1-a_1)P_0P_1 + (b_2-a_2)P_0P_2 + (b_3-a_3)P_0P_3, (b_1-a_1)P_0P_1 + (b_2-a_2)P_0P_2 + (b_3-a_3)P_0P_3 \rangle}$$

$$\langle P_0P_i, P_0P_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$= \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i)^2} \qquad \{x_1, x_2, x_3\}$$

$\Leftarrow$: $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ çatısına göre,

$$\vec{AB} = (b_1-a_1)\vec{P_0P_1} + (b_2-a_2)\vec{P_0P_2} + (b_3-a_3)\vec{P_0P_3}$$

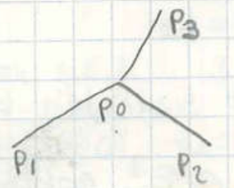
$$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle AB, AB\rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^{3}(b_i-a_i)P_0P_i, \sum_{j=1}^{3}(b_j-a_j)P_0P_j \right\rangle}$$

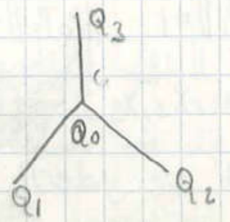
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (b_i-a_i)(b_j-a_j)\langle P_0P_i, P_0P_j\rangle} \qquad \langle P_0P_i, P_0P_j\rangle = g_{ij} \geq 0$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (b_i-a_i)(b_j-a_j)\, g_{ij}} \qquad g_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\langle P_0P_1, P_0P_2\rangle = 0 \quad \langle P_0P_1, P_0P_3\rangle = 0 \quad \langle P_0P_2, P_0P_3\rangle = 0$$

Soru// $\{y_1, y_2, y_3\}$ ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemleri ortogonal ise V'deki tabanlar arasındaki dönüşüme karşılık gelen matris ortogonaldir. kanıtlayınız?





$$\vec{P_0P_j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, Q_0Q_i$$

$$\vec{P_0Q_0} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, Q_0Q_i$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

$$\langle \overrightarrow{Q_0Q_i}, \overrightarrow{Q_0Q_j} \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \overrightarrow{Q_0Q_i} \qquad \overrightarrow{P_0P_2} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} \overrightarrow{Q_0Q_j} \qquad P_0P_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} \overrightarrow{Q_0Q_j}$$

$$= a_{11}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{12}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{13}\overrightarrow{Q_0Q_3} \qquad = a_{31}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{32}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{33}\overrightarrow{Q_0Q_3}$$

$$= a_{21}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{22}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{32}\overrightarrow{Q_0Q_3}$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1} \rangle = \langle a_{11}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{12}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{13}\overrightarrow{Q_0Q_3}, a_{11}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{12}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{13}\overrightarrow{Q_0Q_3} \rangle$$
$$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = \langle a_{11}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{12}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{13}\overrightarrow{Q_0Q_3}, a_{21}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{22}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{23}\overrightarrow{Q_0Q_3} \rangle$$
$$= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = \langle a_{11}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{12}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{13}\overrightarrow{Q_0Q_3}, a_{31}\overrightarrow{Q_0Q_1} + a_{32}\overrightarrow{Q_0Q_2} + a_{33}\overrightarrow{Q_0Q_3} \rangle$$
$$= a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \qquad \langle \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_1} \rangle = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} = 0$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

$$\langle \overrightarrow{P_0P_3}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A.A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.A^T = A^T.A = I_n$$

Alıştırmalar :

1- 2-boyutlu standart öklid uzayında $\{P_0=(1,1), P_1=(2,2), P_2=(-3,5)\}$ afin çatısı veriliyor. Bu çatıyla belirtilen afin koordinat sistemine göre iki nokta arasındaki uzaklık formülünü bulunuz.

2- $\mathbb{R}^2$ vektör uzayında $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\alpha=(a_1,a_2)$ $\beta=(b_1,b_2)$ için $\langle\alpha,\beta\rangle = 2a_1 b_1 + a_2 b_2$ iç çarpımı tanımlanıyor. $\mathbb{R}^2$ iç çarpım uzayıyla birleşen E^2 (iki boyutlu standart öklid uzayı) veriliyor.

a) E^2 de $P_0=(0,0)$, $P_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $P_2=(0,1)$ noktalarının bir dik çatı oluşturduğunu gösteriniz.

b) Bir $X=(x_1,x_2)\in E^2$ noktasının P_0 noktasından 1 br uzaklıkta olması için gerekli ve yeterli koşul, $2x_1^2+x_2^2=1$ olmasıdır. Gösteriniz. Bu ifadenin E^2 deki standart koordinat sistemine göre bir merkezil çember denklemi olduğunu gösteriniz. Ayrıca P_1 merkezli ve yarıçapı 1 br olan çember denklemi nedir. Merkezi P_2 ve yarıçapı 1 br olan çember denklemini bulunuz.

3- 3-boyutlu standart afin uzayı $\mathbb{R}^3$ de uzaklık fonksiyonu, $A,B\in\mathbb{R}^3$ $A=(a_1,a_2,a_3)$ $B=(b_1,b_2,b_3)$ noktaları için, $d'(A,B)=\max\{|b_i-a_i|\}$ olarak tanımlanıyor. d' nün $\mathbb{R}^3$ de bir metrik olduğunu gösteriniz. $\mathbb{R}^3$ üzerindeki herhangi bir öklid uzayı yapısının bir öklid metriği olup olmadığını araştırınız.

Çözümler :

1- $P_0P_1=(1,1)$ $P_0P_2=(-4,4)$ $\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\rangle = 1.(-4)+1.4 = -4+4=0$ (diktirler)

$A,B\in E^2$, $A=(a_1,a_2)$ $B=(b_1,b_2)$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1-a_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (b_2-a_2)\overrightarrow{P_0P_2}$$

$$d(A,B) = \|AB\| = \sqrt{\langle AB, AB\rangle}$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle = \langle (b_1-a_1)P_0P_1 + (b_2-a_2)P_0P_2 \,,\, (b_1-a_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (b_2-a_2)\overrightarrow{P_0P_2}\rangle$$

$$= (b_1-a_1)^2 \overrightarrow{P_0P_1}^2 + (b_2-a_2)^2 \overrightarrow{P_0P_2}^2$$

$\langle P_0P_2, P_0P_2\rangle = (-4)^2+(4)^2 = 32.$ $\langle P_0P_1, P_0P_1\rangle = 1^2+1^2=2$

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 P_0P_1^2 + (b_2-a_2)^2 P_0P_2^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 2 + (b_2-a_2)^2 32} \quad //$$

2- a) $P_0P_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$ $\quad P_0P_2 = (0,1)$ $\quad \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i\neq j \text{ ise} \end{cases}$ dik çatıdır.

$\langle \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2} \rangle = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + 0.1 = 0+0=0$

$\|\vec{P_0P_1}\| \overset{?}{=} 1 \quad \|\vec{P_0P_2}\| = 1$

$d(P_0,P_1) = \sqrt{\langle P_0P_1, P_0P_1 \rangle} = \sqrt{2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$

$d(P_0,P_2) = \sqrt{\langle P_0P_2, P_0P_2 \rangle} = \sqrt{2.0.0 + 1.1} = 1$

b) $d(P_0,X) = \|\vec{P_0X}\| = \sqrt{\langle \vec{P_0X}, \vec{P_0X} \rangle} =$

$P_0X = (x_1, x_2)$

$\Rightarrow$: iki nokta arası uzaklık 1br $\Rightarrow d(P_0,X)=1$ old. gösterelim.

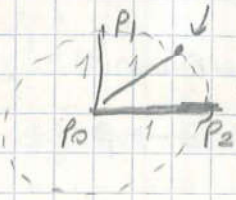
$\Rightarrow \|\vec{P_0X}\| = \sqrt{2x_1.x_1 + x_2x_2} = 1$

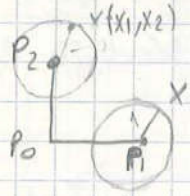
$\Rightarrow \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x_1^2 + x_2^2 = 1$

$\Leftarrow$: $2x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x_1.x_1 + x_2x_2} = 1$ $\quad X = (x_1, x_2)$

$\Rightarrow \sqrt{\langle \vec{P_0X}, \vec{P_0X} \rangle} = 1$

$\Rightarrow \|\vec{P_0X}\| = d(P_0, X)$





$X(x_1,x_2) \quad P_1X = (x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 - 0)$

$P_1X = (x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2)$

$d(P_1,X) = 1 \quad d(P_1,X) = \|\vec{P_1X}\| = \sqrt{\langle \vec{P_1X}, \vec{P_1X} \rangle} = 1$

$= \sqrt{2(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + x_2^2} = 1$

$= 2(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + x_2^2 = 1$ $\quad$ P_1 merkezli ve $r=1$ olan çember denklemi.

$d(P_2,X) = \|\vec{P_2X}\| = \sqrt{\langle \vec{P_2X}, \vec{P_2X} \rangle} = 1$

$P_2X = (x_1, x_2 - 1)$

$d(P_2, X) = \sqrt{2x_1^2 + (x_2-1)^2} = 1$

$\Rightarrow 2x_1^2 + (x_2-1)^2 = 1 \longrightarrow$ P_2 merkezli ve $r=1$ olan çember denklemidir.

3- $A = (2,9,5) \quad B = (4,2,11)$

1° $d'(A,B) \geq 0$

$d'(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

$d'(A,B) = \max\{|b_i - a_i|\}$

$\max\{|b_i - a_i|\} = 0 \Leftrightarrow b_i = a_i$

$2°$ $d'(A,B) = \max\{|b_i - a_i|\} = \max\{|a_i - b_i|\} = d'(B,A)$

$3°$ $A,B,C \in \mathbb{R}^3$, $d'(A,C) = \max\{|c_i - a_i|\}$

$$c_i - a_i = \underbrace{c_i - b_i} + \underbrace{b_i - a_i} = (b_i - a_i) + (c_i - b_i)$$

$$|c_i - a_i| = |(b_i - a_i) + (c_i - b_i)| \leq |b_i - a_i| + |c_i - b_i|$$

$$\max\{|c_i - a_i|\} \leq \max\{|b_i - a_i|\} + \max\{|c_i - b_i|\}$$

$$d'(A,C) \leq d'(A,B) + d'(B,C)$$

Bu şekilde tanımlanan fonksiyon metriktir.

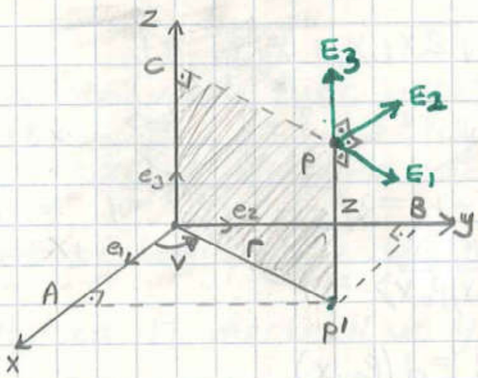
4.5. SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ VE SİLİNDİRİK ÇATI

$m\,\widehat{X_1OP'} = v \quad OP' = r$

$P'P = z$

(r,v,z) ye P nin silindirik koordinatları denir.

$(r,v,z) \longleftrightarrow P$



r artışında, E_1

v artışında, E_2

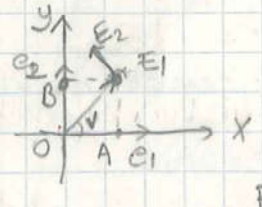
z artışında E_3

$r : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad v : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad z : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bu fonksiyonların oluşturduğu $\{r,v,z\}$ sistemine de silindirik koordinat sistemi denir.

$$\left.\begin{array}{l} x = r.\cos v \\ y = r\sin v \\ z = z \end{array}\right\} \quad \text{----} \quad (4.5.1)$$

$\{E_1, E_2, E_3\}$ üçlüsüne silindirik çatı denir. [(r,v,z) nin artış yönüne doğru birim vektörler karşılık getirilir.]

Silindirik çatı ile öklid çatısı arasındaki bağıntıyı bulalım.



$E_1 = \overline{OA}\,\vec{e_1} + \overline{OB}.\vec{e_2}$ $\qquad \overline{OA} = \underbrace{\|\vec{E_1}\|}_{1}\cos v \qquad \overline{OB} = \underbrace{\|\vec{E_1}\|}_{1}\cos(90-v)$

$\overline{OA} = \cos v \qquad \overline{OB} = \sin v$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \cos x\,\vec{e_1} + \sin x\,\vec{e_2} \\ E_2 = -\sin x\,\vec{e_1} + \cos x\,\vec{e_2} \\ E_3 = \vec{e_3} \end{array}\right\} \quad \text{----} \quad (4.5.2)$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos V & \sin V & 0 \\ -\sin V & \cos V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad ---- \quad (4,5.2)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos V & -\sin V & 0 \\ \sin V & \cos V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

→ çarpımları I_n i verir.

(öklid çat'nın sil. çatı cinsinden ifadesidir.)

SORU// Aşağıda, silindirik koordinatlarda denklemleri verilen yüzeylerin, dik koordinatlardaki denklemlerini bulunuz.

1- $r=4$, $z=0$

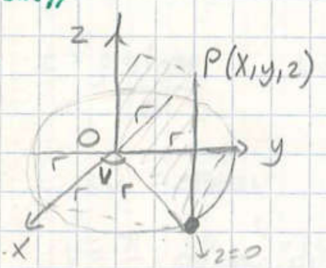
2- $r=4$

3- $V=\frac{\pi}{2}$

4- $V=\frac{\pi}{3}$ $z=1$

Çözüm//

1-



$r=\sqrt{x^2+y^2}$

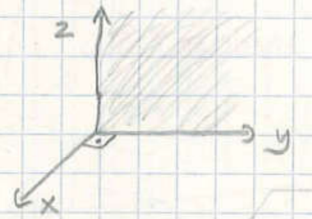
$r^2=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=16$

$z=0$ olduğu için çemberdir.

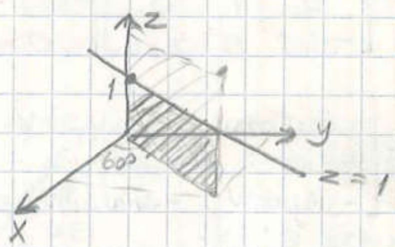
2- $x^2+y^2=16$ dır.

Ana doğruları Oz ye paralel silindirdir.

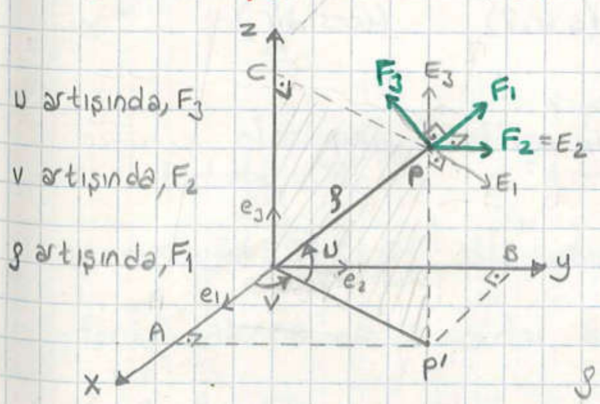
3- $V=\frac{\pi}{2}$ yoz düzlemidir.



4- $V=\frac{\pi}{3}$ oz den geçen xoz ile 60° açı yapan düzlemdir. $z=1$



4.6. KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİ VE KÜRESEL ÇATI :



$m\widehat{OAP'}=v$ $\overline{OP}=\rho$ $m(\widehat{P'OP})=u$

$P \longleftrightarrow (\rho, v, u)$ P noktasının küresel koordinatlarıdır.

bu eşleme birebirdir.

$\rho: A \to \mathbb{R}$ $v: A \to \mathbb{R}$ $u: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\{\rho, v, u\}$ sistemine küresel koordinat sistemi denir.

P nin öklid koordinatları, $P(x,y,z)$ dir. $x=\overline{OA}$ $y=\overline{OB}$ $z=\overline{OC}$ ile küresel koordinatları arasındaki bağıntıyı bulalım;

$OR' = \rho \cos u$

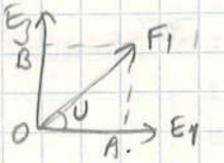
$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos u \cos v \\ y &= \rho \cos u \sin v \\ z &= \rho \sin u \end{aligned}\right\} \text{----} (4.6.1)$$

$E_1 \perp F_1 \quad E_1 \perp F_2$

$\{F_1, F_2, F_3\}$ çatısına silindirik çatı denir. Üçü de birbirine dik birim vektörlerdir. (ortonormaldirler.)

- Küresel çatının, silindirik çatı türünden ifadesi; (P'ye göre):

$\vec{F_1} = \cos u \vec{E_1} + \sin u \vec{E_3}$



$\vec{F_2} = \vec{E_2}$

$\vec{F_3} = -\sin u \vec{E_1} + \cos u \vec{E_3}$ olur. ----- (4.6.2)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \text{----} (4.6.2)'$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \text{----} (4.6.2)'' \quad \text{(tersidir)}$$

- Küresel çatının, öklid çatısı cinsinden ifadesini bulalım;

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v & \sin u \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \text{----} (4.6.2)'''$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u \cos v & -\sin v & -\sin u \cos v \\ \cos u \sin v & \cos v & -\sin u \sin v \\ \sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \text{----} (4.6.2)'''' \quad \text{(tersidir)}$$

SORU // Aşağıdaki, dik (öklid) koordinatlardaki denklemleri verilen yüzeylerin küresel koordinatlardaki denklemlerini bulun.

1- $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

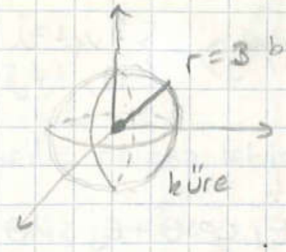
2- $3(x^2 + y^2) = z^2$

3- $z = x^2 + y^2$

4- $z = 0$

5- $y = x$

1- $x = \rho\cos u\cos v \quad y = \rho\cos u\sin v \quad z = \rho\sin u$



$(\rho\cos u\cos v)^2 + (\rho\cos u\sin v)^2 + (\rho\sin u)^2 = 9$

$\rho^2\cos^2 u\cos^2 v + \rho^2\cos^2 u\sin^2 v + \rho^2\sin^2 u = 9$

$\rho^2\cos^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + \rho^2\sin^2 u = 9$

$\rho^2\cos^2 u + \rho^2\sin^2 u = 9$

$\rho^2(\cos^2 u + \sin^2 u) = 9 \Rightarrow \rho^2 = 9 \quad \rho = 3$

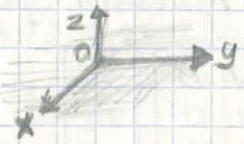
2- $3(\rho^2\cos^2 u\cos^2 v + \rho^2\cos^2 u\sin^2 v) = \rho^2\sin^2 u$

$3\cos^2 u = \sin^2 u \Rightarrow \tan^2 u = 3$ konidir.

3- eliptik paraboloittir.

$\rho^2\cos^2 u = \rho\sin u \qquad \rho = \frac{\sin u}{\cos^2 u} = \tan u.\sec u.$

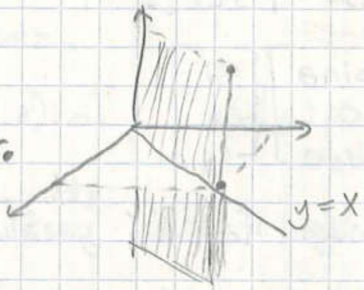
4- xoy düzlemidir.



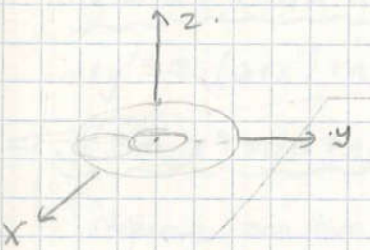
$z = \rho\underbrace{\sin u}_{0} \qquad u = 0$

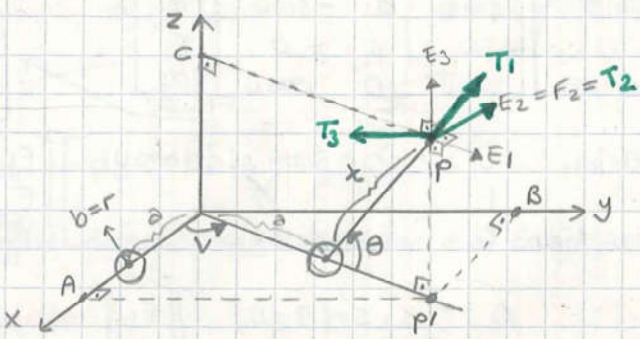
5- $\cos v = \sin v$

$v = \frac{\pi}{4}$ düzlemidir.



4.7. TOROİDAL KOORDİNAT SİSTEMİ VE TOROİDAL ÇATI





t artışı, T_1

θ artışı, T_3

v artışı, T_2

$P \longrightarrow (t, v, \theta) \qquad t: A \to \mathbb{R} \quad v: A \to \mathbb{R} \quad \theta: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\{t, v, \theta\}$ sistemine toroidal koordinat sistemi denir. t, v, θ fonksiyonlarına da toroidal koordinat fonksiyonları denir.

• P noktasının öklik koordinatları ile toroidal koordinatları arasındaki bağıntıyı bulalım.

$x = \overline{OA} = [a + (b+t)\cos\theta]\cos v$

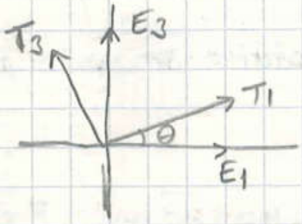
$y = \overline{OB} = [a + (b+t)\cos\theta]\sin v \qquad z = \overline{OC} = (b+t)\sin\theta \quad \text{----} \quad (4.7.1)$

$P(x,y,z)$ ye karşılık getirilen $\{T_1, T_2, T_3\}$ üçlüsüne toroidal çatı denir.

$$\langle T_i, T_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

- Toroidal çatının silindirik çatı cinsinden ifadesini yazalım.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= E_1\cos\theta + E_3\sin\theta \\ T_2 &= E_2 \\ T_3 &= -\sin\theta\, E_1 + E_3\cos\theta \end{aligned}\right\} \text{- - - -} \ (4.7.2)$$



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \text{- - - -} \ (4.7.2)'$$

- Toroidal çatının öklid çatı cinsinden ifadesini yazalım.

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos V & \sin V & 0 \\ -\sin V & \cos V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos V & \sin\theta\sin V & \sin\theta \\ -\sin V & \cos V & 0 \\ -\sin\theta\cos V & -\sin\theta\sin V & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \text{- - -} \ (4.7.2)''$$

- Toroidal çatının küresel çatı cinsinden ifadesini yazalım. (Bunun için silindirik çatının küresel çatı cinsinden ifadesini bulalım)

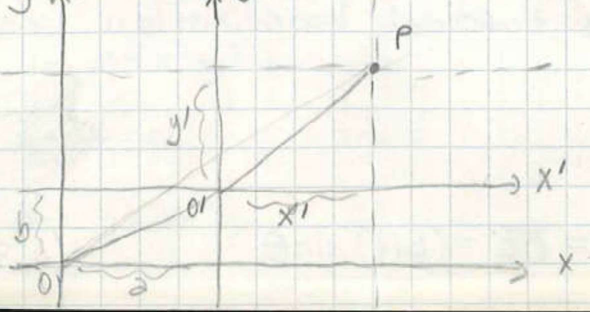
$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos u + \sin\theta\sin u & 0 & -\cos\theta\sin u + \sin\theta\cos u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos u + \cos\theta\sin u & 0 & \sin\theta\sin u + \cos\theta\cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta-u) & 0 & \sin(\theta-u) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta-u) & 0 & \cos(\theta-u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \text{- - -} \ (4.7.2)'''$$

4.8. DÜZLEM GEOMETRİDE KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

A- Düzlemde Paralel Ötelemeler :



$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$i_2\vec{OP} = i_2\vec{OO'} + i_2\vec{O'P}$$

$$x = a + x'$$

$i_2 \overrightarrow{OP} = i_2 \overrightarrow{OO'} + i_2 \overrightarrow{O'P}$ $\qquad y = b + y'$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = a + x' \\ y = b + y' \end{array}\right\}} \; \ldots (4.8.1) \qquad \boxed{\left.\begin{array}{l} x' = x - a \\ y' = y - b \end{array}\right\}} \; \ldots (4.8.1)'$$

$$\begin{array}{l} x = a + x' \\ iy = ib + iy' \\ \hline x + iy = (a + ib) + (x' + iy') \end{array}$$

$$z = k + z' \quad \ldots (4.8.2)$$

$$z' = z - k \quad \ldots (4.8.2)'$$

Teorem 4.8.1. Eksenlerin paralel ötelemesi olarak tanımlanan $z = k + z'$ dönüşümünde uzaklıklar değişmez.

İspat// Eski (xy) sistemdeki z_1 ve z_2 noktalarının yeni sistemdeki görüntüleri sırasıyla z_1' ve z_2' olsun. $(4.8.2)$ den $z_1 = k + z_1'$ $\; z_2 = k + z_2'$ olur.

$|z_1 - z_2| = |z_1' - z_2'|$ bulunur.

Açılar da değişmez.

İspat// $y = m_1 x + n_1 \ldots d_1$ $\qquad$ $(x, y) \in d_1$ noktası dönüşümden sonra $(a + x', b + y')$ noktasına dönüşeceğinden d_1 doğrusu da,

$y = m_2 x + n_2 \ldots d_2$ $\qquad$ $b + y' = m_1(a + x') + n_1$ doğrusuna dönüşür.

Benzer şekilde d_2 doğrusu da $b + y' = m_2(a + x') + n_2$ ye dönüşür.

$\Rightarrow y' = m_1 x' + m_1 a + n_1 - b \ldots d_1$ $\qquad \left(ax + by + c = 0 \Rightarrow y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m} x - \frac{c}{b} \right)$

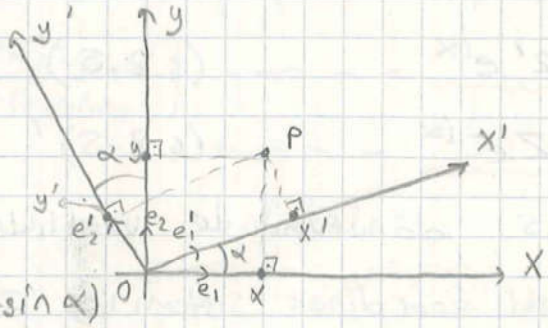
$b + y' = m_2(a + x') + n_2$

$\Rightarrow y' = m_2 x' + m_2 a + n_2 - b \ldots d_2$

öteleme sonucunda eğim değişmediğinden açı da değişmez.

B- Düzlemde Dönmeler:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} \\ \overrightarrow{OP} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}' \end{array}\right\}$$



$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}' \ldots (4.8.3)$

$x = x'\vec{e_1}'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}'\vec{e_1} = x'\cos\alpha + y'(-\sin\alpha)$

$y = x'\vec{e_1}'\vec{e_2} + y'\vec{e_2}'.\vec{e_2} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}} \Bigg\} \quad --- \quad (4.8.4)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad ---- \quad (4.8.4)'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad ---- \quad (4.8.4)''$$

$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ karmaşık sayı ile çarpıp toplayalım

$iy = ix'\sin\alpha + iy'\cos\alpha$ $(i^2=-1)$

+

$$x+iy = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + (ix'\sin\alpha + iy'\cos\alpha)$$

$$= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + i(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)$$

$$= x'(\cos\alpha + i\sin\alpha) + y'(-\sin\alpha + i\cos\alpha)$$

$$= x'(\cos\alpha + i\sin\alpha) + iy'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{i\alpha} = 1 + \frac{i\alpha}{1!} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots}_{\cos\alpha} + i\underbrace{\left(\frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots\right)}_{\sin\alpha}$$

Mac Laurin Serisine açılımıdır.

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\underbrace{x+iy}_{z} = x'e^{i\alpha} + iy'e^{i\alpha} = \underbrace{(x'+iy')}_{z'}\underbrace{e^{i\alpha}}_{e^{i\alpha}}$$

$$z = z'e^{i\alpha} \quad ---- \quad (4.8.5)$$

$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$
ters dönüşüm.

$$z' = ze^{-i\alpha} \quad ---- \quad (4.8.5)'$$

Soru// (4.8.5) dönüşümünde uzaklıklar ve açılar değişmez kanıtlayınız.

Çözüm// Eski koordinat sisteminde z_1 ve z_2 noktaların görüntüleri sırasıyla z_1' ve z_2' olsun.

$$z_1 = z_1'e^{i\alpha} \qquad z_2 = z_2'e^{i\alpha}$$

$$|z_1-z_2| = |z_1' e^{i\alpha} - z_2' e^{i\alpha}| = |z_1' - z_2'|\,|e^{i\alpha}|$$

$$= |z_1'-z_2'|\,|\cos\alpha + i\sin\alpha|$$

$$= |z_1'-z_2'| \underbrace{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}_{1}$$

$$|z_1-z_2| = |z_1'-z_2'| \qquad (z=a+ib \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ dir.})$$

Uzaklıkların değişmediğini ispatledik. Şimdi de açıların değişmediğini ispat edelim.

$y = m_1x + n_1$ --- d_1

$y = m_2 x + n_2$ ---- d_2 olsun.

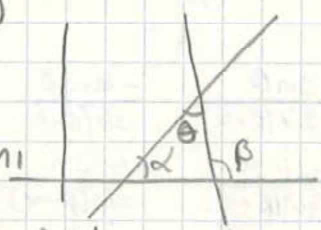
$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$

$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

d_1' ---- $x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = m_1(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + n_1$

d_2' ---- $x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = m_2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + n_2$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right| \Rightarrow \tan\theta = \tan(\beta-\alpha)$$



d_1' ------ $(\cos\alpha + m_1\sin\alpha)y' = (m_1\cos\alpha - \sin\alpha)x' + n_1$

d_2' ------ $(\cos\alpha + m_2\sin\alpha)y' = (m_2\cos\alpha - \sin\alpha)x' + n_2$

d_1''nün eğimi, $\dfrac{m_1\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + m_1\sin\alpha} = m_1'$

d_2''nün eğimi, $\dfrac{m_2\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + m_2\sin\alpha} = m_2'$

$$\tan\theta = \left| \frac{\dfrac{m_1\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+m_1\sin\alpha} - \dfrac{m_2\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+m_2\sin\alpha}}{1+\dfrac{m_1\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+m_1\sin\alpha}\cdot\dfrac{m_2\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+m_2\sin\alpha}} \right| = \frac{m_1'-m_2'}{1+m_1'm_2'}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}\right| \Rightarrow \tan\theta' = \left|\frac{m_1'-m_2'}{1+m_1'm_2'}\right|$$

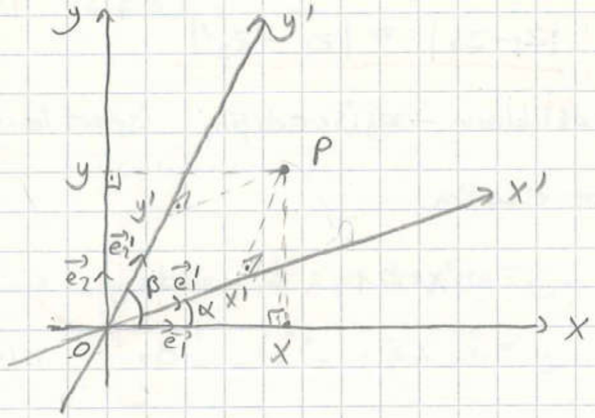
$\tan\theta' = \tan\theta$ olduğu görülür.

O halde açılar değişmez.

4.9. DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDEN EĞİK KOORDİNAT SİSTEMİNE DÖNÜŞÜM

$\vec{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ } xy koordinat sistemine göre

$\vec{OP} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}'$ } $x'y'$ " " "



$\Rightarrow x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}'$

$x = x'\vec{e_1}'\cdot\vec{e_1} + y'\vec{e_2}'\vec{e_1}$

$\Rightarrow x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta$

$y = x'\vec{e_1}'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}'\vec{e_2}$

$\Rightarrow y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta \\ y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta \end{aligned}} \quad \text{--- (4.9.1)}$$

(dik koordinattan eğik koordinata dönüşüm)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (4.9.1)}'$$

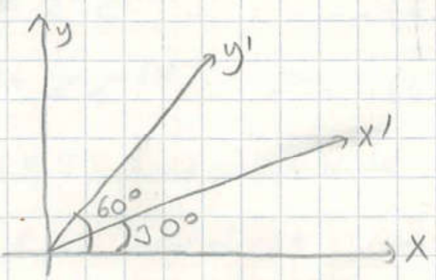
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} & \frac{-\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} & 0 \\ \frac{-\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} & \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sin(\beta-\alpha)}(x\sin\beta - y\cos\beta) \\ y' &= \frac{1}{\sin(\beta-\alpha)}(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{aligned}} \quad \text{--- (4.9.1)}''$$

Eğik koordinattan dik koordinata dönüşüm.

Soru 1// P_1 ve P_2 gibi iki nokta arasındaki uzaklığın eğik koordinat sistemindeki ifadesini bulun.

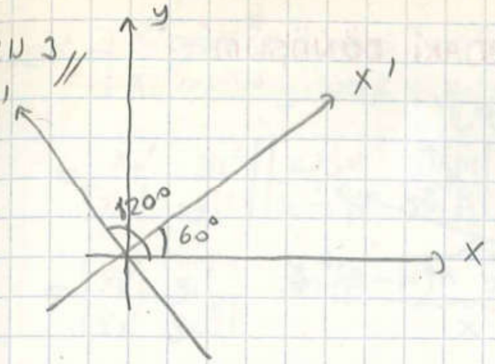
Soru 2//



$P_1(1,1)$ $P_2(3,2)$

Bu iki nokta arasındaki uzaklığı eğik koordinat sisteminde bulunuz. (x', y')

SORU 3 //



$P_1(3,1)$ $P_2(4,2)$

Dik koordinat sistemindeki bu iki uzaklığı eğik koordinat sisteminde (x', y') bulunuz.

Çözüm 1 // $P_1=(x_1,y_1)$ $P_2=(x_2,y_2)$ dik koordinattaki değeri olsun.

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$x_1-x_2=(x_1'-x_2')\cos\alpha+(y_1'-y_2')\cos\beta$$

$$y_1-y_2=(x_1'-x_2')\sin\alpha+(y_1'-y_2')\sin\beta$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=x_1'\cos\alpha+y_1'\cos\beta \\ y_1=x_1'\sin\alpha+y_1'\sin\beta \\ x_2=x_2'\cos\alpha+y_2'\cos\beta \\ y_2=x_2'\sin\alpha+y_2'\sin\beta \end{array}\right.$$

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1'-x_2')^2\cos^2\alpha+2(x_1'-y_1')(y_1'-y_2')\cos\alpha\cos\beta+(y_1'-y_2')^2\cos^2\beta+ \\ +(x_1'-x_2')\sin^2\alpha+2(x_1'-x_2')(y_1'-y_2')\sin\alpha\sin\beta+(y_1'-y_2')^2\sin^2\beta}$$

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+2(x_1'-x_2')(y_1'-y_2')\cos(\beta-\alpha)}$$

Çözüm 2 // $P_1'=(x_1',y_1')$ $P_2'=(x_2',y_2')$

$$x_1'=\frac{1}{\sin(60-30)}\{1\sin 60-1\cos 60\}$$

$$y_1'=\frac{1}{\sin(60-30)}\{-1\sin 30+1\cos 30\}$$

$x_1'=\sqrt{3}-1$ $\qquad$ $x_2'=3\sqrt{3}-2$

$y_1'=\sqrt{3}-1$ $\qquad$ $y_2'=2\sqrt{3}-3$

Bu değerleri $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ de yerine koyalım.

$$\overline{P_1'P_2'}=\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+2(x_1'-x_2')(y_1'-y_2)\cos(\beta-\alpha)}$$

$$=\sqrt{[\sqrt{3}-1-(3\sqrt{3}-2)]^2+[\sqrt{3}-1-(2\sqrt{3}-3)]^2+2((13-4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})\cos(60-30}$$

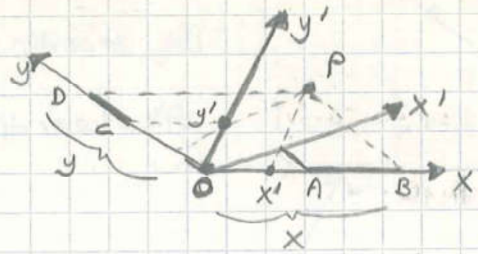
$$=\sqrt{(13-4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})+2(13-4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})\cos 30}$$

$$=\sqrt{20-8\sqrt{3}+2(139-24\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\sqrt{20-8\sqrt{3}+139\sqrt{3}-24.3}$$

$$=\sqrt{131\sqrt{3}+92} \quad //$$

4.10. EĞİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ ARASINDAKİ DÖNÜŞÜM



$\frac{x'}{\overline{OA}} = k_1 \quad \frac{y'}{\overline{AB}} = k_2$

$x' = k_1 \overline{OA} \quad y' = k_2 \overline{AB}$

$x = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{1}{k_1} x'$

$\Rightarrow AB = \frac{1}{k_2} y'$

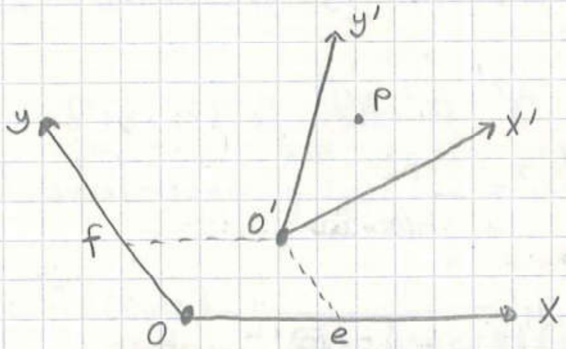
$x = \overline{OA} + \overline{AB} = \frac{1}{k_1} x' + \frac{1}{k_2} y' \quad \left(\frac{1}{k_1} = a \ , \ \frac{1}{k_2} = b \right)$

$\Rightarrow x = ax' + by'$

$\left.\begin{matrix} \frac{y'}{\overline{OC}} = k_1 \\ \frac{x'}{\overline{CD}} = k_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{k_1} y' \quad \overline{CD} = \frac{1}{k_2} x'$

$y = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{1}{k_1} y' + \frac{1}{k_2} x' \quad \left(\frac{1}{k_1} = c \ , \ \frac{1}{k_2} = d \right)$

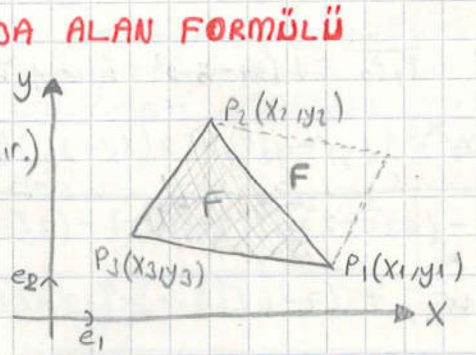
$\left.\begin{matrix} y = cx' + dy' \\ x = ax' + by' \end{matrix}\right\} \text{- - - - } (4.11.1)$



$\left.\begin{matrix} x = ax' + by' + e \\ y = cx' + dy' + f \end{matrix}\right\} \text{- - - - -} (4.11.1)'$

(iki koordinat sistemi arasındaki en genel dönüşümdür.)

4.11. EĞİK KOORDİNATLARDA ALAN FORMÜLÜ



$2\vec{F} = \overrightarrow{P_3P_1} \wedge \overrightarrow{P_3P_2}$ (Paralel kenarın alanıdır.)

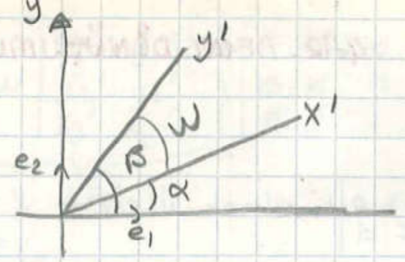
$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \vec{e_3}$

$P_3P_1 = (x_1-x_3)\vec{e_1} + (y_1-y_3)\vec{e_2}$

$P_3P_2 = (x_2-x_3)\vec{e_1} + (y_2-y_3)\vec{e_2}$

$2F = \begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \qquad 2F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$$2F=\begin{vmatrix} x_1'\cos\alpha + y_1'\cos\beta & x_1'\sin\alpha+y_1'\sin\beta \\ x_2'\cos\alpha + y_2'\cos\beta & x_2'\sin\alpha+y_2'\sin\beta \end{vmatrix}$$



$$=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}\ \sin(\beta-\alpha)$$

$$2F=\sin w\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} \qquad ----(4.11.1)''$$

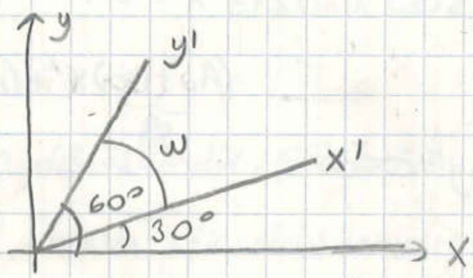
$$2F=\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (x_1'-x_3')\cos\alpha+(y_1'-y_3')\cos\beta & x_1'-x_3')\sin\alpha+(y_1'-y_3')'\sin\beta \\ (x_3'-x_2')\cos\alpha+(y_2'-y_3')\cos\beta & (x_2'-x_3')\sin\alpha+(y_1'-y_3')\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1'-x_3' & y_1'-y_3' \\ x_2'-x_3' & y_2'-y_3' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}=\sin w\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}=2F$$

$$----(4.11.2)$$

Dik koordinat sisteminde

örnek// $P_1(1,1)$ $P_2(3,2)$ $P_3(0,0)$ noktalarının oluşturduğu üçgenin alanını eğik koordinat sisteminde bulunuz.



$\alpha=30°$ $\beta=60°$

$P_1'(x_1',y_1')$ $P_2'(x_2',y_2')$ $P_3'(x_3',y_3')$

$$x_1'=\frac{1}{\sin(60-30)}\{1.\sin 60-1.\cos 60\}=2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right\}=\sqrt{3}-1$$

$$y_1'=\frac{1}{\sin(60-30)}\{-1.\sin 30+1.\cos 30\}$$

$$=2\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\sqrt{3}-1 \quad //$$

$$x_2'=\frac{1}{\sin(60-30)}\{3\sin 60-2\cos 60\}=2\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2}-2.\frac{1}{2}\right\}=3\sqrt{3}-2 \quad //$$

$$y_2'=\frac{1}{\sin(60-30)}\{-3\sin 30+2\cos 30\}=2\left\{-3\frac{1}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}\right.=2\sqrt{3}-3 \quad //$$

$x_3'=0$// $y_3'=0$//

$$2F=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & 1 \\ 3\sqrt{3}-2 & 2\sqrt{3}-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ 3\sqrt{3}-2 & 2\sqrt{3}-3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|\left[(2\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)(3\sqrt{3}-2)\right]\right|$$

$$2F=\frac{1}{2}\left|(\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1)\right|=\frac{1}{2}|-2|=1 \quad //$$

$$2F=1 \Rightarrow F=\frac{1}{2}\ br^2 \quad //$$

4.12. AFİN DÖNÜŞÜMLER

TANIM 4.12.1

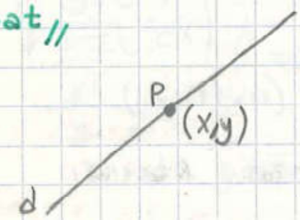
$$\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ olmak üzere } \left.\begin{aligned} x&=ax'+by'+e \\ y&=cx'+dy'+f \end{aligned}\right\} \text{----}(4.12.1)$$

biçimindeki dönüşüme afin dönüşüm denir. Koordinatları (4.12.1) bağıntısına uyan noktalara da bir birleriyle afin olarak karşılık gelirler denir.

Teorem 4.12.1.

P noktası bir d doğrusunu çizerse bir afin dönüşüm altındaki resmi olan P' noktası da bir d' doğrusunu çizer. (Bunun tersi de doğrudur.)

İspat//



$Ax+By+C=0$ --- (d nin denklemi olsun)

$A(ax'+by'+e)+B(cx'+dy'+f)+C=0$

A - - - - -

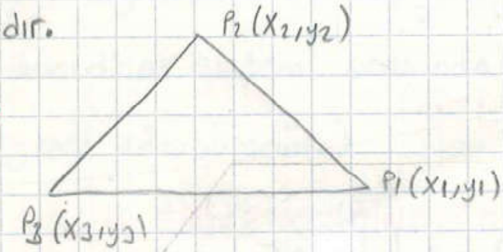
$\underbrace{(Aa+Bc)}_{\mathcal{A}}x'+\underbrace{(Ab+Bd)}_{\mathcal{B}}y'+\underbrace{Ae+Bf+C}_{\mathcal{C}}$ de bir doğru denklemidir.

$\mathcal{A}x'+\mathcal{B}y'+\mathcal{C}=0$

Teorem 4.12.2.

Afin dönüşümlerde birbirine karşılık gelen şekillerin alanları oranı sabit bir orandadır.

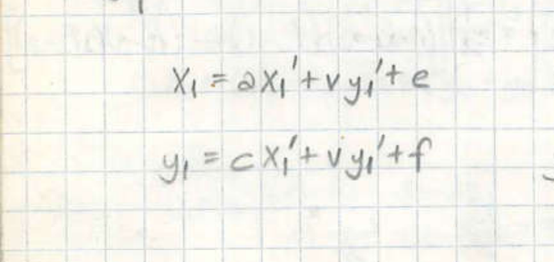
İspat//



$x_1=ax_1'+by_1'+e \qquad y_1=cx_1'+dy_1'+f$

$x_2=ax_2'+by_2'+e \qquad y_2=cx_2'+dy_2'+f$

$x_3=ax_3'+by_3'+e \qquad y_3=cx_3'+dy_3'+f$



$$2F=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\sin(\underbrace{\beta-\alpha}_{w})$$

$u_1=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta$

$v_1=x_1\sin\alpha+y_1\sin\beta$

$x_1=ax_1'+vy_1'+e \qquad x_2=ax_2'+vy_2'+e \qquad x_3=ax_3'+vy_3'+e$

$y_1=cx_1'+vy_1'+f \qquad y_2=cx_2'+vy_2'+f \qquad y_3=cx_3'+vy_3'+f$

$$= \begin{vmatrix} ax_1'+by_1'+e & cx_1'+dy_1'+f & 1 \\ ax_2'+by_2'+e & cx_2'+dy_2'+f & 1 \\ ax_3'+by_3'+e & cx_3'+dy_3'+f & 1 \end{vmatrix} \sin w = \sin w \underbrace{\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}}_{2F'} \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sin \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \cdot \delta \quad ---- \quad (4.12.3)$$

$\Rightarrow 2F = 2F'\delta$ //

Eğer (4.12.3) dönüşümü benzerlik dönüşümüyse

$x_1 = ax_1'$

$y_1 = ay_1'$

$x_1 = ax_1' + 0y_1' + 0$

$y_1 = 0x_1' + ay_1' + 0$

$\delta = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \Rightarrow 2F = 2F'\delta$

$\dfrac{2F}{2F'} = \delta = a^2 \qquad \dfrac{F}{F'} = a^2$ Benzer üçgenlerde (alanlar oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.)

Alıştırmalar

1- İki afin dönüşümün bileşkesi de bir afin dönüşümdür. Gösteriniz?

2- " " " " nin matrisi, bileşen afin dönüşümlerin matrisleri çarpımıdır gösteriniz 3- Afin dönüşümünde alanlar dönüşüm matrislerin determinantı ile çarpılarak değişirler.

4- Afin dönüşümler alanları oranını korurlar. Gösteriniz.

Çözüm 1// $xy \rightarrow x_1'y_1' \rightarrow x'y'$

$x = a_1x_1' + b_1y_1' + e_1 \qquad x_1' = ax' + by' + e$

$y = c_1x_1' + d_1y_1' + f_1 \qquad y_1' = cx' + dy' + f$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \rightarrow (x_1', y_1') \rightarrow (x', y')$

$x = a_1(ax'+by'+e) + b_1(cx'+dy'+f) + e_1 = \overbrace{(a_1a+b_1c)}^{A}x' + \overbrace{(a_1b+b_1d)}^{B}y_1' + \overbrace{a_1f+b_1f+e_1}^{E}$

$y = c_1(ax'+by'+e) + d_1(cx'+dy'+f) + f_1 = \underbrace{(c_1a+d_1c)}_{C}x' + \underbrace{(c_1b+d_1d)}_{D}y_1' + \underbrace{c_1e+d_1f+f_1}_{F}$

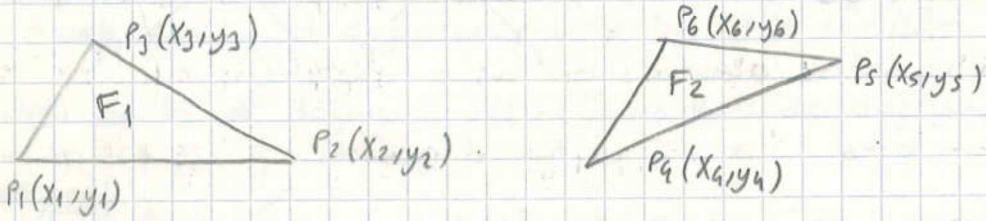
$x = Ax_1' + By_1' + E$

$y = Cx_1' + Dy_1' + F$

2- $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} a_1a+b_1c & a_1b+b_1d & a_1e+b_1f+e_1 \\ c_1a+d_1 & c_1b+d_1d & c_1e+d_1f+f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a+b_1c & a_1b+b_1d & a_1e+b_1f+e_1 \\ c_1a+b_1c & c_1b+d_1b & c_1e+c_1f+f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

4- 

$x_1 = ax_1' + by_1' + e \qquad x_2 = ax_2' + by_2' + e \qquad$ - - - - - $\qquad x_6 = \ldots$

$y_1 = cx_1' + dy_1' + f \qquad y_2 = cx_2' + dy_2' + f \qquad y_6 = \ldots$

$$2F_1 = \sin w \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2F_2 = \sin w \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2F_1 = \sin w \begin{vmatrix} ax_1'+by_1'+e & cx_1'+dy_1'+f \\ ax_2'+by_2'+e & cx_2'+dy_2'+f \\ ax_3'+by_3'+e & cx_3'+dy_3'+f \end{vmatrix} \qquad 2F_2 = \sin w \begin{vmatrix} ax_4'+by_4'+e & c\ldots \\ ax_5'+by_5'+e & c\ldots \\ ax_6'+by_6'+e & c\ldots \end{vmatrix}$$

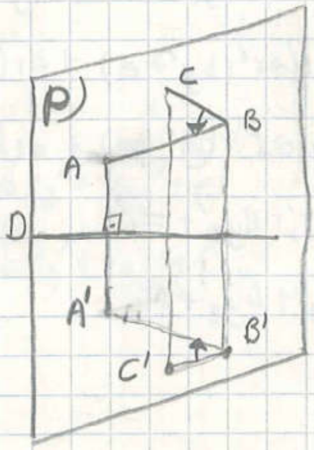
$$2F_1 = \sin w \underbrace{\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}}_{2F_1'} \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} \qquad 2F_2 = \sin w \underbrace{\begin{vmatrix} x_4' & y_4' & 1 \\ x_5' & y_5' & 1 \\ x_6' & y_6' & 1 \end{vmatrix}}_{2F_2'} \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2F_1 = 2F_1' \cdot \delta \\ 2F_2 = 2F_2' \cdot \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1'}{F_2'}$$ (Alanlar oranı afin dönüşümlerde korunur.)

4.13. DÜZLEMDE YANSIMALAR

TANIM 4.13.1

P düzleminde herhangi bir doğru D olsun. D'nin her noktasını kendisine ve P düzleminin her bir noktasını da D ye göre simetriği olan noktaya dönüştüren dönüşüme YANSIMA, D doğrusuna da yansımanın ekseni denir.



yansımalar, açı yönünün ters yönündedir.

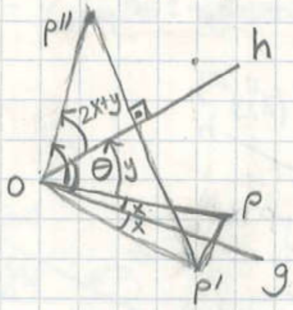
Yansımalar, açıların yönünü ters çeviren ölçümlerdir. Bir yansıma, yansıma ekseni üzerindeki noktalardan başka hiçbir noktayı sabit bırakmaz.

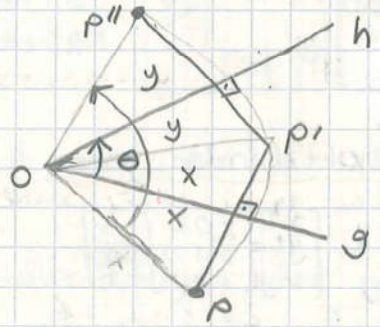
Bir yansıma, yansıma eksenine dik olan doğrulardan başka hiçbir doğruyu sabit bırakmaz.

Teorem 4.13.1. Farklı iki g ve h doğrularına göre iki yansıma sırasıyla R_g ve R_h olsun. Eğer g ve h kesişirse $R_h R_g$ dönüşümü, merkezi bu iki doğrunun kesişme noktası ve açısı da g'den, h'ye olan açının iki katı olan (açı pozitif veya negatif yönde olabilir.) bir açı olacak biçimde bir dönme hareketidir. Eğer g ve h paralel ise R_h ve R_g dönüşümü g'den h'ye dik yönde ve g'den h'ye olan uzaklığın iki katı uzunlukta bir ötelemedir.

İspat// 1- g ve h kesişirse,

$$P\hat{O}P'' = 2x + 2y = 2(x+y) = 2\theta$$



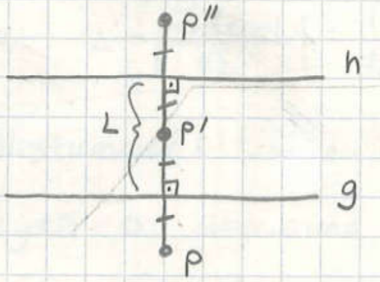


$h\hat{O}g = \theta$

$P''\hat{O}P \overset{?}{=} 2\theta$

$$P\hat{O}P'' = y + 2x + y$$
$$= 2(x+y) = 2\theta$$

2- Doğrular paralel ise,

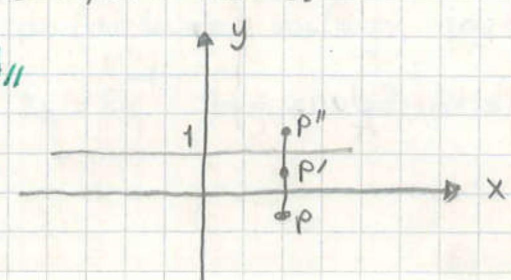


$PP'' = 2(x+y) = 2L$

Soru 1// $y=0$ ve $y=1$ doğrularına göre ve bu sırada ardışık iki yansımanın bileşkesi ne kadar bir ötelemedir?

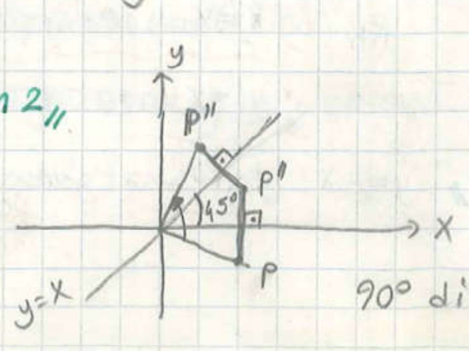
Soru 2// $y=0$ ve $y=x$ doğrularına göre ve bu sırada iki yansımanın merkezini ve dönme açısını bulunuz?

Çözüm 1//



$PP'' = 2$ br.

Çözüm 2//



90° dir.

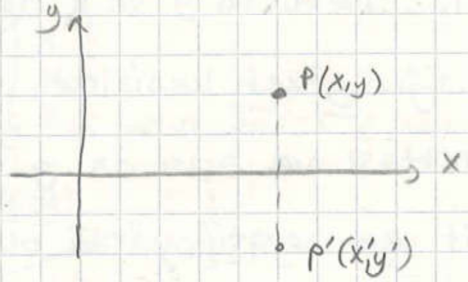
Herbir dönme, dönme merkezinden geçen iki doğruya göre yansımaların bileşkesidir. Herbir öteleme, öteleme doğrultusuna dik doğruya göre yansımaların bileşkesidir.

4.14. YANSIMALARIN DENKLEMLERİ

1- Ox eksenine göre yansıma : R_x

R_x .... $x' = x \quad y' = -y$ ----- (4.14.1)

$$R_x \ldots \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{----} (4.14.1)'$$

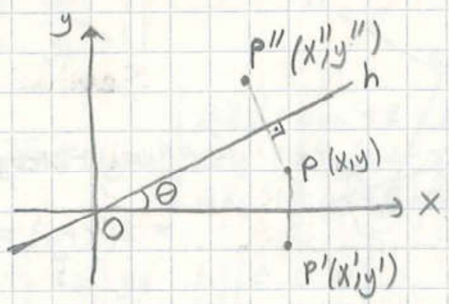


$$\left.\boxed{\begin{matrix} x = x' \\ y = -y' \end{matrix}}\right\} \text{--------} (4.14.1)''$$

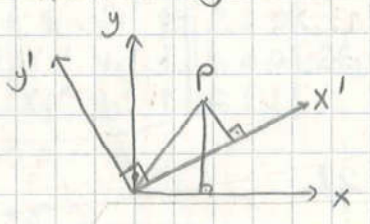
$$R_x^{-1} \ldots \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \text{----} \quad R_x = R_x^{-1} \text{------} (4.14.1)'''$$

2- Başlangıç noktasından geçen h doğrusuna göre yansıma : R_h

$$R_x \text{---} \quad \begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x'' = x'\cos 2\theta - y'\sin 2\theta \\ y'' = x'\sin 2\theta + y'\cos 2\theta \end{matrix}$$



$R_h = D R_x \qquad R_x = R_x^{-1}$

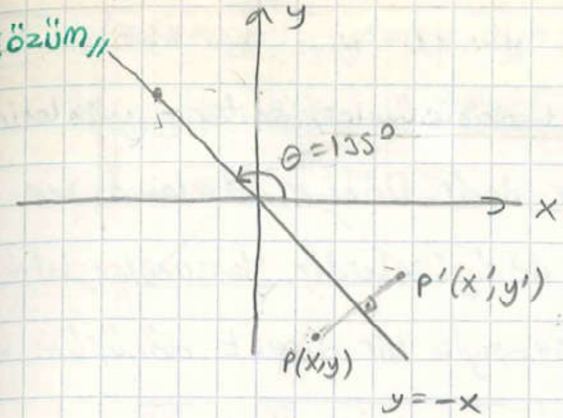
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_h \text{---} \left.\begin{matrix} \boxed{x'' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta} \\ \boxed{y'' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta} \end{matrix}\right\} \text{---} (4.14.2)$$

Soru// $y = -x$ doğrusuna göre yansımanın denklemlerini bulun.

Çözüm//



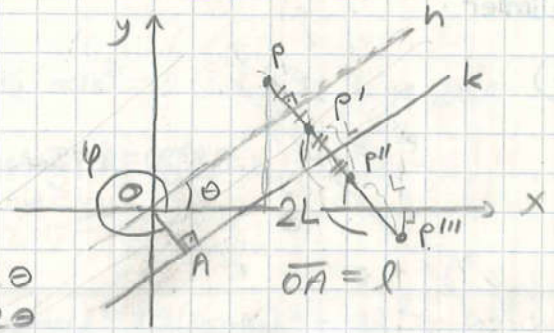
$x' = x\cos 270 + y\sin 270 \Rightarrow \boxed{x' = -y}$

$y' = x\sin 270 - y\cos 270 \Rightarrow \boxed{y' = -x}$

3- Başlangıç noktasından geçmeyen k doğrusuna göre yansıma : R_k

$\overline{OA} = \ell \qquad PP'' = 2L$

$P'P''' = 2L$



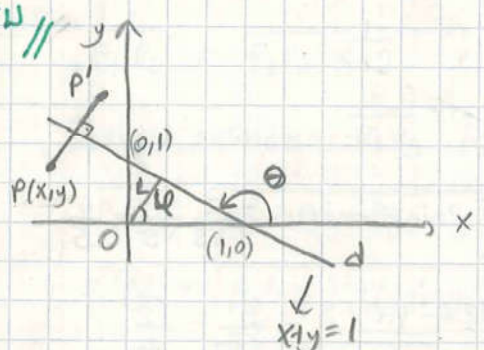
$P'''(x''';y''')$, $P(x,y)$, $P'(x',y')$

$x''' = x' + 2L\cos\varphi \qquad x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$
$y''' = y' + 2L\sin\varphi \qquad y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta$

$$R_k \cdots \boxed{\begin{aligned} x''' &= x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + 2L\cos\varphi \\ y''' &= x\sin 2\theta - y\cos 2\theta + 2L\sin\varphi \end{aligned}} \Bigg\} \cdots (4.14.3)$$

φ : dikmenin eğimi
θ : doğrunun eğimi

Soru//



Şekilde görülen doğruya göre yansıma denklemi?

$x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + 2L\cos\varphi \qquad \theta = 135^\circ$
$y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta + 2L\sin\varphi$

$x' = x\cos 270 + y\sin 270 + \sqrt{2}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x' = -y+1$
$y' = x\sin 27 - y\cos 270 + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y' = -x+1$

$L = \left|\frac{0+0-1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 2L = \sqrt{2}$

Alıştırmalar :

1- $2x-4y+5=0$ doğrusuna ve bu doğruya paralel **5** br ötelemeli bir yansımanın denklemlerini bulun. ($TR_k = R_kT$; Öteleme ve yansıma $\stackrel{?}{=}$ yansıma ve öteleme)

2- $x' = 2x+3y+1 \quad y' = 3x-2y+4$ dönüşümü bir benzerlik dönüşümü müdür? Neden

3- $x' = 2x+y+5$, $y' = x+3y+7$ dönüşümü $y-4x-3=0$ doğrusu üzerindeki noktalar arasındaki uzaklıkları hangi sayı ile çarparak değiştirir?

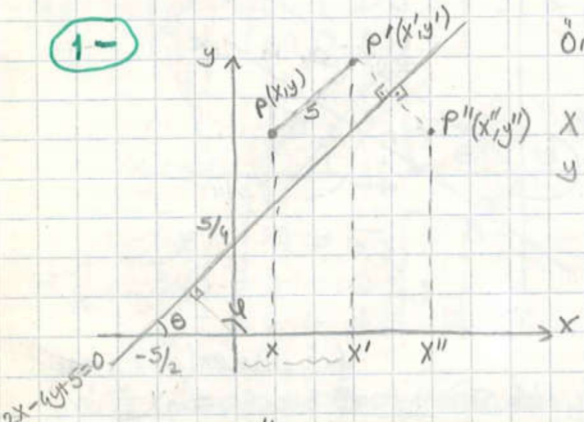
4- $\mathbb{R}^2$ de (düzlemde) başlangıç noktasından geçen P doğrusuna göre yansıma R_h ise $R_h = R_h^{-1}$ olduğunu gösteriniz. (R_x'in aynısıdır.)

TANIM 4.14.1.

Açıların yönlerini koruyan dönüşümlere **direkt dönüşümler**, açıların yönlerini ters çeviren dönüşümlere de **karşıt dönüşümler** denir. Dönme, öteleme ve bunların bileşkesi olan dönüşümler, birer direkt dönüşümlerdir. Yansımalar, birer karşıt dönüşümlerdir. Herbir karşıt dönüşüm, sırasıyla bir direkt dönüşüm ve bir yansımanın bileşkesidir.

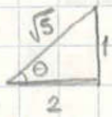
Çözümler:

1 –



Önce öteleme yapalım.

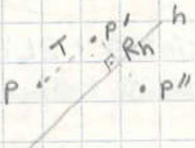
$x = 5\cos\theta$
$y = 5\sin\theta$



$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt5} \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt5}$

$$x' = x + 5\cos\theta = x + 2\sqrt5$$
$$y' = y + 5\sin\theta = y + \sqrt5$$

Şimdi yansıtalım.



$$x'' = x'\cos2\theta + y'\sin2\theta + 2L\cos\varphi$$
$$y'' = x'\sin2\theta - y'\cos2\theta + 2L\sin\varphi$$

$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta \qquad \cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\qquad\qquad\qquad \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt5}$

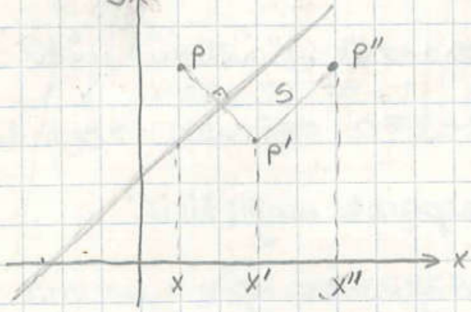
$\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac45 - \frac15 = \frac35 \qquad \sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{2}{\sqrt5}\frac{1}{\sqrt5} = \frac45$

$x'' = (x+2\sqrt5)\frac35 + (y+\sqrt5)\frac45 + \sqrt5\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) \qquad L = \frac{|2.0-4.0+5|}{\sqrt{4+16}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt5}{2}$

$y'' = (x+2\sqrt5)\frac45 - (y+\sqrt5)\frac35 + \sqrt5\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) \qquad \underline{2L = \sqrt5}$

$\Rightarrow \quad x'' = \frac35 x + \frac45 y + 2\sqrt5 - 1 \,//, \quad y'' = \frac45 x - \frac35 y + \sqrt5 + 2 \,//$

Şimdi de; önce yansıma, sonra öteleme yapalım. (yine aynı sonuç çıkmalı.)



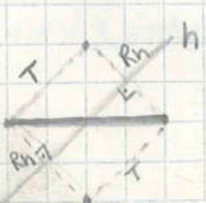
$$x' = x\cos2\theta + y\sin2\theta + 2L\cos\varphi$$
$$y' = x\sin2\theta - y\cos2\theta + 2L\sin\varphi$$

$x' = \frac35 x + \frac45 y - 1 \qquad y' = \frac45 x - \frac35 y + 2$

$x'' = x' + 5\cos\theta = x' + 2\sqrt5 \Rightarrow x'' = \frac35 x + \frac45 y - 1 + 2\sqrt5 \,//$

$y'' = y' + 5\sin\theta = y' + \sqrt5 \Rightarrow y'' = \frac45 x - \frac35 y + 2 + \sqrt5 \,//$

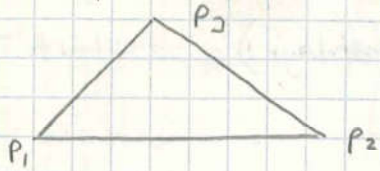
O halde



$TR_h = R_hT$

2- $x' = 2x + 3y + 1 \quad y' = 3x - 2y + 4$

$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2) \quad P_3(x_3, y_3)$ olsun.



$P_1 \longrightarrow P_1'(x_1', y_1')$

$P_2 \longrightarrow P_2'(x_2', y_2')$

$P_3 \longrightarrow P_3'(x_3', y_3')$

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$

$x_1' = 2x_1 + 3y_1 + 1, \quad x_2' = 2x_2 + 3y_2 + 1 \Rightarrow (x_2' - x_1') = 2(x_2 - x_1) + 3(y_2 - y_1)$

$y_1' = 3x_1 - 2y_1 + 4, \quad y_2' = 3x_2 - 2y_2 + 4 \Rightarrow (y_2' - y_1') = 3(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1)$

Denklemde yerine koyalım.

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{\underbrace{4(x_2 - x_1)^2 + 12(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + 9(y_2 - y_1)^2}_{(x_2' - x_1')^2} + \underbrace{9(x_2 - x_1)^2 - 12(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + 4(y_2 -}_{(y_2' - y_1')^2}}$$

$$= \sqrt{13(x_2 - x_1)^2 + 13(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{13\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]}$$

$\overline{P_1'P_2'} = \overline{P_1P_2}\,\sqrt{13}$

Benzer şekilde $\overline{P_1P_3}$ için yapalım.

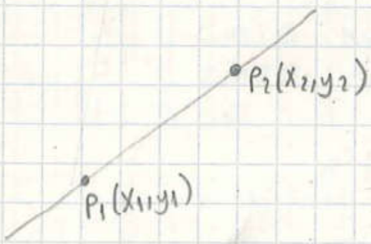
$\overline{P_1P_3} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$ ise

$\overline{P_1'P_3'} = \sqrt{(x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2} \Longrightarrow \overline{P_1'P_3'} = \overline{P_1P_3} \cdot \sqrt{13}$ olur.

$\dfrac{P_{ij}}{P_{ij}'} = \sqrt{13} \qquad i \neq j \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad$ Benzerlik oranı $\sqrt{13}$ tür.

$\overline{P_2P_3} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$ ve $\overline{P_2'P_3'} = \sqrt{(x_3' - x_2')^2 + (y_3' - y_2')^2} = \overline{P_2P_3}\,\sqrt{13}$.

3- $x' = 2x + y + 5 \quad y' = x + 3y + 7, \quad y - 4x - 3 = 0$



$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad [y_2 - y_1 = 4(x_2 - x_1)]$

$y_1 = 4x_1 + 3, \quad y_2 = 4x_2 + 3 \quad$ (y'yi yalnız bırakarak)

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 16(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{17}\,|x_2 - x_1|$

$P_1 \longrightarrow P_1'(x_1', y_1') \qquad P_2 \longrightarrow P_2'(x_2', y_2')$

$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$

$y_1' = x_1 + 3y_1 + 7 \quad x_1' = 2x_1 + y_1 + 5 \Rightarrow (x_2' - x_1') = 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

$y_2' = x_2 + 3y_2 + 7 \quad x_2' = 2x_2 + y_2 + 5 \Rightarrow (y_2' - y_1') = (x_2 - x_1) + 3(y_2 - y_1)$

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{4(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)(y_2-y_1)+(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2+6(x_2-x_1)(y_2-y_1)+9(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{5(x_2-x_1)^2+10(x_2-x_1)(y_2-y_1)+10(y_2-y_1)^2}$$

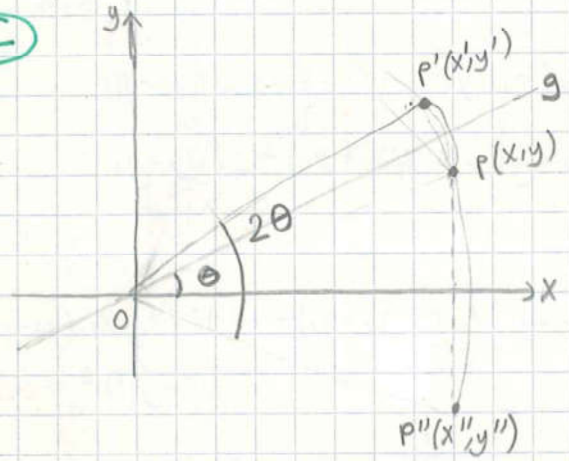
$10(y_2-y_1)^2 = 160(x_2-x_1)^2$ ($y_2-y_1 = 4(x_2-x_1)$ den dolayı)

$10(x_2-x_1)(y_2-y_1) = 40(x_2-x_1)^2$

$$= \sqrt{5(x_2-x_1)^2+160(x_2-x_1)^2+40(x_2-x_1)^2} = \sqrt{205}\,|x_2-x_1|$$

$$= \sqrt{\frac{205}{17}}\;\overline{P_1P_2}$$

4-



Önce x eksenine göre yansıma, sonra 2θ kadar döndürme yapalım.

R_x ---- $x'' = x$
$y'' = -y$

$x' = x''\cos 2\theta - y''\sin 2\theta$
$y' = x''\sin 2\theta + y''\cos 2\theta$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ dönmenin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R_g = DR_x$ (önce yansıma, sonra 2θ kadar döndürme yaptık)

R_g ---- $x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$
$y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta$

R_g^{-1} i bulalım. (çarpmaya göre tersidir.)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{A^{-1} = ?} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} & & \\ & A^{-1} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}\cos 2\theta + a_{12}\sin 2\theta = 1$$
$$a_{11}\sin 2\theta - a_{12}\cos 2\theta = 0$$
$$a_{13} = 0$$

$$a_{21}\cos 2\theta + a_{22}\sin 2\theta = 0$$
$$a_{21}\sin 2\theta - a_{22}\cos 2\theta = 1$$
$$a_{23} = 0$$

$$a_{31}\cos 2\theta + a_{32}\sin 2\theta = 0$$
$$a_{31}\sin 2\theta - a_{32}\cos 2\theta = 0$$
$$a_{33} = 0$$

$$a_{11}\cos^2 2\theta + a_{12}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos 2\theta$$
$$+\ a_{11}\sin^2 2\theta - a_{12}\sin 2\theta\cos 2\theta = 0$$

$$a_{11} = \cos 2\theta$$

$$a_{11}\sin 2\theta\cos 2\theta + a_{12}\sin^2 2\theta = \sin 2\theta$$
$$-\ a_{11}\cos 2\theta\sin 2\theta - a_{12}\cos^2 2\theta = 0$$

(2. satırı $\cos 2\theta$ ile çarparak)

$$a_{12} = \sin 2\theta$$

$$a_{21}\cos^2 2\theta + a_{22}\sin 2\theta\cos 2\theta = 0$$
$$+\ a_{21}\sin^2 2\theta - a_{22}\sin 2\theta\cos 2\theta = \sin 2\theta$$

$$a_{21} = \sin 2\theta$$

$$a_{21}\sin 2\theta\cos 2\theta + a_{22}\sin^2 2\theta = 0$$
$$-\ a_{21}\sin 2\theta\cos 2\theta - a_{22}\cos^2 2\theta = \cos 2\theta$$

$$a_{22} = -\cos 2\theta \qquad a_{31} = 0 \qquad a_{32} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = x'\cos 2\theta + y'\sin 2\theta \quad \text{---} \; R_g^{-1}$$
$$y = x'\sin 2\theta - y'\cos 2\theta$$

$$x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \quad \text{---} \; R_g$$
$$y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta$$

$$R_g = R_g^{-1}$$

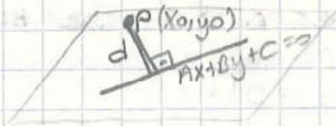
V. BÖLÜM :

5.1. Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı :

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemine olan uzaklığı.

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{dir.}$$

Düzlemsel Durum : $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ olur.

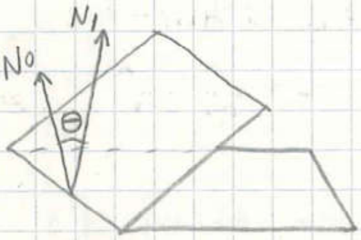


5.2. İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları :

$Ax+By+Cz+D=0$

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$$\vec{N_0} = \frac{A\vec{e_1}+B\vec{e_2}+C\vec{e_3}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \vec{N_1} = \frac{A_1\vec{e_1}+B_1\vec{e_2}+C_1\vec{e_3}}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$$



$$\langle \vec{N_0}, \vec{N_1} \rangle = \underbrace{\|\vec{N_0}\|}_{1} . \underbrace{\|\vec{N_1}\|}_{1} \cos\theta$$

($\cos\theta = 0$ ise iki vektör diktir.)
(düzlemler de)

$$\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \cos\theta$$

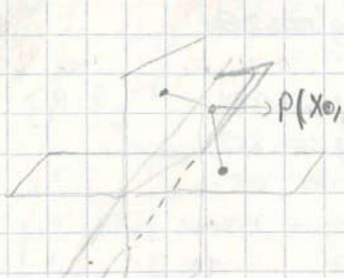
$\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1}$ ise iki düzlem paraleldir.

$\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1} = \dfrac{D}{D_1}$ ise " " çakışıktır.

TANIM 5.2.1

$Ax+By+Cz+D=0$ düzleminin $\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ denklemi ile gösterimine düzlemin normal formdaki gösterimi * ya da Hesse formdaki * gösterimi denir.

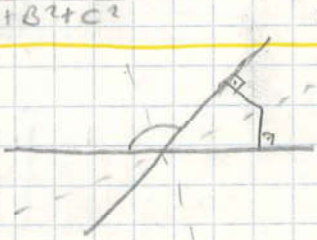
5.3. İki Düzlemin Açıortayının Denklemi :



$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{array}\right\}$ düzlemlerinin açıortay denklemleri ;

$$\boxed{\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \mp \frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}} \quad \text{dir.}$$

(üç boyutta)



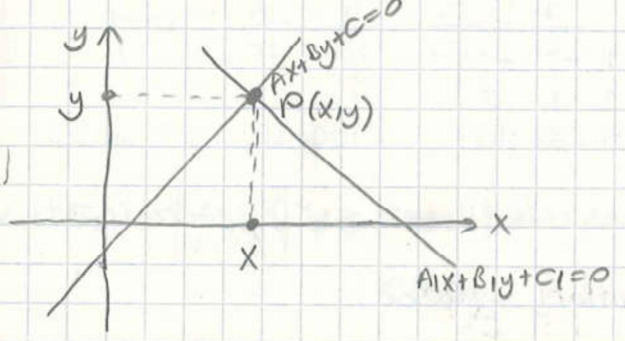
$$\boxed{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \mp \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}}$$

(iki boyutta)

($Ax+By+C=0$ doğrusu ile $A_1x+B_1y+C_1=0$ olan d_1 ve d_2 doğrularını alalım

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \ldots d_1 \\ A_1x+B_1y+C_1=0 \ldots d_2 \end{array}\right\}$$ Bunların birbirlerine göre durumlarını inceleyelim

1- Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi Δ olsun. Eğer rank $\Delta = 2$ ise, yani $\det \Delta \neq 0$ ise bu denklem sisteminin bir tek ve yalnız bir çözümü vardır.



2- Eğer rank $\Delta = 1$ ise, yani $\det\Delta = 0$ ise $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB_1 = A_1B$

$\Rightarrow \dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1}$ (paraleldir.)

rank $\Delta = 1$ fakat $\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$

rank $\Delta = 1$ fakat $\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$ dır. $AC_1 = A_1C \Rightarrow \dfrac{A}{A_1} = \dfrac{C}{C_1}$

$\Rightarrow \dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1} \Rightarrow$ iki doğru çakışıktır.

TANIM 5.2.2

A matrisinin rankı p ise A matrisinden seçilebilen p mertebeli regüler bir alt matrisin determinantına, denklem sisteminin aslî determinantı denir. ve bu determinant δ_p ile gösterilir. Rankı r olan bir matrisin determinantı,

$$\delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

ise aşağıdaki determinantlara verilen denklem sisteminin karakteristik determinantı ya da ilaveli aslî determinantları denir.

$$\delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{array}$$

$s = r+1, r+2, \ldots, p \qquad s < p$

Örnek 5.2.1. $x-3y-2z=-1$ $\quad x+4y-2z=4$

$2x+y-4z=3$ $\quad 5x+6y-10z=10$

denklem sisteminin asli determinantlarını bulalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & +6 & -10 \end{vmatrix}_{4\times 3}$$

rank $\Delta \neq 4$ $\quad$ rank $\Delta = 2$ dir.

(3×3 lerin determinantları sıfırdan farklıdır.)

$$\delta_s = r+1$$

$$\delta_2 = \delta_{2+1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \underset{r+2}{\delta_{2+2}} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

Bu denklem sisteminin iki tane karakteristik (ilaveli asli) determinantı var.

5.4. Üç Düzlemin Birbirine Göre Durumları : (R^3 de)

3-boyutlu uzayda üç düzlem,

$\alpha \ldots \; Ax+By+Cz+D=0$

$\beta \ldots \; A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\gamma \ldots \; A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

denklemleriyle verilsin. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi Δ olsun.

1- $\det\Delta \neq 0$ ise (rank $\Delta = 3$ ise) bu denklem sisteminin bir ve yalnız bir çözümü vardır.

2- $\det\Delta = 0$ ise (rank $\Delta \neq 3$, 2 veya 1 dir.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

a) rank $\Delta = 2$ ise $\quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$ fakat $\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ise

denklem sistemi tutarsızdır. Hiçbir ortak noktası yoktur. Fakat düzlemler ikişer ikişer kesişirler ve arakesitleri birbirine paraleldir.

$\delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$ fakat $\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ise

üç düzlem bir doğru boyunca kesişir.

(b) rank $A=1$ ise $\delta_1 = |A|$ olsun.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$ (İse iki düzlem birbirine paraleldir.)

$$\delta_{1+1} = \begin{vmatrix} A & D \\ A_1 & D_1 \end{vmatrix} \Rightarrow AD_1 = A_1 D_1 \Rightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{D}{D_1}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$$ (Çakışık olma durumu.)

Bu denklem sisteminin iki parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

$\delta_{1+1} = \begin{vmatrix} A & D \\ A_1 & D_1 \end{vmatrix} \neq 0$ ise rankı 2 dir. Tutarsız bir denklem sistemidir.

Çözümü yoktur. Ortak noktası da yoktur.

Alıştırmalar :

1- Aşağıdaki düzlem çiftlerinin arakesitlerini bulunuz.

a) $4x-5y+3z=3$
$4x-5y+2+9=0$

b) $2y+x+6z=5$
$3x-2y-10z=7$

c) $x=mz+a$
$y=nz+b$

2- $\left.\begin{array}{l} 2x+y-2z=11 \\ x-y+z=0 \\ x+2y-z=7 \end{array}\right\}$ Düzlemlerinin ne şekilde kesiştiklerini araştırınız.

3- $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z+1=0 \\ 5x+z-1=0 \\ 23x+0y+4z-6=0 \end{array}\right\}$ 〃 〃 〃 〃

4- $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z}{3}$ doğrusu $4x+2y+2z=9$ düzlemine paralel olup olmadığını araştırınız.

5- $x=-2+\frac{2t}{3}$, $y=-\frac{2t}{3}$, $z=-6+\frac{t}{3}$ doğrusunun $x-2y-6z+38=0$ düzlemine çakışık olup olmadığını araştırınız.

6- $\left.\begin{array}{l} 2x+4y+2z=3 \\ 3x+3y+z=0 \\ 3x-6y-5z=8 \end{array}\right\}$ Düzlemlerinin kesişip kesişmediklerini araştırınız.

7- $2x+y-z=1$ düzlemi ile $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ doğrusu arasındaki açıyı bulunuz.

8- $\left.\begin{array}{l} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{array}\right\}$ Düzlemlerinin durumlarını λ'ya göre inceleyiniz.

Çözümler:

1- a) $\frac{4}{4}=\frac{5}{5}\neq\frac{3}{1}$ iki düzlem paralel değildir.

$$\left.\begin{aligned}4x+3z&=5y+3\\4x+z&=5y-9\end{aligned}\right\}\quad x=\frac{\begin{vmatrix}5y+3&3\\5y-9&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&3\\4&1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}5y&3\\5y&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&3\\-9&1\end{vmatrix}}{-8}=\frac{\begin{vmatrix}5&3\\5&1\end{vmatrix}y+30}{-8}$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{4}y-\frac{15}{4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4&5y+3\\4&5y-9\end{vmatrix}}{-8}=\frac{\begin{vmatrix}4&3\\4&-9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&5y\\4&5y\end{vmatrix}}{-8}$$

$$\Rightarrow z=6$$

$$\frac{x+\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}}=y\ ,\ z=6$$

b) $$\left.\begin{aligned}x+2y&=5-6z\\3x-2y&=7+10z\end{aligned}\right\}\quad x=\frac{\begin{vmatrix}5-6z&2\\7+10z&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\3&-2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}5&2\\7&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-6&2\\10&-2\end{vmatrix}z}{-8}=3+z$$

$$x=3+z$$

$$\left.\begin{aligned}x+2y&=5-6z\\3x-2y&=7+10z\end{aligned}\right\}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&5-6z\\3&7+10z\end{vmatrix}}{-8}=\frac{\begin{vmatrix}1&-6z\\3&10z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&5\\3&7\end{vmatrix}}{-8}$$

$$y=-\frac{7}{2}z+1$$

$x-3=z$

$y-1=-\frac{7}{2}z\Rightarrow\frac{y-1}{-\frac{7}{2}}=z$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}}=\frac{z}{1}$$

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$

$(3,1,0)$ dan geçen doğrultman parametresi $1,-\frac{7}{2},1$ olan doğru denklemidir.

(y ile z, x cinsinden bulunabilir veya x ile z, y cinsinden bulunabilir.)

2- $$\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=2(-1)-(-2)-2(3)=-2+2-6=-6\neq0$$ rankı 3 tür.

O halde bu üç düzlem bir noktada kesişir.

3- $$\begin{vmatrix}2&-3&1\\5&0&1\\23&3&4\end{vmatrix}=2(-3)+3(-3)+1(15)=0$$ rank 3 olamaz.

$$\begin{vmatrix}2&-3&-1\\5&0&1\\23&3&6\end{vmatrix}=0$$ ise tutarlıdır. Değilse tutarsızdır. $\Rightarrow$ bir doğru boyunca kesişirler.

$=0$ dır. Üç düzlem bir doğru boyunca kesişir.

6- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \end{vmatrix} = -18+72-54=0$ bir noktada kesişmezler. Rankı 2 dir.

İlaveli aslî determinantına bakalım.

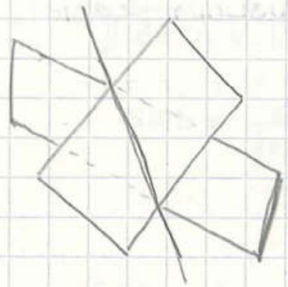
$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 48-96-81 \neq 0$ denklem tutarsızdır. Arakesitleri ikişer ikişer paraleldir.

5.5. Bir Doğrudan Geçen Düzlemler (Düzlem Demeti)

$$\left.\begin{aligned} \alpha \; \ldots \; Ax+By+Cz+D &= 0 \\ \beta \; \ldots \; A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha + \lambda\beta = 0$$

$$(A+\lambda A_1)x + (B+\lambda B_1)y + (C+\lambda C_1)z + D + \lambda D_1 = 0$$

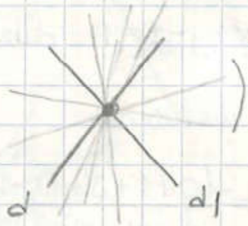


İki boyuta indirirsek,

$$d \ldots \; Ax+By+C=0$$

$$d_1 \ldots \; A_1x+B_1y+C_1=0$$

$$d + \lambda d_1 = 0$$



Doğru demeti

$$(A+\lambda A_1)x + (B+\lambda B_1)y + (C+\lambda C_1) = 0$$

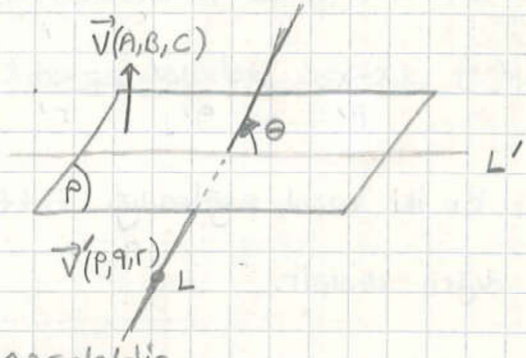
5.6. Bir Doğru İle Bir Düzlem Arasındaki Açı

$\dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}$ doğrusunun $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemiyle yaptığı açı,

$$\langle \vec{V} . \vec{V'} \rangle = \|\vec{V}\| \|V'\| \cos(90-\theta)$$

$$Ap+Bq+Cr = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sin\theta$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}}$$



$Ap+Bq+Cr=0 \Rightarrow$ doğru düzleme paraleldir.

1- $Ap+Bq+Cr=0$ ve $Ax_0+By_0+Cz_0 \neq 0$ ise " " " 

2- $Ap+Bq+Cr=0$ ve $Ax_0+By_0+Cz_0=0$ ise düzlemin içindedir. 

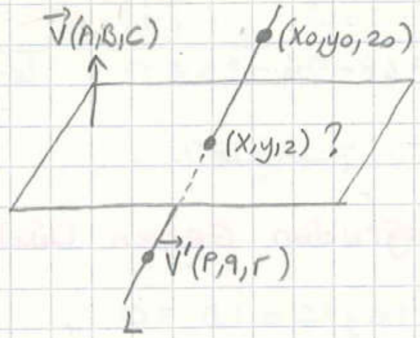
(Açı sıfırdır.)

3- $Ap+Bq+Cr \neq 0$ ise doğru düzlemi bir noktada keser.

(Açı sıfırdan farklı)

5.7. Bir Doğrunun Bir Düzlemle Kesim Noktası

$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ doğrusunun $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemiyle kesim noktası :



$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=\lambda$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_0+\lambda p\\ y&=y_0+\lambda q\\ z&=z_0+\lambda r \end{aligned}} \Bigg\} \cdots\cdots (5,7,1)$$

$$A(x_0+\lambda p)+B(y_0+\lambda q)+C(z_0+\lambda r)+D=0$$

$$\lambda(Ap+Bq+Cr)=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

$$\boxed{\lambda=-\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{Ap+Bq+Cr}} \cdots\cdots (5,7,2)$$

Örnek 5.7.1. $2x+y-z=1$ düzlemi ile $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ doğrusunun kesim noktasını bulunuz. $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,-3)$ $p=1$ $q=-1$ $r=3$

$$\lambda=\frac{-(0+1+3(-1)-1)}{2-1-3}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\lambda p &&= 0+\tfrac{3}{2}(1)=\tfrac{3}{2}\\ y&=y_0+\lambda q &&= 1+\tfrac{3}{2}(-1)=-\tfrac{1}{2}\\ z&=z_0+\lambda r &&= -3+\tfrac{3}{2}(3)=3/2 \end{aligned}\right\} \text{kesim noktaları } \left(\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right)$$

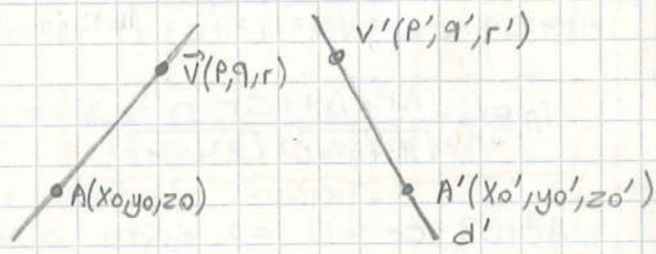
5.8. İki Doğrunun Kesişme Koşulu

$$\left.\begin{aligned} d \cdots \frac{x-x_0}{p}&=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=\lambda \\ d' \cdots \frac{x-x_0'}{p'}&=\frac{y-y_0'}{q'}=\frac{z-z_0'}{r'}=\mu \end{aligned}\right\}$$

1- d ve d' düzlemsel olmalı.

2- d ve d' paralel olmamalı.

Bu iki koşul sağlandığı taktirde, iki doğru kesişir.

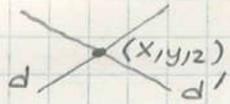


1. koşulu işleme dökelim.

$(AA',VV')=0$ Hacminin sıfır olması (karma çarpımlarının da) gerekir.

$$(AA',VV')=\begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}=0$$

2. $d \not\parallel d' \Rightarrow \vec{v} \not\parallel \vec{v}'$



$x = x_0 + \lambda p \qquad x = x_0' + \mu p'$

$y = y_0 + \lambda q \qquad y = y_0' + \mu q'$

$z = z_0 + \lambda r \qquad z = z_0' + \mu r'$

Bu iki eşitlikte λ ve μ bulunup bunlardan birinde yerine koyulur.

$$x = x_0 + \lambda p = x_0' + \mu p'$$

$$y = y_0 + \lambda q = y_0' + \mu q'$$

$$z = z_0 + \lambda r = z_0' + \mu r'$$

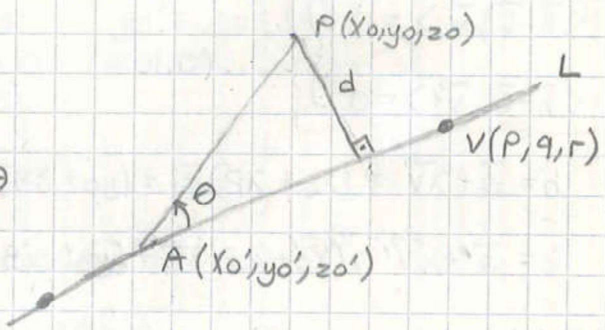
5.9. $\mathbb{R}^3$ de Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

1. Yol : $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $L = \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusuna olan uzaklığı ;

$\| \vec{AP} \wedge \vec{v} \| = \|AP\| . \|v\| \sin\theta$

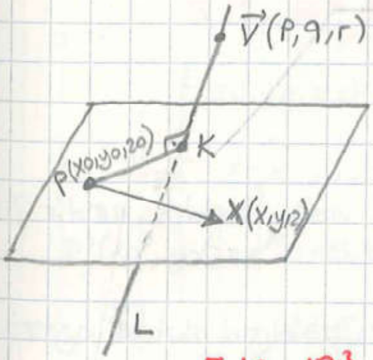
$\sin\theta = \frac{d}{\|AP\|} \Rightarrow d = \|AP\| \sin\theta$

$$\boxed{d = \frac{\| \vec{AP} \wedge \vec{v} \|}{\|v\|}}$$



2. Yol : $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $L = \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusuna olan uzaklığı ; $\vec{PX} \perp \vec{v}$

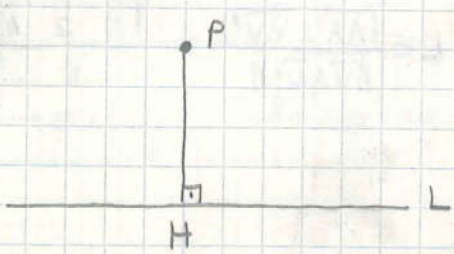
$(x-x_0)p + (y-y_0)q + (z-z_0)r = 0$ daha sonra bir doğrunun bir düzlemi kestiği nokta olan K'nın koordinatlarını bulup, P ile K arasında, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden bulunur.



5.10. $\mathbb{R}^3$ de Verilen İki Doğru Arasındaki En Kısa Uzaklık Ortak Dikme ve Dikme Ayakları

H noktasına dikme ayağı denir.

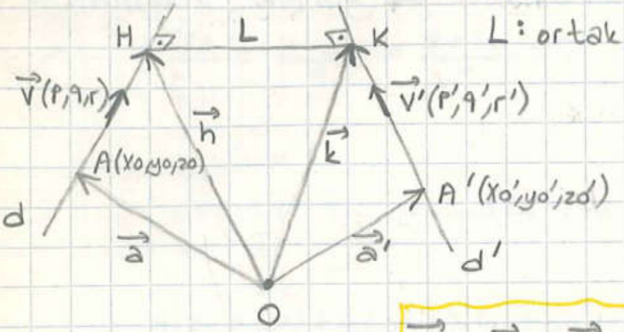
İki doğru arasındaki en kısa uzaklık ortak dikmeleridir.



I. Yol :

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \;\ldots\ldots d$$
$$\frac{x-x_0'}{p'}=\frac{y-y_0'}{q'}=\frac{z-z_0'}{r'} \;\ldots\ldots d'$$

bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık, ortak ortak dikme uzunluğudur.



L : ortak dikme

$\vec{a}=x_0\vec{e_1}+y_0\vec{e_2}+z_0\vec{e_3}$

$\vec{V}=p\vec{e_1}+q\vec{e_2}+r\vec{e_3}$

$\vec{a'}=x_0'\vec{e_1}+y_0'\vec{e_2}+z_0'\vec{e_3}$

$\vec{V'}=p'\vec{e_1}+q'\vec{e_2}+r'\vec{e_3}$

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\vec{h}&=\vec{a}+\lambda\vec{V}\\ \vec{k}&=\vec{a'}+\mu\vec{V'}\end{aligned}\right\}} \;\ldots\ldots(5.10.1)$$

$L=\|\vec{h}-\vec{k}\|$ $\qquad \overrightarrow{HK}$, hem d doğrusuna hem de d′ doğrusuna diktir.

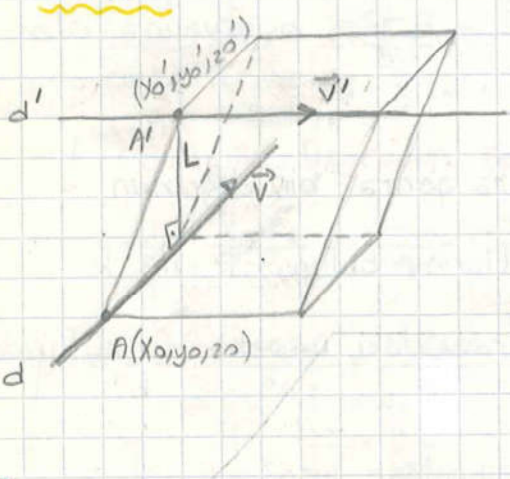
$$\boxed{\left.\begin{aligned}\langle\vec{h}-\vec{k},\vec{V}\rangle&=0\\ \langle\vec{h}-\vec{k},\vec{V'}\rangle&=0\end{aligned}\right\}} \;\ldots\ldots(5.10.2)$$

Bu iki denklemde λ ve μ yü bulup, (5.10.1) de yerine koyduğumuzda;

$\vec{h}=\vec{a}+\lambda\vec{V}=(x_0+\lambda p)\vec{e_1}+(y_0+\lambda q)\vec{e_2}+(z_0+\lambda r)\vec{e_3}$ $\quad$ H′ın koordinatını verir.

$k=\vec{a'}+\mu\vec{V'}=(x_0'+\mu p')\vec{e_1}+(y_0'+\mu q')\vec{e_2}+(z_0'+\mu r')\vec{e_3}$ $\quad$ K′nın koordinatını verir.

II. Yol :



Paralel yüzün hacmi = Taban alanı . yüksekLik

Taban alanı ; V ile V′ çarpımının normu.

Paralel yüzün hacmi $(\overrightarrow{AA'},\vec{V},\vec{V'})$

$$(\overrightarrow{AA'},\vec{V},\vec{V'})=L\,.\,\|\vec{V}\wedge\vec{V'}\|$$

$$\boxed{L=\frac{(\overrightarrow{AA'},\vec{V},\vec{V'})}{\|\vec{V}\wedge\vec{V'}\|}}$$

Örnek // $\quad d \ldots\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{1},\ z=0$

$\qquad d' \ldots\ x-3=0,\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{4}$

d ve d′ arasındaki en kısa uzaklık nedir?

$A(3,4,0)$ $\quad A'(3,2,5)$ $\qquad$ (determinant negatif çıksa bile, uzaklığın mutlak değeri alınır.)

$\vec{V}(1,1,0)$ $\quad \vec{V'}(0,2,4)$

$$\vec{V}\wedge\vec{V'}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=4e_1-4e_2+2e_3$$

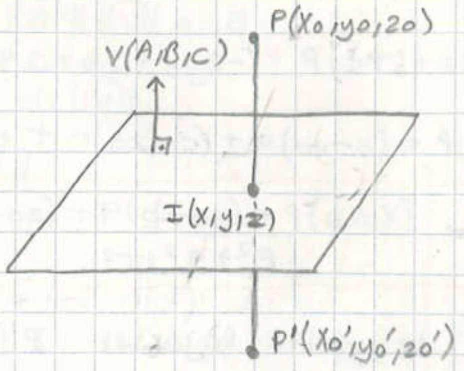
$$L=\frac{(\overrightarrow{AA'},\vec{V},\vec{V'})}{\|\vec{V}\wedge\vec{V'}\|}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}}{6}=3\text{ br} \;//$$

$$\|\vec{V}\wedge\vec{V'}\|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$$

5.11. $\mathbb{R}^3$ de Bir Düzleme Göre Yansıma

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $Ax+By+Cz+D=0$ doğrusuna göre yansıması olan $P'(x_0', y_0', z_0')$ noktasının koordinatları : (yansıma = simetri)

PP' düzleme diktir. Düzlemin doğrultman vektörüne paraleldir.



$$I=\left(\frac{x_0+x_0'}{2}, \frac{y_0+y_0'}{2}, \frac{z_0+z_0'}{2}\right)$$

$\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{V}$ olduğundan

$$\frac{x_0'-x_0}{A}=\frac{y_0'-y_0}{B}=\frac{z_0'-z_0}{C}=t$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0' &= x_0+At \\ y_0' &= y_0+Bt \\ z_0' &= z_0+Ct \end{aligned}} \quad \text{...... (5.11.1)}$$

$$\frac{A(x_0+x_0')}{2}+\frac{B(y_0+y_0')}{2}+\frac{C(z_0+z_0')}{2}+D=0$$

$$A(x_0+x_0')+B(y_0+y_0')+C(z_0+z_0')+2D=0$$

$$A(x_0+x_0+At)+B(y_0+y_0+Bt)+C(z_0+z_0+Ct)+2D=0$$

$$A(2x_0+At)+B(2y_0+Bt)+C(2z_0+Ct)+2D=0$$

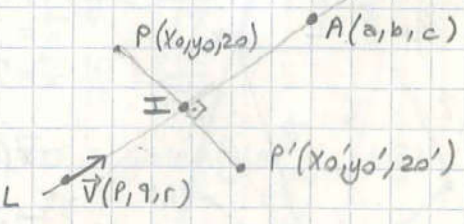
$$\boxed{t=-\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{-------- (5.11.2)}$$

Bu t değerini 5.11.1 de yerine koyarsak, P noktasının düzleme göre yansıması olan P' noktasının koordinatlarını bulmuş oluruz.

5.12. $\mathbb{R}^3$ de Bir Doğruya Göre Yansıma

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının,

L .... $\dfrac{x-a}{p}=\dfrac{y-b}{q}=\dfrac{z-c}{r}$ doğrusuna göre $P'(x_0', y_0', z_0')$ noktasının koordinatları :



$\overrightarrow{PP'} \perp L$ olduğundan $\langle \overrightarrow{PP'}, \vec{V} \rangle = 0$ dır.

$$(x_0'-x_0)p+(y_0'-y_0)q+(z_0'-z_0)r=0 \quad \text{----- (5.12.1)}$$

$$I=\left(\frac{x_0'+x_0}{2}, \frac{y_0'+y_0}{2}, \frac{z_0'+z_0}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{x_0'+x_0}{2}-a}{p}=\frac{\frac{y_0'+y_0}{2}-b}{q}=\frac{\frac{z_0'+z_0}{2}-c}{r}=t$$

x_0', y_0' ve z_0' yü çekelim.

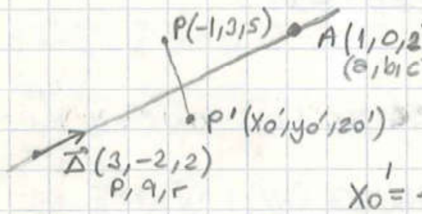
$$\frac{x_0'+x_0}{2} - a = pt \Rightarrow x_0' = -x_0 + 2(a+pt)$$
$$\frac{y_0'+y_0}{2} - b = qt \Rightarrow y_0' = -y_0 + 2(b+qt)$$
$$\frac{z_0'+z_0}{2} - c = rt \Rightarrow z_0' = -z_0 + 2(c+rt) \quad \ldots\ldots(5.12.2)$$

Burada t bilinmeyendir. t'yi bulup yerine koyalım.

$$(-2x_0+2a+2pt)p + (-2y_0+2b+2qt)q + (-2z_0+2c+2rt)r = 0$$
$$(a-x_0)p + (b-y_0)q + (c-z_0)r + t(p^2+q^2+r^2) = 0$$
$$\boxed{t = \frac{(x_0-a)p + (y_0-b)q + (z_0-c)r}{p^2+q^2+r^2}} \quad \ldots\ldots (5.12.3)$$

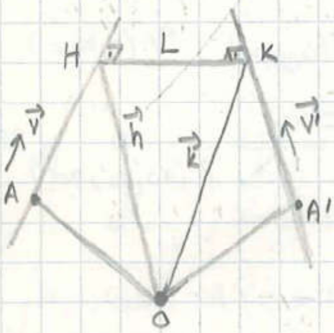
(5.12.2) de yerine koyarsak $P'(x_0', y_0', z_0')$ koordinatlarını bulmuş oluruz.

Örnek 5.12.1. $P(-1,3,5)$ noktasının, $A(1,0,2)$ noktasından geçen ve $\vec{\Delta}(3,-2,2)$ doğrultusuna paralel olan doğruya göre yansımasını bulunuz.



$$t = \frac{(-1-1)3 + (3-0)(-2) + (5-2)2}{9+4+4} = \frac{-6-6+6}{17} = \frac{-6}{17}$$
$$x_0' = -(-1) + 2\left(1+3\left(-\tfrac{6}{17}\right)\right) = 1 + 2\left(1-\tfrac{18}{17}\right) = 1 - \tfrac{2}{17} = \tfrac{15}{17}$$
$$y_0' = -3 + 2\left(0+(-2)\left(-\tfrac{6}{17}\right)\right) = -3 + 2\left(\tfrac{12}{17}\right) = -3 + \tfrac{24}{17} = -\tfrac{27}{17}$$
$$z_0' = -5 + 2\left(2+2\left(-\tfrac{6}{17}\right)\right) = -5 + 2\left(2-\tfrac{12}{17}\right) = -5 + \tfrac{44}{17} = -\tfrac{41}{17}$$
$$P_0'\left(\tfrac{15}{17}, -\tfrac{27}{17}, -\tfrac{41}{17}\right)$$

Soru //
$$\left.\begin{aligned} \vec{X}(u) &= (\sqrt{2}-1)\vec{e_1} - \vec{e_3} + u(\vec{e_1} + \sqrt{2}\vec{e_2}) \\ \vec{X}(v) &= -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + v(\vec{e_2} + \vec{e_3}) \end{aligned}\right\}$$
doğruları arasındaki en kısa uzaklık nedir?



$$\vec{h} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$$
$$\vec{k} = \vec{a'} + \mu\vec{v'}$$
$$\vec{X}(u) = (\sqrt{2}-1+u)\vec{e_1} + \sqrt{2}u\,\vec{e_2} - \vec{e_3}$$
$$\vec{X}(v) = -\vec{e_1} + (2+v)\vec{e_2} + v\vec{e_3}$$
$$L = \frac{(\vec{AA'}, \vec{v}, \vec{v'})}{\|\vec{v}\wedge\vec{v'}\|}$$

$\vec{a} = (\sqrt{2}-1)\vec{e_1} - \vec{e_3}$ $\quad A(\sqrt{2}-1, 0, -1)$

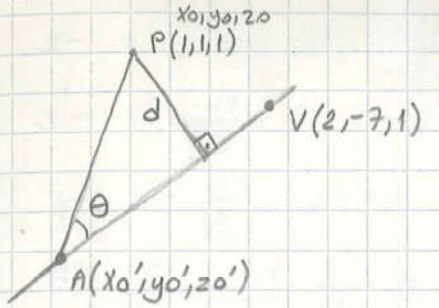
$\vec{a'} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ $\quad A'(-1,2,0)$

$\vec{v} = \vec{e_1} + \sqrt{2}\vec{e_2}$ $\quad \vec{v}(1,\sqrt{2},0)$

$\vec{v'} = \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad \vec{v'}(0,1,1)$

$$\vec{v}\wedge\vec{v'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}e_1 - e_2 + e_3$$
$$\|\vec{v}\wedge\vec{v'}\| = \sqrt{2+1+1} = 2$$
$$L = \frac{\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2} \text{ br } //$$

Soru// $P(1,1,1)$ noktasının $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z+1}{1}$ doğrusuna olan uzaklığı nedir?



$$\sin\theta = \frac{\|AP\|}{d} \Rightarrow d = \|AP\| \sin\theta$$

$$\|\vec{AP} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{AP}\| \, \|\vec{V}\| \sin\theta$$

$$\Rightarrow \|\vec{AP} \wedge \vec{V}\| = d . \|\vec{V}\|$$

$A(3,1,-1)$

$$\Rightarrow d = \frac{\|\vec{AP} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$$

$\|V\| = \sqrt{4+49+1} = \sqrt{54}$ $\qquad \vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = (-2, 0, 2)$

$$|\vec{AP} \wedge \vec{V}| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 14\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 14\vec{e_3} \qquad \|\vec{AP} \wedge \vec{V}\| = \sqrt{14^2+4+14^2}$$

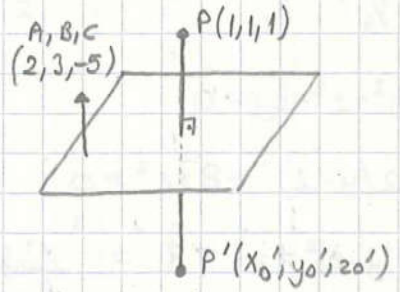
$$d = \frac{\|\vec{AP} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|} = \frac{\sqrt{14^2+4+14^2}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{214}{27}} \text{ br} //$$

Soru// $P(1,1,1)$ noktasının $\underset{A}{2x} + \underset{B}{3y} - \underset{C}{5z} + \underset{D}{4} = 0$ düzlemine göre yansımasını bulunuz.
(x_0, y_0, z_0)

$x_0' = x_0 + At$

$y_0' = y_0 + Bt$

$z_0' = z_0 + Ct$

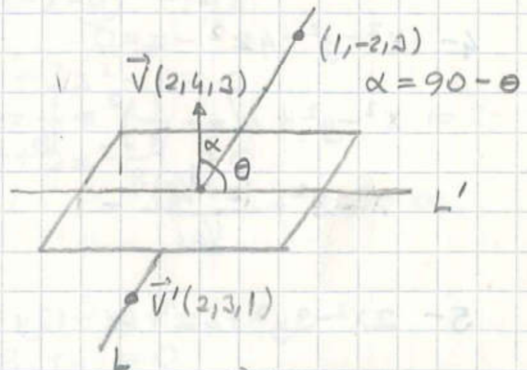


$$t = -\frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0) + D}{A^2+B^2+C^2}$$

$$t = -\frac{2(2+3-5)+4}{4+9+25} = \frac{4}{38} = \frac{2}{19}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= 1 + \frac{4}{19} = \frac{23}{19} \\ y_0' &= 1 + \frac{6}{19} = \frac{25}{19} \\ z_0' &= 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19} \end{aligned}\right\} P'\left(\frac{23}{19}, \frac{25}{19}, \frac{9}{19}\right)$$

Soru// $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ doğrusunun $\underset{A}{2x} + \underset{B}{4y} + \underset{C}{3z} - 5 = 0$ düzlemiyle yaptığı açıyı bulunuz.



$$\sin\theta = \frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\cos(90-\theta) = \sin\theta$$

$$\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle = \|\vec{V}\| . \|\vec{V}'\| \cos(90-\theta)$$

$$19 = \sqrt{4+16+9} . \sqrt{4+9+1} \sin\theta$$

$\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle = 4 + 12 + 3 = 19$

$$\sin\theta = \frac{19}{\sqrt{29} . \sqrt{14}} = \frac{19}{\sqrt{406}} //$$

(S:580 devamı) Alıştırmalar'ın çözümleri :

1- $x^2+y^2+z^2-4x-2y=0 \quad x+2y+z-1=0$

$z=1-x-2y$ Xoy üzerindeki izdüşümü

$\Rightarrow x^2+y^2+(1-x-2y)^2-4x-2y=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+1+x^2+4y^2-2x-4y+4xy-4x-2y=0$

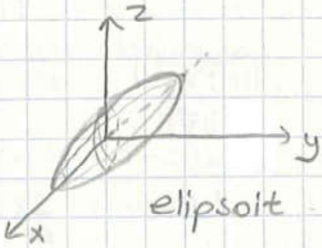
$\Rightarrow 2x^2+5y^2-6x-6y+4xy+1=0$

2- $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0 \quad z=0 \quad \Delta(1,-1,3)$

$z+3t=0 \Rightarrow t=-\frac{z}{3}$

$\frac{(x+1.t)^2}{9}+\frac{(y-1.t)^2}{4}-1=0 \Rightarrow \frac{(x-\frac{z}{3})^2}{9}+\frac{(y+\frac{z}{3})^2}{4}-1=0$ //

(S:595 çözümler) :



elipsoit

I- 1- $x^2+4y^2+2z^2-4z=0$

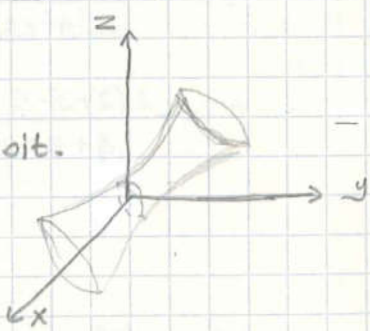
$\Rightarrow (x-0)^2+4y^2+2(z-1)^2-2=0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1/4}+\frac{(z-1)^2}{1/2}=2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1/2}+\frac{(z-1)^2}{1}=1$

2- $x^2+2y^2+z^2-8y=0$

$\Rightarrow x^2+2(y-2)^2-8+z^2=0$

$\Rightarrow x^2+2(y-2)^2+z^2=8 \Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{z^2}{8}=1$ elipsoit.



3- $x^2-y^2-2z^2-x+4=0$

tek kanatlı hiperboloit.

$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-y^2-2z^2+4=0$

$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2-y^2-2z^2=-\frac{15}{4} \Rightarrow -\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{15/4}+\frac{y^2}{15/4}+\frac{z^2}{15/8}=1$

4- $x^2-y^2+4z^2-z=0$

tek kanatlı hiperboloit.

$\Rightarrow x^2-y^2+4(z-\frac{1}{8})^2-\frac{1}{16}=0$

$\Rightarrow x^2-y^2+\frac{(z-1/8)^8}{1/64}=1$

5- $2x^2-3y^2+4z^2+4x-12y+16z-1=0$

$\frac{(x-1)^2}{7/2}-\frac{(y+3)^2}{7/3}+\frac{(z-2)^2}{7/4}=1$ tek kanatlı hiperboloit.

II- 1- $x^2+4y^2+2z^2-1=0 \Rightarrow x^2+\frac{y^2}{1/4}+\frac{z^2}{1/2}=1$ elipsoit

2- $x^2+y^2-z=0 \Rightarrow x^2+y^2=z$ eliptik paraboloit.

3- $x^2+\frac{y^2}{1/2}+z^2=1$ elipsoit.

4- $x^2+\frac{y^2}{1/3}-z^2=1$ tek kanatlı hiperboloit.

5- $\frac{x^2}{1/4}-y^2-\frac{z^2}{1/2}=1$ çift kanatlı hiperboloit.

6- $x^2-\frac{y^2}{1/2}=4z$ hiperbolik paraboloit.

7- $\frac{x^2}{1/3}+\frac{y^2}{1/4}-z^2=0$ koni.

8- $x^2+y^2-\frac{z^2}{1/4}=0$ koni

9- $x^2+\frac{y^2}{1/6}=1$ silindir. (eliptik)

10- $\frac{x^2}{1/2}-y^2=1$ silindir. (hiperbolik)

11- $-\frac{x^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/3}=1$ silindir. (")

12- $y=2z^2$ parabolik silindir.

13- $2x+5y-10=0$ düzlem

14- $y=2x$ düzlem

15- $x+y+z-1=0$ düzlem

16- $x=\mp 5$, $y=\mp 2$, $z=\mp 4$ düzlem

III - $x^2+y^2+2z^2-1=0$, $x+y+z-1=0$ Arakesitleri $\Rightarrow$

$xoy \Rightarrow x^2+y^2=1$ çemberi

$xoz \Rightarrow x^2+2z^2=1$ elipsi

$yoz \Rightarrow y^2+2z^2=1$ elipsi İzdüşümleri $\Rightarrow$

$xoy \Rightarrow z=1-x-y$, $x^2+y^2+2(1-x-y)^2-1=0$

$xoz \Rightarrow y=1-x-z$, $x^2+(1-x-z)^2+2z^2-1=0$

$yoz \Rightarrow x=1-y-z$, $(1-y-z)^2+y^2+2z^2-1=0$

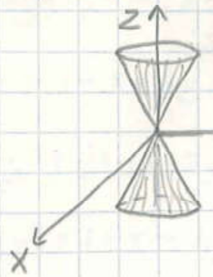
IV- 1- $x^2-4y^2-2z=0$
$2x-y+z-4=0$

$xoy \Rightarrow z=y-2x+4 \Rightarrow x^2-4y^2-2(y-2x+4)=0$

$yoz \Rightarrow x=\frac{4-z+y}{2} \Rightarrow \frac{(4-z+y)^2}{4}-4y^2-2z=0$

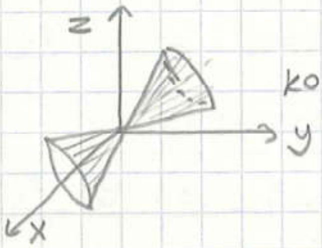
$xoz \Rightarrow y=2x+z-4 \Rightarrow x^2-4(2x+z-4)^2-2z=0$

V - a) $X^2+4y^2-z^2=0 \Rightarrow X^2+\frac{y^2}{1/4}-z^2=0$



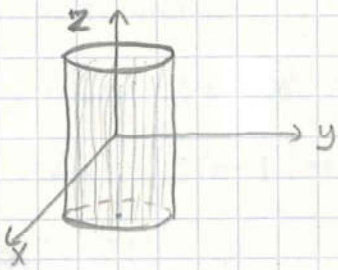
Koni.

b) $4X^2-3y^2-z^2=0 \Rightarrow \frac{X^2}{1/4}-\frac{y^2}{1/3}-z^2=0$



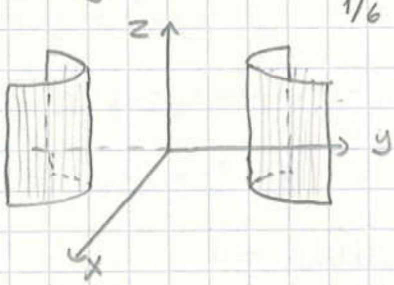
koni

c) $X^2+2y^2-1=0 \Rightarrow X^2+\frac{y^2}{1/2}=1$



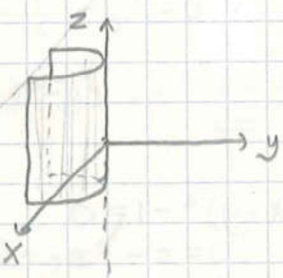
eliptik silindir.

d) $6X^2-y^2-1=0 \Rightarrow \frac{X^2}{1/6}-y^2=1$



hiperbolik silindir.

e) $y^2-4X=0 \Rightarrow y^2=4X$



parabolik silindir.

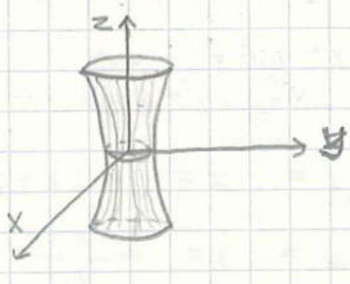
VI - a) $4X^2+9y^2-36z^2-36=0$

$\Rightarrow \frac{4X^2}{36}+\frac{9y^2}{36}-\frac{36z^2}{36}=1$

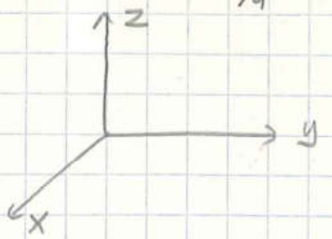
$\Rightarrow \frac{X^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$

Ana doğrusu z ekseni olan

tek kanatlı hiperboloit



b) $x^2-4y^2-8z=0 \Rightarrow x^2-\frac{y^2}{1/4}=8z$ hiperbolik paraboloit.



VII - a) $\left.\begin{aligned} 2x+z&=m(1+4y) \\ 2x-z&=\frac{1}{m}(1-4y) \end{aligned}\right\}$ $4x^2-z^2=(1-16y^2) \Rightarrow 4x^2+16y^2-z^2=1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/16}-z^2=1$$

Ana doğrusu z ekseni olan tek kanatlı hiperboloit.

b) $\left.\begin{aligned} x+4z&=m(1-2y) \\ x-4z&=\frac{1}{m}(1+2y) \end{aligned}\right\}$ $x^2-16z^2=1-4y^2 \Rightarrow x^2+4y^2-16z^2=1$

$$\Rightarrow x^2+\frac{y^2}{1/4}-\frac{z^2}{1/16}=1$$

Ana doğrusu z ekseni olan tek kanatlı hiperboloit.

c) $\left.\begin{aligned} x+4y&=mz \\ x-4y&=\frac{2}{m} \end{aligned}\right\}$ $x^2-16y^2=2z \Rightarrow x^2-\frac{y^2}{1/16}=2z$

Ana doğrusu ekseni olan hiperbolik paraboloit.

1) Aşağıdaki koniklerin odak ve doğrultmanlarını bulunuz.

a) $x^2 - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

b) $y^2 - 4x = 0$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$

2) $8x^2 \ldots^2 + 4mxy + m(m+1)y^2 - 2x + y = 0$ konik ailesi veriliyor. m nin değerlerine göre ailedeki konik tiplerini belirtiniz. $(1,-1)$ noktasından geçen konik ailesinin denklemini bulunuz. Tiplerini belirtiniz, varsa merkezini koordinatlarını bulunuz.

3) Aşağıda odağı ve doğrultmanı verilen koniklerin genel denklemini yazınız ve tiplerini belirtiniz. Merkezinin cinsinin belirtiniz ve merkezinin koordinatlarını bulunuz.

a) Odağı $F_1(1,0)$, doğrultmanı $2x=3$ doğrusu

b) " $F_1(1,1)$, " $2x-3y-4=0$ "

4) Koniklerin kutupsal koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözümler: $x^2 - \frac{y^2}{9} - 1 + \lambda(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (1+\lambda)x^2 + (-\frac{1}{9}+\lambda)y^2 - 2x_0\lambda x - 2\lambda y_0 y +$

$+ \lambda x_0^2 + \lambda y_0^2 - 1$

$\lambda = \frac{1}{9}$ $y_0 = 0$ dır.

$(\alpha x + \beta y + \delta)^2$

$\frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x_0 x + \frac{1}{9}x_0^2 - 1$

$\frac{x_0^2}{81} + \frac{10}{9}\left(1 - \frac{x_0^2}{9}\right) = 0$

$x_0 = \mp\sqrt{10}$ $F_1(\sqrt{10}, 0)$

$\frac{1}{9}\left(10x^2 - 2\sqrt{10}x + 1\right) = \frac{1}{9}(\sqrt{10}x - 1)^2$

$\sqrt{10}x - 1 = 0$ doğrultm. $\rightarrow x$ çekilirse eşit olur.

$F_2(-\sqrt{10}, 0)$ $\sqrt{10}x + 1 = 0$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 1 + 9$

$= 10$

$c = \mp\sqrt{10}$

$x = \mp\frac{a^2}{c} = \mp\frac{1}{\sqrt{10}}$

b) $y^2 - 4x + \lambda(x-x_0)^2 + \lambda(y-y_0)^2$

$\lambda x^2 + (1+\lambda)y^2 - (2x_0\lambda + 4)x - 2y_0\lambda y + \lambda x_0^2 + \lambda y_0^2$

$\lambda = -1$ $y_0 = 0$

$-x^2 + (2x_0 - 4)x - x_0^2$

$-(x^2 + 2x + 1) = -(x+1)^2$

$x + 1 = 0$

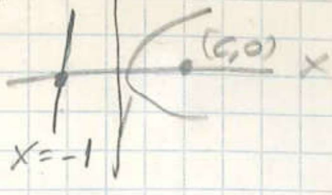
$(x_0 - 2)^2 - x_0^2 = 0$

$x_0^2 - 4x_0 + 4 - x_0^2 = 0$

$x_0 = 1$

$F_1(1,0)$

$y^2 = 4x$



c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 + \lambda(x-x_0)^2 + \lambda(y-y_0)^2 =$

$= \left(\frac{1}{9} + \lambda\right)x^2 + \left(\frac{1}{16} + \lambda\right)y^2 - 2x_0\lambda x - 2y_0\lambda y + \lambda x_0^2 + \lambda y_0^2 - 1$

$x_0 = 0 \quad \lambda = -\frac{1}{9}$

$\underset{(9)}{\frac{1}{16}} - \underset{(16)}{\frac{1}{9}} = \qquad -\frac{7}{144}y^2 - \frac{2}{9}y_0 y - \frac{1}{9}y_0^2 - 1$

$\frac{y_0^2}{81} - \frac{7}{144}\left(\frac{y_0^2}{9} + 1\right) = 0$

$\frac{y_0^2}{81} - \frac{7y_0^2}{\cancel{144}\ 16.81} = \frac{7}{\cancel{144}\ 16.9}$

$\frac{y_0^2 - 7y_0^2}{\cancel{81}\ 16} = \frac{63}{16}$

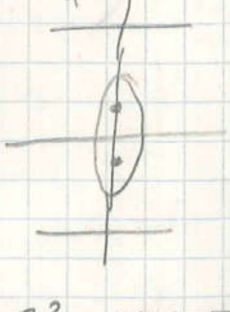
$9y_0^2 = 63$

$y_0^2 = 7 \quad y_0 = 7\sqrt{7}$

$(0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$

$-\frac{1}{9}\left(\frac{7}{16}y^2 - 2\sqrt{7}y - 16\right) = -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}y - 4\right)^2$

$\frac{\sqrt{7}}{4}y - 4 = 0 \quad \frac{\sqrt{7}}{4}y + 4 = 0$ doğrultmanlardır.



(2) $B^2 - 4AC = 16m^2 - 32m(m+1) = -16m^2 - 32m$

m	$-\infty$		-2		0	
B^2-4AC		$-$	0	$+$	0	$-$

$-16m(m+2) = 0$

elips tipinde   parabol $m=$

$m > 0$ ise elips tipinde.

$0 > m > -2$ ise hiperbol

$8-4m+m(m+1)-7-1=0$

$\cancel{8}-4m+m^2+m-\cancel{4}-\cancel{4}=0$

$m^2-4m+m=0$

$m^2-3m=0$

$m(m-3)=0$

$m=0 \vee m=3$

$8x^2+12xy+12y^2-7x+y=0$

$16x+12y+\cancel{12y^2}-7=0$

$12x+24y+1=0$ $\quad x=\frac{9}{4} \quad y=-\frac{5}{12}$

③ $F_1(x_0,y_0) \quad P(x,y)$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(\alpha x+\beta y+\gamma)^2 \qquad \alpha x+\beta y+\gamma=0$

$(x-1)^2+y^2=(2x-3)^2$

$x^2-2x+1+y^2-4x^2+12x-9=0$

$-3x^2-10x+y^2-8=0$

$3x^2+10x-y^2+8=0 \qquad B^2-4AC>0$ hiperbol tipinde

ⓑ $(x-1)^2+(y-1)^2=(2x-3y-4)^2$

$\cancel{x^2-2x+1-y^2+2y-1-4x^2-9y^2-16}$ - - - -

$3x^2-12xy+8y^2-14x+24y+14=0$

$6x-12y-14=0$