DİFERANSİYEL DENKLEMLER

(Genel)

Tanım: x bağımsız değişkeni $y=f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun n. mertebeye kadar türevleri arasında

$F(x, y, y', y'', ---, y^{(n)})=0$ şeklindeki bir bağıntıya diferansiyel denklem denir.

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ---, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\underbrace{\boxed{\frac{d}{dx}}}_{D}(y)=Dy$$

$$F(x, y, Dy, D^2y, ---, D^ny)=$$

1) $y'-3x+5=0$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-5y=e^{3x}$

$$D^2y+3Dy-5y=e^{3x}$$

M. Özkan
S. Er
A. Kara
S. Uslu
M. Tosun
M. Bayram
O. Baher
O. Baykal
S. Çalışkan

DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

*1) Yalnız 1 bağımsız değişkeni içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklem adı verilir.

2) Birden fazla değişkeni içeren diferansiyel denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

DİFERANSİYEL DENKLEMİN MERTEBESİ

Diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesi o diferansiyel denklemin mertebesini verir.

$y'-3x+5=0$ 1. mertebeden dif. denk.

$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-5y=e^{3x}$ 2.

DİFERANSİYEL DENKLEMİN DERECESİ

Bir dif. denklemde en yüksek mertebeden türevin derecesine dif. denklemin derecesi denir.

1) $y''^2 = (1+y'^2)^3$ 2. mertebe
2. dereceden

2) $y''' = \sqrt{x+y}$ 3. mertebe
1. dereceden

3) $y''' + y'^2 = \log y'$ 3. mertebe
Derecesi tanımlanamayan dif. denk.
(log'dan dolayı)

Bir dif. denklemin derecesi denklemdeki bütün türevlere göre tam hale getirildikten sonra incelenir.

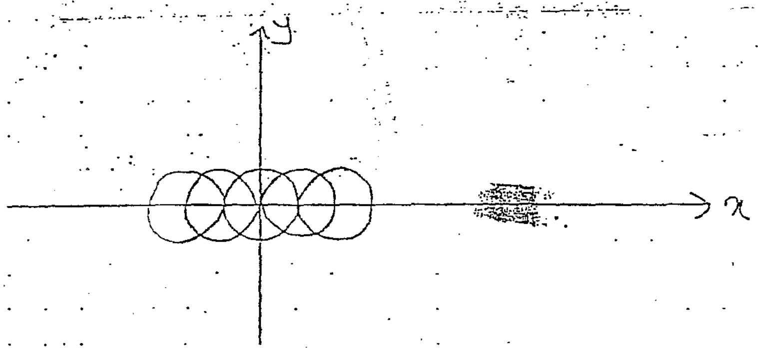
BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN MEYDANA GELMESİ

Örnek: $y = \sqrt{R^2-(x-C)^2}$ şeklinde bir eğri ailesi veriliyor.

$y^2 = R^2-(x-C)^2$

$(x-C)^2+y^2=R^2 \Longrightarrow x-C=\sqrt{R^2-y^2}$

Yarıçapı R olan merkezi x ekseninde bulunan daireleri gösteren bir ailedir.



$$y' = \frac{-\cancel{2}(x-C)}{\cancel{2}\sqrt{R^2-(x-C)^2}}$$

$$y' = \frac{-(x-C)}{y}$$

$$y \cdot y' = -(x-C)$$

$$\boxed{y \cdot y' = -\sqrt{R^2-y^2}}$$ Dif. denk.

* A305

Bulunan dif. denk. yukarıdaki eğri ailesine ait bir dif. denklemdir.

Sonuç: 1) 1 tane parametreye bağlı bir eğri ailesine ait dif. denklemin mertebesi 1'dir.

2) II. mertebeden bir dif. denklemin çözümü 2 parametreye bağlı bir eğri ailesini verir.

Genel halde düzlemdeki eğri ailesinin denklemi $y=f(x,C_1,C_2,---,C_n)$ şeklinde n tane parametreye bağlı olduğundan, bu eşitliğin n. defa x'e göre türevi alınır. $x,y,y',---,y^{(n)}$ ve $C_1,C_2,---,C_n$ parametreleri arasında verilen denklemlerle beraber n+1 tane bağıntı elde edilir. Bu denklemler arasında n tane parametre yok edilirse $F(x,y,y',---,y^{(n)})=$ şeklinde n. mertebeden bir dif. denklem bulunur.

Örnek: $y=C_1\cos nx+C_2\sin nx$ eğri ailesine ait dif. denklemi bulunuz. $(n=sabit)$

$$y'=-nC_1\sin nx+nC_2\cos nx$$

$$y''=-n^2C_1\cos nx-n^2C_2\sin nx$$

$$y''=-n^2(C_1\cos nx+C_2\sin nx)$$

$$\boxed{y''+n^2y=0}$$

BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

1) Genel Çözümü:

$F(x,y,y',y'',---,y^{(n)})=0$ şeklinde n. mertebede bir dif. denklemin genel çözümü $y=f(x,C_1,C_2,---,C_n$ dir.

Genel çözüm dif. denkleme ait eğri ailesinin denklemidir.

(Genel çözüm, içinde parametreler içeren çözümdür

2) Özel Çözümü:

Genel çözümdeki parametrelere verilen özel değerlerle bulunan çözüme dif. denklemin özel çözüm denir.

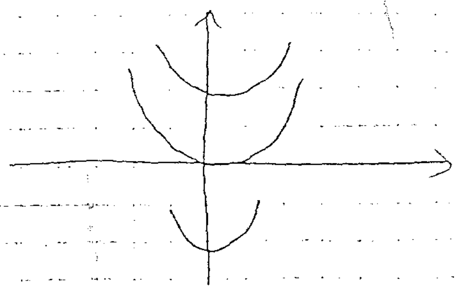
3) Tekil Çözüm:

Bir dif. denklemde genel çözümden elde edilemeyen çözüme tekil çözüm adı verilir.

Mertebesi ne olursa olsun derecesi 1'den büyük olan dif. denklemlerde tekil çözüm olabilir.

Uygulama: 1) $\frac{dy}{dx}=2x$ $y=x^2+C$ Genel çözüm
Parabol ailesi

$c=0$ $y=x^2$ parabolü
özel çözüm



2) $y=xy'+y'-y'^2$ $y=Cx+C-C^2$ Genel çözüm
Doğru ailesi

$c=1$ $y=x$ doğrusu
özel çözümü

$\boxed{y=\frac{1}{4}(x+1)^2}$ Tekil çözüm

parabol

1. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$F(x,y,y')=0$ I. mertebeden dif. denklemlerdir.

NOT: Mertebesi ne olursa olsun I. dereceden dif. denklemlere lineer dif. denklem adı verilir.

I. Mertebeden Dif. Denklem Tipleri:

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Değişkenlere Ayrılabilen Dif. Denklem:

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$M(x,y)=f_1(x).g_1(y)$

$N(x,y)=f_2(x).g_2(y)$

$f_1(x).g_1(y)dx+f_2(x).g_2(y)dy=0$

$f_1(x).g_1(y)dx=-f_2(x).g_2(y)dy$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = \int 0$$

$$\boxed{F(x) + G(y) = C}$$ Genel çözüm.

Örnek: $x.(1-y^2)\,dx + y.(1-x^2)\,dy = 0$ dif. denkleme ait genel çözümü bulunuz.

$$x(1-y^2)\,dx = -y(1-x^2)\,dy$$

$$\frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{y}{1-y^2}\,dy \qquad \left(\frac{x}{1-x^2}\right)dx + \left(\frac{y}{1-y^2}\right)dy = 0$$

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx + \int \frac{y}{1-y^2}\,dy = \int 0 \qquad \ln(1-x^2) \quad \frac{1}{-2} \quad \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\ln(1-x^2) - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\ln(1-y^2) = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\ln C$$

$$\ln(1-x^2).(1-y^2) = \ln C$$

$$\boxed{(1-x^2).(1-y^2) = C}$$

NOT: Dif. denklemin genel çözümünde eğer logaritmik ifade varsa yazacağımız keyfi parametreler logaritma cinsinden yazılabilir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$ dif. denkleminin genel çözümün bulunuz.

$$\frac{dy}{} = \qquad \frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y\cos x \qquad \frac{-dy}{y} = dx\cos x$$

$$y\cos x\,dx + dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\cos x\,dx \qquad -\ln y = \sin x + \ln c \qquad \ln\frac{y}{c} = -\sin x$$

$$\ln y = -\sin x + \ln C \qquad \ln y = -\sin x + C$$

$$y = e^{-\sin x + C}$$

$$\ln y - \ln C = -\sin x$$

$$e^{\ln \frac{y}{c}} = e^{-\sin x} \qquad \frac{y}{c} = e^{-\sin x}$$

$$\frac{y}{c} = e^{-\sin x} \qquad y = e^{-\sin x} + C$$

$$\boxed{y = c.e^{-\sin x}}$$

Değişkenlere Ayrılabilen Hale Getirilen Dif. Denklemler:

$y' = f(x,y)$

$\boxed{y' = f(ax+by+c)}$ a,b,c sbt

* $ax+by+c=u$ Her iki tarafın x'e göre türevi alındı.

$$a + b\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\cdot\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} = b.\,f(u)+a$$

$$\int\frac{du}{b.\,f(u)+a} = \int dx$$

$$\boxed{\phi(u) = x + C}$$

$\boxed{\phi(ax+by+c) = x+C}$ Genel çözüm

Örnek: $y' = (x+y+1)^2$

$x+y+1=u$

$1+y'=u'$

$y'=u'-1$

$u'-1=u^2$

$$\frac{du}{dx} = 1+u^2$$

$$\int\frac{du}{1+u^2} = \int dx$$

$\text{arctg } u = x+C$

$$\boxed{\text{arctg}(x+y+1) = x+C}$$

$x+y+1=u$

$dx+dy=du$

$dy=du-dx$

$dy = u^2\,dx$

$du-dx=u^2dx$

$du=(u^2+1)$

$$\frac{1}{(u^2+1)}$$

Örnek: $y'=\sin(x-y)$ $\qquad x-y=u \quad dx-dy=du$

$x-y=u$ $\qquad d\cancel{x}-du=dy$

$1-y'=u'$ $\qquad dx-du=\sin(\overset{u}{\cancel{x-y}}).dx$

$y'=1-u'$ $\qquad (1-\sin u)dx=du \quad \frac{1}{1-\sin}$

$1-u'=\sin u$

$\frac{du}{dx}=1-\sin u$

$\int\frac{du}{1-\sin u}=\int dx \qquad \Longrightarrow \int\frac{du}{\underset{(1+\sin u)}{1-\sin u}}=\int\frac{1+\sin u}{\cos^2 u}du$

$tg\, u+\frac{1}{\cos u}=x+C$

$\qquad =\int\frac{du}{\cos^2 u}+\int\frac{\sin u}{\cos^2 u}c$

$\boxed{tg(x-y)+\sec(x-y)=x+C}$ $\qquad \begin{vmatrix}\cos u=t\\ -\sin u du=dt\end{vmatrix}=tg\, u+\frac{1}{\cos u}$

HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEM

$f(x,y)$ fonksiyonu $x\to\lambda x$, $y\to\lambda y$ yazıldığında $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n.f(x,y)$ eşitliğini sağlıyorsa $f(x,y)$ fonsiyonuna n. dereceden homojen bir fonksiyondur denir.

$f(x,y)=x^2+xy$

$$\begin{aligned}f(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x)^2+\lambda x.\lambda y\\ &=\lambda^2x^2+\lambda^2xy\\ &=\lambda^2(x^2+xy)\\ &=\lambda^2.f(x,y)\end{aligned}$$ 2. dereceden bir homojen fonksiyon

Bir homojen dif. denklem $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde ifad edilebilir. Yani türev $\frac{y}{x}$'in bir fonksiyonu olarak yazı bilir.

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ denkleminde $M(x,y)$ ve $N(x,$ aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise bu di denklem homojen dif. denklemdir.

$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ bir hom. dif. denklem olsun.

$\frac{y}{x}=u \qquad u=u(x)$

$y=ux$

$y'=x.u'+u$

$x.u'+u=f(u)$

$x.\frac{du}{dx}=f(u)-u$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{f(u)-u}$$

$\ln x+\ln C=\ln F(u)$

$Cx=F(u)$

$$\boxed{Cx=F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Örnek: $(y+\sqrt{x^2-y^2})dx-xdy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

1. dereceden h.d.d.

$(y+\sqrt{x^2-y^2})dx=xdy$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

$$=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}$$

$$=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$\frac{y}{x}=u$

$y=u.x \qquad \boxed{u=u(x)}$

$\frac{dy}{dx}=x.\frac{du}{dx}+u$

$x.\frac{du}{dx}+\cancel{u}=\cancel{u}+\sqrt{1-u^2}$

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$\text{Arcsin}\, u=\ln x+\ln C$

$\arcsin u = \ln Cx$

$\boxed{u = \sin \ln Cx}$

$\frac{y}{x} = \sin \ln Cx$

$\boxed{y = x . \sin(\ln(Cx))}$

II. Yöntem

$(y+\sqrt{x^2-y^2})dx - xdy = 0$ homojense ve toplam şeklindey

$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u.x$

$dy = x.du + u.dx$

$(ux+\sqrt{x^2-u^2x^2})dx - x(xdu+udx) = 0$

$(ux + x\sqrt{1-u^2} - ux)dx - x^2du = 0$

$x\sqrt{1-u^2}\,dx - x^2du = 0$

$\int \frac{x}{x^2}dx - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int 0$

$\boxed{y = x . \sin(\ln Cx)}$

Örnek: $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ eğri ailesine ait diferansiye denklemini kurunuz. (ya da bu eğriyi genel çözüm kabul eden dif. denk. nedir?)

$\boxed{y=f(x)}$ x'e göre türev alınacak.

$\cancel{2}x+\cancel{2}yy'+\cancel{2}A+\cancel{2}By'=0$

$y'''/\ 1+y'^2+y\cdot y''+By''=0$

$2y'y''+y'\cdot y''+y\cdot y'''+By'''=0$

$-y''/\ 3y'y''+y\cdot y'''+By'''=0$

Bu ikisi arasında B parametresi yok edilecek.

$y'''+y'^2y'''+\cancel{yy''y'''}+\cancel{By''y'''}=0$

$-3y'y''^2-\cancel{yy'''\cdot y''}-\cancel{By''y'''}=0$

$\boxed{y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0}$ 3. mertebe 1. derecedendir

Örnek: $y=c_1.e^{-3x}+c_2.e^{2x}$ eğri ailesine ait dif. denklemi kurunuz.

$$y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2.e^{2x}$$
$$y''=9c_1e^{-3x}+4c_2.e^{2x}$$

$r_1=-3$

$r_2=2$

$(x+3)\cdot(x-2)$

$$\left.\begin{array}{l} y-c_1.e^{-3x}-c_2.e^{2x}=0 \\ y'+3c_1.e^{-3x}-2c_2.e^{2x}=0 \\ y''-9c_1.e^{-3x}-4c_2.e^{2x}=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} y & -e^{-3x} & -e^{2x} \\ y' & 3e^{-3x} & -2e^{2x} \\ y'' & -9e^{-3x} & -4e^{2x} \end{vmatrix}=0$$

$$y\left(-12e^{-x}-18e^{-x}\right)-y'\left(4e^{-x}-9e^{-x}\right)+y''\left(2e^{-x}+3e^{-x}\right)=0$$

$$5e^{-x}.y''+5e^{-x}y'-30e^{-x}y=0$$

$y''+y'-6y=0$

$\boxed{y''+y'-6y=0}$ 2. mertebeden

Örnek: $e^{x+y}y'=e^{2x-y}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$e^{x+y}.y'=e^{2x-y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}=e^{2x-y-x-y}=e^{x-2y}$$

$y'=e^{2x-y-x-y}$

$y'=e^{x-2y}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}.e^{-2y}$$

$$\int e^{2y}.dy=\int e^{x}.dx$$

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{2y}=e^{x}+C}$$

$e^{2y}=2e^{x}+\underbrace{2C}_{c}$

Örnek: $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x-y+3}{x-y+1}\right)^2$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'=f(ax+by+c)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(1+\frac{2}{x-y+1}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(1+\frac{2}{x-y+1}\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+1=u \\ 1-\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx} \end{array}\right\} \longrightarrow 1-\frac{du}{dx}=\left(1+\frac{2}{u}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{du}{dx}$$

$$\cancel{1}-\frac{du}{dx}=\cancel{1}+\frac{4}{u}+\frac{4}{u^2}$$

$$-\frac{du}{dx}=\frac{\overset{(u)}{4u+4}}{u^2}\rightarrow 4(u+1)$$

$$\begin{array}{r|l} u^2 & u+1 \\ \hline -u^2\mp u & u-1 \\ \hline -u & \\ \mp u \mp 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\int\frac{u^2\,du}{u+1}=\int-4\,dx$$

$$\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)du=-4x+C$$

$$\boxed{\frac{u^2}{2}-u+\ln(u+1)=-4x+C}$$

$$\boxed{\frac{(x-y+1)^2}{2}-(x-y+1)+\ln(x-y+2)=-4x+C}$$

Örnek: $x.e^{\frac{y}{x}}+y-xy'=0$ dif. denkleminin genel çözümü bulunuz.

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xy'=x.e^{\frac{y}{x}}+y$$

$$\boxed{y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}}$$

$$\frac{y}{x}=u \longrightarrow \boxed{u=u(x)}$$

$$y=ux$$

$$\frac{dy}{dx}=x.\frac{du}{dx}+u$$

$$x.\frac{du}{dx}\cancel{+u}=e^u\cancel{+u}$$

$$\int\frac{du}{e^u}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-e^{-u}=\ln x+\ln C$$

$$\boxed{-e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx}$$

II. yol

$$\left(x.e^{\frac{y}{x}}+y\right)dx-x.dy=0$$

$$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=u.x$$

$$dy=x.du+u.dx$$

$$(x.e^u+u.x)dx-x.(x.du+u.dx)=($$

$$(x.e^u\cancel{+ux}-\cancel{ux})dx-x^2du=0$$

$$x.e^u\,dx-x^2du=0$$

$$\int\frac{x}{x^2}dx-\int\frac{du}{e^u}=\int 0$$

$$\ln x+\ln C+e^{-u}=0$$

$$\boxed{\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}}$$

(ödev)

1. der. hom 1. der. hom.

Örnek: $(2x+y)dx+(x-2y)dy=0$ dif. denklemine ait genel çözümü bulunuz.

$\downarrow$

1. dereceden hom. dif. denk.

$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ haline getir çöz.

$$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux$$

$$u=u(x) \qquad dy=x.du+u.dx$$

$$(2x+ux)dx+(x-2ux)(x.du+udx)=0$$

$$(2x+\overbrace{ux+ux}^{2ux}-2u^2x)dx+(x^2-2ux^2)du=0$$

$$2x.(1+u-u^2)dx+x^2(1-2u)du=0$$

$$\int\frac{2x}{x^2}dx+\int\frac{1-2u}{1+u-u^2}du=0$$

$1+u-u^2=t$

$(1-2u)du=dt$

$$\overbrace{2\ln x}^{\cdot^2}+\ln(1+u-u^2)=\ln C$$

$$x^2(1+u-u^2)=C$$

$$u=\frac{y}{x} \longrightarrow \boxed{x^2\left(1+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)=C}$$

I. yöntem

(Ödev)

$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ haline getirerek çöz.

$$(2x+y)dx=-(x-2y)dy$$

$$-\frac{2x+y}{x-2y}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{2x}{x-2y}+\frac{y}{x-2y}\right)$$

$$=-\left[\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}+\frac{\cancel{x}\left(\frac{y}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}\right]$$

$$=-\left[\frac{2}{1-2.\frac{y}{x}}+\frac{\frac{y}{x}}{1-2.\frac{y}{x}}\right]$$

$$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=u.x$$

$$\frac{dy}{dx}=x.\frac{du}{dx}+u$$

$$x.\frac{du}{dx}+u=-\left[\frac{2+u}{1-2u}\right]$$

$$x.\frac{du}{dx}=-\frac{2+u}{1-2u}-u=\frac{-2-u-u+2u^2}{1-2u}=\frac{2u^2-2u-2}{1-2u}$$

$u^2-u-1=t$

$-u^2+u+1=-t$

$(1-2u)du=-dt$

$$x.\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-2u-2}{1-2u}$$

$$\int\frac{(1-2u)du}{2u^2-2u-2}=\int\frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{(1-2u)du}{u^2-u-1}-\int\frac{dx}{x}=\int 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}\ln(u+1-u^2)-\ln x=\ln C.$$

$$\ln(u+1-u^2)+2\ln x=\ln C$$

$$x^2\left(\frac{y}{x}+1-\frac{y^2}{x^2}\right)=C \Longleftarrow x^2(u+1-u^2)=C$$

[illegible]

HOMOJEN HALE DÖNÜŞTÜRÜLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ cebirsel ve x, y'ye göre lineer olan dif. denklemler ya değişkenlerine ayrılabilen ya da homojen hale dönüşen dif. denklemlerdir.

x ve y'nin katsayılarından meydana gelen $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ determinantının 0'a eşit olup olmamasına bağlı olarak 2 durum söz konusudur.

1. Durum: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ olması halinde a_1x+b_1y ile a_2x+b_2y ifadeleri lineer bağımlı ifadelerdir. λ bir sabit olmak üzere

$a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)$ olabilir.

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$ dir.

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(\lambda(a_1x+b_1y)+c_2)dy=0$$

$a_1x+b_1y=t$ Eşitliğin her 2 tarafının diferansiyeli alınır.

$a_1dx+b_1dy=dt$

$$dy=\frac{1}{b_1}(dt-a_1dx)$$

$$(t+c_1)dx+(\lambda t+c_2)\frac{1}{b_1}(dt-a_1dx)=0$$

$[b_1(t+c_1)-a_1(\lambda t+c_2)]dx+(\lambda t+c_2)dt=0$ Bu dif. denk. değişkenlerine ayrılabilen bir dif. denklemdir.

$$\int dx+\int\frac{\lambda t+c_2}{[b_1(t+c_1)-a_1(\lambda t+c_2)]}dt=\int 0$$

$$x+\phi(t)=c$$

$t=a_1x+b_1y$

$$\boxed{x+\phi(a_1x+b_1y)=C}$$

Örnek: $(x+5y+1)dx + (2x+10y+7)dy=0$ $\qquad$ $M\,dx+N\,dy=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x+10y = 2\,(x+5y)$$

$x+5y=t$

$dx+5dy=dt$

$$dy=\frac{1}{5}\left(dt-dx\right)$$

$$(t+1)dx + (2t+7)\frac{1}{5}\left(dt-dx\right)=0$$

$$\left(5t+5-2t-7\right)dx+\left(2t+7\right)dt=0$$

$$(3t-2)\,dx+(2t+7)\,dt=0$$

$$\int dx+\int\frac{2t+7}{3t-2}\,dt=0$$

$$x+\int\left(\frac{2t}{3t-2}+\frac{7}{3t-2}\right)dt=0$$

$$\begin{array}{l|l} 2t & 3t-2 \\ -2t\pm\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{4}{3} & \end{array}$$

$$x+\int\left(\frac{2}{3}+\frac{\frac{4}{3}}{3t-2}+\frac{7}{3t-2}\right)dt=0$$

$$x+\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}\ln(3t-2)+\frac{7}{3}\ln(3t-2)=C$$

$t=x+5y$

$$\boxed{x+\frac{2}{3}(x+5y)+\frac{25}{9}\ln(3x+15y-2)=C}$$

2. Durum: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ olması halinde a_1x+b_1y ile a_2x+b_2y ifadeleri lineer bağımsızlardır. O zaman homojenliği bozan c_1 ve c_2 sabitlerinin ortadan kaldırılmasına çalışılır. h,k sabitler ; X,Y yeni değişkenler olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} x=X+h \\ y=Y+k \end{array}\right\}$$ dönüşümleri uygulanır.

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

$x=X+h$
$dx=dX$

$$\left(a_1(X+h)+b_1(Y+k)+c_1\right)dX+\left(a_2(X+h)+b_2(Y+k)+c_2\right)dY=0$$

$y=Y+k$
$dy=dY$

$$\left(a_1X+b_1Y+\underbrace{a_1h+b_1k+c_1}\right)dX+\left(a_2X+b_2Y+\underbrace{a_2h+b_2k+c_2}\right)dY=0$$

$a_1h+b_1k+c_1=0$
$a_2h+b_2k+c_2=0$ } olmalıdır ki bu dif. denk. homojen dif. denk olsun. Bu sistem sonucunda h, k değerlerinin çözümü çıkar.

$\boxed{h=h_0 \quad k=k_0}$ bulunsun.

$$(a_1X+b_1Y)dX+(a_2X+b_2Y)dY=0$$

$\frac{Y}{X}=u$
$Y=u.X$ } $\boxed{X=c.f\left(\frac{Y}{X}\right)}$

$X=x-h_0$
$Y=y-k_0$ } $\nearrow$

$$(x-h_0)=c.f\left(\frac{y-k_0}{x-h_0}\right)$$

Örnek: $\frac{dy}{dx}=\frac{3x-y+1}{3y-x+5}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz

$$(3x-y+1)dx-(3y-x+5)dy=0$$

$X+h$

$y+k$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-9+1=-8\neq 0$$

$x=X+h \longrightarrow dx=dX$
$y=Y+k \longrightarrow dy=dY$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3(X+h)-(Y+k)+1}{3(Y+k)-(X+h)+5}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3X-Y+(3h-k+1)}{3Y-X+(3k-h+5)}$$

$3h-k+1=0$ } $h=-1$
$3k-h+5=0$ } $k=-2$

x yerine h , y yerine k koy sonra

$$\boxed{\frac{dY}{dX}=\frac{3X-Y}{3Y-X}}$$

$u=u(X)$

$$\frac{Y}{X}=u \Rightarrow Y=u\cdot X$$

$$\frac{dY}{dX}=X\cdot\frac{du}{dX}+u$$

$$X\cdot\frac{du}{dX}+u=\frac{3X-uX}{3uX-X}$$

$$X\cdot\frac{du}{dX}+u=\frac{3-u}{3u-1}$$

$$X\cdot\frac{du}{dX}=\frac{3-u}{3u-1}-u$$

$$X\cdot\frac{du}{dX}=\frac{3\cancel{-u}-3u^2\cancel{+u}}{3u-1}$$

$$X\cdot\frac{du}{dX}=\frac{3(1-u^2)}{3u-1}$$

$$\int\frac{dX}{X}=\int\frac{3u-1}{3(1-u^2)}du$$

$$\ln X=\frac{1}{3}\int\left(\frac{3u}{1-u^2}-\frac{1}{1-u^2}\right)du$$

$$\ln X=\frac{1}{3}\int\left(\frac{3u}{1-u^2}+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$\ln X=-\frac{1}{2}\ln(1-u^2)+\frac{1}{6}\ln\frac{u-1}{u+1}+\ln C$$

$$u=\frac{Y}{X}$$

$$\ln X=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{Y^2}{X^2}\right)+\frac{1}{6}\ln\frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{Y}{X}+1}+\ln C$$

$X=x+1$
$Y=y+2$

$$\ln(x+1)=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{(y+2)^2}{(x+1)^2}\right)+\frac{1}{6}\ln\frac{\frac{y+2}{x+1}-1}{\frac{y+2}{x+1}+1}+\ln C$$

TAM DIFERANSIYEL DENKLEMLER

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ dif. denkleminde $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ eşitliğini sağlıyorsa dif. denkleme tam dif. denklemdir denir.

Bu dif. denklem aslında $u=u(x,y)$ şeklinde bir fonksiyonun toplam diferansiyelidir.

$u=u(x,y)$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$du=0 \Longrightarrow \boxed{u(x,y)=C}$ Tam dif. denklemin genel çözümü

$$M(x,y)\underset{\sim}{dx}+N(x,y)\underset{\sim}{dy}=\frac{\partial u}{\partial x}\underset{\sim}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\underset{\sim}{dy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

Bu bir koşul

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

$$-\ \frac{du}{dx}=M(\overset{\text{değişken}}{x},\overset{\text{sabit}}{y})$$

$$\int du=\int M(x,y)dx$$

① $\boxed{u(x,y)=\int M(x,y)dx+R(y)}$

Attığımız değişkene ait bir fonksiyon

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\boxed{K(x,y)+\frac{dR}{dy}=N(x,y)}$$

$$R'(y)\longrightarrow R(y)$$

$$\boxed{u(x,y)=C}$$

Bu denklemde $R'(y)$ çözülüp $R(y)$ fonksiyonu bulunur. $R(y)$ ise ① denkleminde yerine konulduğunda tam dif. denkleme ait genel çözüm ortaya çıkar.

Örnek: $\underbrace{\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)}_{M}dx+\underbrace{2y\ln x}_{N}dy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\frac{y^2}{x}$ $\underline{2y\,x}$

$u(x,y)=C$

$\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)dx+2y\ln x\,dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+\frac{y^2}{x}$

Hangisinin [illegible]

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\ln x$

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+\frac{y^2}{x}$

$\frac{du}{dx}=x^2+\frac{y^2}{x}$

$\int du=\int\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)dx$

$\boxed{u(x,y)=\frac{x^3}{3}+y^2\ln x+R(y)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cancel{\ln x}+\frac{dR}{dy}=2y\cancel{\ln x}$

$\frac{dR}{dy}=0 \Rightarrow R(y)=K$

$u(x,y)=C$

$\frac{x^3}{3}+y^2\ln x+K=C$

$C-K=C_1$

$\boxed{\frac{x^3}{3}+y^2\ln x=C_1}$ $1 = 1'$ tan ✓

Örnek: $\underbrace{(x^3+y)}_{M}dx+\underbrace{(x+y^3)}_{N}dy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{\partial M}{\partial y}=1=\frac{\partial N}{\partial x}$

$\boxed{u(x,y)=C}$ $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(x^3+y)dx+(x+y^3)dy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3+y$ $f(x,y)=\int(x^3+y)dx+c(y)$

$*\ \frac{\partial u}{\partial y}=x+y^3$

$xy+\frac{x^4}{4}\ c(y))$ $c=\frac{y^4}{4}$

$\cancel{x}+\frac{dc}{dy}=\cancel{x}+y^3$ $dc=dy\,y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + y^3$$

$$\frac{du}{dy} = x + y^3$$

$$\int du = \int (x + y^3)\,dy$$

$$u(x,y) = xy + \frac{y^4}{4} + K(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big| = \cancel{y} + \frac{dK}{dx} = x^3 + \cancel{y}$$

$$\frac{dK}{dx} = x^3$$

$$\int dK = \int x^3\,dx$$

$$K(x) = \frac{x^4}{4} + K_1$$

$$u(x,y) = C$$

$$xy + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} + K_1 = C$$

$$xy + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} = C_1 \qquad (C - K_1 = C_1)$$

Örnek: $\underbrace{(tg\,y - 3x^2)}_{M}dx + \underbrace{x\sec^2 y}_{N}\,dy = 0$ dif. denkleminin ge çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$u(x,y) = C$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (tg\,y - 3x^2)dx + x.\sec^2 y\,dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = tgy - 3x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x.\sec^2 y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = tgy - 3x^2$$

$$\frac{du}{dx} = tg\,y - 3x^2$$

$$\int du = \int (tg\,y - 3x^2)\,dx$$

$u(x,y)=x.\operatorname{tg} y-x^3+R(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\cancel{x\sec^2 y}+\frac{dR}{dy}=\cancel{x\sec^2 y}$

$\frac{dR}{dy}=0 \Rightarrow R(y)=K$

$u(x,y)=C$

$\boxed{x.\operatorname{tg} y-x^3=C_1}$ $(C-K=C_1)$

<u>**Örnek:**</u> $\underbrace{(y^2e^{xy}+1)}_{M}dx+\underbrace{(xye^{xy}+e^{xy})}_{N}dy=0$ dif. denkleminin gen çözümünü bulunuz.

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y.e^{xy}+xy^2.e^{xy}$ $\frac{\partial N}{\partial x}=y.e^{xy}+xy^2e^{xy}+y.e^{xy}$

$=$

$u(x,y)=C$

$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(y^2.e^{xy}+1)dx+(xye^{xy}+e^{xy})dy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2.e^{xy}+1$

$\frac{\partial u}{\partial y}=xye^{xy}+e^{xy}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2.e^{xy}+1$

$\frac{du}{dx}=y^2.e^{xy}+1$

$\int du=\int(y^2.e^{xy}+1)dx$

$u(x,y)=y^2.\frac{1}{y}e^{xy}+x+R(y)=y.e^{xy}+x+R(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\cancel{e^{xy}}+\cancel{xy.e^{xy}}+\frac{dR}{dy}=\cancel{xy.e^{xy}}+\cancel{e^{xy}}$

$\frac{dR}{dy}=0 \Rightarrow R(y)=K$

$u(x,y)=C$

$\boxed{y.e^{xy}+x=C_1}$ $(C-K=C_1)$

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN İNTEGRASYON ÇARPANI

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denkleminde $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ise $\lambda(x,y)$ bir fonksiyon olmak üzere denklemi $\lambda(x,y)$ fonksiyonu ile çarparak tam diferansiyel hale getirebiliriz. $\lambda(x,y)$ fonksiyonuna integrasyon çarpanı denir.

$$\underbrace{\lambda(x,y).M(x,y)}\,dx + \lambda(x,y).N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial(\lambda.M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda.N)}{\partial x}$$

$$M.\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial M}{\partial y} = N.\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda.\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M.\frac{\partial\lambda}{\partial y} - N.\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

1) $\lambda = \lambda(x)$ olabilir.

$$-N.\frac{d\lambda}{dx} = \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\int\frac{d\lambda}{\lambda} = \int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

$$\boxed{\ln\lambda = \int\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx}$$

2) $\lambda = \lambda(y)$ olabilir.

$$M.\frac{d\lambda}{dy} = \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\int\frac{d\lambda}{\lambda} = \int\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy$$

$$\boxed{\ln\lambda = \int\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}dy}$$

Örnek: $(x^2+y^2)dx+xydy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=y$$

$$\ln\lambda=\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)dy=\int\frac{y-2y}{x^2+y^2}dy$$

$$\ln\lambda=\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx=\int\frac{2y-y}{xy}dx=\int\frac{y}{x\cancel{y}}dx=\ln x$$

$$\ln\lambda=\ln x$$

$$\boxed{\lambda=x}$$

$$\underbrace{(x^3+xy^2)}_{M_1}dx+\underbrace{x^2y}_{N_1}dy=0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=2xy=\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$u(x,y)=C$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(x^3+xy^2)dx+x^2ydy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3+xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y \quad *$$

$$\frac{du}{dy}=x^2y$$

$$\int du=\int x^2ydy$$

$$\boxed{u(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}+K(x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cancel{xy^2}+\frac{dK}{dx}=x^3+\cancel{xy^2}$$

$$\frac{dK}{dx}=x^3 \Rightarrow dK=x^3dx$$

$$\boxed{K(x)=\frac{x^4}{4}+C_1}$$

$u(x,y)=C$

$\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C_1=C$

$$\boxed{\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^4}{4}=C_2}$$

Örnek: $(xy+1)y\,dx+(2y-x)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+1$ $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$

$$\ln\lambda=\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)dy=\int\frac{-1-2xy-1}{(xy+1)y}\,dy=\int\frac{-2\cancel{(1+xy)}}{\cancel{(xy+1)}y}\,dy=\int\frac{-2dy}{y}=-2l$$

$$\ln\lambda=\ln y^{-2}$$

$$\boxed{\lambda=\frac{1}{y^2}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{xy+1}{y}\right)}_{M_1}dx+\underbrace{\left(\frac{2y-x}{y^2}\right)}_{N_1}dy=0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{xy-xy-1}{y^2}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$u(x,y)=C$

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\left(\frac{xy+1}{y}\right)dx+\left(\frac{2y-x}{y^2}\right)dy$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{xy+1}{y}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y-x}{y^2}$

$\frac{du}{dx}=x+\frac{1}{y}$

$\int du=\int\left(x+\frac{1}{y}\right)dx$

$$\boxed{u(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+R(y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\cancel{\frac{x}{y^2}}+\frac{dR}{dy}=\frac{2}{y}-\cancel{\frac{x}{y^2}}\Rightarrow\int dR=\int\frac{2}{y}dy\Rightarrow\boxed{R=2\ln y+C_1}$$

$u(x,y)=C$

$\boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+2\ln y=K}$ $\boxed{K=C-C_1}$

Örnek: $(x-3y)dx-xdy=0$ dif. denkleminde $\lambda=x^n$ şeklinde bir integrasyon çarpanı bulunuz ve dif. denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{x^n(x-3y)}_{M}dx-\underbrace{x^{n+1}}_{N}dy=0$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olmalı

$$-3\cancel{x^n}=-(n+1)\cancel{x^n}$$

$$-3=-n-1$$

$$n=3-1$$

$$\boxed{n=2}$$

$$\lambda=x^n=x^2$$

$$\underbrace{(x^3-3x^2y)}_{M_1}dx\underbrace{-x^3}_{N_1}dy=0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=-3x^2=\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$u(x,y)=C$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(x^3-3x^2y)dx-x^3dy$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3-3x^2y$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-x^3$

$$\frac{du}{dy}=-x^3$$

$$\int du=\int -x^3dy$$

$$u(x,y)=-x^3y+K(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cancel{-3x^2y}+\frac{dK}{dx}=x^3\cancel{-3x^2y}$$

$$\frac{dK}{dx}=x^3\Rightarrow\int dK=\int x^3dx$$

$$K(x)=\frac{x^4}{4}+C_1$$

$u(x,y)=C\Rightarrow -x^3y+\frac{x^4}{4}+C_1=C\Rightarrow\boxed{-x^3y+\frac{x^4}{4}=K}$ $\boxed{C-C_1=K}$

AYNI ZAMANDA HOMOJEN VE TAM DİFERANSİYEL OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ dif. denklemindeki $M(x,y)$, $N(x,y$ fonksiyonları n. dereceden homojen fonksiyonlar olsun. $(n\neq-1$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ise bu dif. denkleme ait genel çözüm

$$\boxed{x.M(x,y)+y.N(x,y)=C}$$ dir.

Örnek: $(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x}=3y^2$ } 3. dereceden homojen ve tam dif

$$\boxed{x(x^3+y^3)+3xy^3=C}$$

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$y'+p(x)y=q(x)$ $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları sürekl fonksiyonlar olmak zorundadır.

$q(x)=0$ ise 2. tarafsız denk.
$q(x)\neq0$ ise 2. taraflı denklem

I. Yöntem:

$y=u.v$ dönüşümünü uyguluyoruz.

$u=u(x)$
$v=v(x)$

$$\frac{dy}{dx}=v.\frac{du}{dx}+u.\frac{dv}{dx}$$

$$y'+p(x)y=q(x)$$

$$v.\frac{du}{dx}+u.\frac{dv}{dx}+p(x).u.v=q(x)$$

$$\underbrace{v\left(\frac{du}{dx}+p(x).u\right)}_{=0}+\underbrace{u.\frac{dv}{dx}-q(x)}_{=0}=0$$

$$\frac{du}{dx}+p(x)u=0$$

$$\int\frac{du}{u}=\int-p(x)dx$$

$\ln u = \int -p(x)dx$

$\boxed{u = e^{\int -p(x)dx}}$

$u.\frac{dv}{dx} - q(x) = 0$

$e^{\int -p(x)dx}\frac{dv}{dx} = q(x)$

$\int dv = \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx$

$\boxed{v = \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}.dx + C}$

$y = u.v$

Örnek: $y' = y.\text{cotg}x + \sin x$ genel çözüm?

$y' - y.\text{cotg}x = \sin x \longleftrightarrow y' + p(x)y = q(x)$

$y = u.v \longrightarrow y' = u'v + v'u$

$u'v + v'u - u.v\,\text{cotg}\,x = \sin x$

$v\underbrace{(u' - u\text{cotg}x)}_{=0} + \underbrace{v'u - \sin x = 0}$

$y = uv$

$y' = u'v + v'.u$

$u'.v + v'.u + uv\,\text{cotg}\,x = \sin x$

$v\underbrace{(u' + u\text{cotg}x)}_{0} - v'u - \sin x = 0$

$u' - u\text{cotg}\,x = 0$

$\frac{du}{dx} = u\cot x$

$v'u - \sin x = 0$

$\frac{du}{dx} = u\text{cotg}\,x$

$\frac{du}{u} = dx\cot x$ $v'.\cancel{\sin x} = \cancel{\sin x}$

$\int\frac{du}{u} = \int \overset{\frac{\cos x}{\sin x}dx}{\text{cotg}x\,dx}$ $\ln u =$

$\frac{dv}{dx} = 1$

$\frac{\cos x}{\sin x}$

$\ln u = \ln \sin x$

$\int dv = \int dx$

$\ln \sin x$

$\boxed{u = \sin x}$ $\boxed{v = x + C}$

$y = u.v$

$\boxed{y = (x + C).\sin x}$

2. Yöntem: (Sabitin Değişimi)

$y' + p(x)y = q(x)$

Önce 2. tarafsız denklem çözülür.

$y' + p(x)y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$

$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx$

$\ln y = \int -p(x)dx + \ln C$

$\ln \frac{y}{c} = \int -p(x)dx$

$\frac{y}{c} = e^{\int -p(x)dx}$

$$\boxed{y = c.\, e^{\int -p(x)dx}}$$

$C = C(x)$ olarak kabul edeceğiz.

$y' = C'.\, e^{\int -p(x)dx} - p(x).\, C.\, e^{\int -p(x).dx}$

$C'.e^{\int -p(x)dx} - \cancel{p(x)\, C.\, e^{\int -p(x).dx}} + \cancel{p(x)\, C.\, e^{\int -p(x)dx}} = q(x)$

$C'.\, e^{\int -p(x)dx} = q(x)$

$\int dC = \int q(x).\, e^{\int p(x)dx}\, dx$

$$\boxed{C = \int q(x).\, e^{\int p(x)dx}\, dx + K}$$

$y = C.e^{\int -p(x)dx}$

$y = \left[\int q(x).\, e^{\int p(x)dx}\, dx + K\right].\, e^{\int -p(x)dx}$

Örnek: $x\cdot\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}-\sin x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'+\frac{y}{x}=\frac{e^{2x}-\sin x}{x}$ (Her tarafı x bölersek) $y'+p(x)y=q(x)$

$$y'+\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

~~$\frac{xy'+y=e^{2x}-\sin x}{x}$~~

$$\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{dx}{x}$$

$$\ln y=-\ln x+\ln C$$

$$\ln y=\ln\frac{C}{x}$$

$$\boxed{y=\frac{C}{x}}$$

$y'+\frac{y}{x}=0$

$y'=\frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$

$\ln y=\ln x$

$y=x$

$$C=C(x)$$

$$y'=\frac{C'x-C}{x^2}$$

$$\frac{C'}{\cancel{x}}-\cancel{\frac{C}{x^2}}+\cancel{\frac{C}{x^2}}=\frac{e^{2x}-\sin x}{\cancel{x}}$$

$$\frac{dC}{dx}=e^{2x}-\sin x$$

$$\int dC=\int(e^{2x}-\sin x)dx$$

$$\boxed{C=\frac{1}{2}e^{2x}+\cos x+K}$$

$$y=\frac{C}{x}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\cos x+K\right)}$$

Örnek: $y'+y\sin x=e^{\cos x}$

$y'+y\sin x=0$

$\frac{dy}{dx}=-y\sin x$

$\frac{dy}{y}=-\sin x dx$

$\ln y=\cos x+\ln C$

$\ln\frac{y}{c}=\cos x$

$\frac{y}{c}=e^{\cos x}$

$\boxed{y=C.e^{\cos x}}$

$y'=-y\sin x$

$\frac{dy}{y}=-\sin x dx$

$\ln y=\cos x+\ln c$

$\frac{y}{c}=e^{\cos x}$

$y'=c'e^{\cos x}\mp c.\sin x e^{\cos x}$

$C=C(x)$

$y'=C'.e^{\cos x}-C.\sin x.e^{\cos x}$

$C'.e^{\cos x}-\cancel{C.\sin x.e^{\cos x}}+\cancel{\sin x.C.e^{\cos x}}=e^{\cos x}$

$C'.e^{\cos x}=e^{\cos x}$

$\frac{dC}{dx}=1 \Rightarrow \int dC=\int dx$

$\boxed{C=x+K}$

$y=C.e^{\cos x}$

$\boxed{y=(x+K).e^{\cos x}}$

BERNOULLI DIFERANSIYEL DENKLEMI

$p(x)$ ve $q(x)$ sürekli fonksiyonlar ve $n\neq 0, n\neq 1$ olmak üzere $y'+p(x).y=q(x).y^n$ diferansiyel denklemini verir.

$n=0$ Lineer dif. denk.
$n=1$ Değişkenlerine ayrılabilen dif. denk.

Bu dif. denklemi çözebilmek için $z=\frac{1}{y^{n-1}}$ dönüşümü uygulanır. Bu dönüşüm düzenleip dif. denklemde yerin konulursa karşımıza çıkacak olan dif. dek. lineer dif. denklem olur.

$z' + p(x)z = q(x)$

Örnek: $y' + y = xy^3$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$n = 3$

$v = y^{-2}$

$y = \sqrt{v}$

$z = \frac{1}{y^2}$

$z' = \frac{-2y \cdot y'}{y^4} = \frac{-2y'}{y^3}$

$y = v^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}}$

Denklemi y^3'e bölersek;

$\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x$

$-\frac{z'}{2} + z = x$

$z' - 2z = -2x$ Lineer dif. denk.

$-\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}} + v^{-\frac{1}{2}} = x \cdot v^{-\frac{3}{2}}$

$z = u \cdot v$

$z' = u'v + v'u$

$u'v + v'u - 2uv = -2x$

$u\underbrace{(v' - 2v)}_{=0} + \underbrace{u'v = -2x}$

$\frac{dv}{dx} - 2v = 0$

$\frac{dv}{dx} = 2v$

$\int \frac{dv}{v} = \int 2dx$

$\ln v = 2x$

$\boxed{v = e^{2x}}$

$u'v = -2x$

$\frac{du}{dx} \cdot e^{2x} = -2x$

$\int du = \int -2x \cdot e^{-2x} dx$

$u = e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C$

$z = u \cdot v$

$z = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$

$z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z}$

$$\boxed{y^2 = \frac{1}{x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}}}$$

Örnek: $y' - \frac{y}{3x} = y^4 . \ln x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$n=4$

$y' + p(x)y = y^n . q(x)$

$z = \frac{1}{y^3}$; $z' = \frac{-3y^2y'}{y^6} = \frac{-3y'}{y^4}$

$\frac{y'}{y^4} - \frac{1}{3x} . \frac{1}{y^3} = \ln x$

$v = y^{-3}$

$v = \frac{1}{y^3}$

$v' = \frac{3y^2 . y'}{y^6}$

$z = -3y^{-4} . y'$

$-\frac{z'}{3} - \frac{z}{3x} = \ln x$

$$\boxed{z' + \frac{z}{x} = -3\ln x}$$

$z' + \frac{z}{x} = 0$

$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$

$\int \frac{dz}{z} = \int -\frac{dx}{x}$

$\ln z = -\ln x + \ln C$

$$\boxed{z = \frac{C}{x}}$$

$C = C(x)$

$z' = \frac{C'x - C}{x^2}$

$\frac{C'}{x} - \cancel{\frac{C}{x^2}} + \cancel{\frac{C}{x^2}} = -3\ln x$

$\frac{dC}{dx} = -3x\ln x$

$\int dC = \int -3x\ln x dx$

$C = -3\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + K$

$$z = \frac{C}{x}$$

$$\boxed{z = -\frac{3}{2}x\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{K}{x}}$$

$$z = \frac{1}{y^3}$$

$$y^3 = \frac{1}{z} \Longrightarrow \boxed{y^3 = \frac{1}{-\frac{3}{2}x\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{K}{x}}}$$

__Örnek:__ $x\,dy - \left[y + xy^3(1+\ln x)\right]dx = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y' + p(x)y = q(x).y^n$

$$xy' - y - xy^3(1+\ln x) = 0$$

$$xy' - y = xy^3(1+\ln x)$$

$$y' - \frac{y}{x} = y^3(1+\ln x)$$ Bernoulli

$n=3$ $$z = \frac{1}{y^2}$$

$$z' = \frac{-2yy'}{y^4} = \frac{-2y'}{y^3}$$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = 1+\ln x$$

$$-\frac{z'}{2} - \frac{z}{x} = 1+\ln x$$

$$\boxed{z' + \frac{2z}{x} = -2(1+\ln x)}$$

$$z = u.v$$

$$z' = u'.v + v'.u$$

$$u'v + v'.u + \frac{2uv}{x} = -2(1+\ln x)$$

$$v\underbrace{\left(u' + \frac{2u}{x}\right)}_{=0} + v'.u = -2(1+\ln x)$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=0$$

$$\int\frac{du}{u}=\int-\frac{2dx}{x}$$

$$\ln u=-2\ln x$$

$$\boxed{u=\frac{1}{x^2}}$$

$$v'.u=-2(1+\ln x)$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}=-2(1+\ln x)$$

$$\int dv=\int-2x^2(1+\ln x)dx$$

$$v=\int-2x^2dx-2\int x^2\ln x\,dx$$

$$v=-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+\frac{2}{9}x^3+C$$

$$\int x^2\underbrace{\ln x}_{u}dx \qquad \ln x=u \quad \frac{dx}{x}=du$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} \qquad x^2dx=dv \quad \frac{x^3}{3}=v$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$$

$$z=u.v$$

$$z=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x\ln x+\frac{2}{9}x+\frac{c}{x^2}$$

$$z=\frac{1}{y^2}\Rightarrow y^2=\frac{1}{z}=\frac{1}{-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x\ln x+\frac{2}{9}x+\frac{c}{x^2}}$$

Örnek: $yy'+xy^2=x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'+xy=xy^{-1}$$

$$n=-1$$

$$z=\frac{1}{y^{-2}}=y^2$$

$$z'=2yy'$$

$$\frac{z'}{2}+xz=x$$

$$\boxed{z'+2xz=2x}$$

$$\frac{dz}{dx}+2xz=0$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int -2x\,dx$$

$$\ln z = -x^2 + \ln C$$

$$\ln \frac{z}{C} = -x^2$$

$$\frac{z}{C} = e^{-x^2}$$

$$\boxed{z = C.e^{-x^2}}$$

$$C = C(x)$$

$$z' = C'.e^{-x^2} - 2x.e^{-x^2}.C$$

$$C'.e^{-x^2} - \cancel{2x.e^{-x^2}.C} + \cancel{2x.C.e^{-x^2}} = 2x$$

$$\frac{dC}{dx} = 2x.e^{x^2}$$

$$\int dC = \int 2xe^{x^2}dx$$

$$\boxed{C = e^{x^2} + K}$$

$$\boxed{z = 1 + K.e^{-x^2}}$$

$$\boxed{y^2 = 1 + K.e^{-x^2}}$$

RİCCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

y_1 bir özel çözüm olmak üzere, $y' + p(x).y^2 + q(x)y + r(x) = 0$ şeklindeki dif. denkleme Riccati dif. denklemi denir. Özel çözüm dif. denklemi sağlar.

1) $y = y_1 + u$ Bernoulli dif. denk.

2) $y = y_1 + \frac{1}{u}$ Lineer dif. denk.

Örnek: $y' = y^2 - \frac{y}{x}$ dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1 = 0$ olduğuna göre dif. denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{u}$$

$$y' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{ux}$$

$$u' = -1 + \frac{u}{x}$$

$$\boxed{u' - \frac{u}{x} = -1}$$ L.D.D.

$$u' - \frac{u}{x} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln u = \ln x + \ln C$$

$$\boxed{u = Cx} \qquad C = C(x)$$

$$u' = C'.x + C$$

$$C'x + \cancel{C} - \cancel{\frac{Cx}{x}} = -1$$

$$\frac{dC}{dx}.x = -1$$

$$\int dC = \int -\frac{dx}{x}$$

$$C = -\ln x + K$$

$$\boxed{u = Kx - x\ln x}$$

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{Kx - x.\ln x}}$$

<u>Örnek:</u> $y' - \frac{y}{x} + 9x^2 = y^2$ dif. denkleminin $y_1 = 3x$ bir özel çözümü olduğuna göre bu dif. denklemin genel çözümünü bulun

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = 3x + \frac{1}{u}$$

$$y' = 3 - \frac{u'}{u^2}$$

$$3 - \frac{u'}{u^2} - \frac{3x + \frac{1}{u}}{x} + 9x^2 = \left(3x + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$\cancel{3}-\frac{u'}{u^2}\cancel{-3}-\frac{1}{ux}+9\cancel{x^2}=9\cancel{x^2}+6\frac{x}{u}+\frac{1}{u^2}$$

$$-\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{ux}=\frac{6x}{u}+\frac{1}{u^2}$$

$$u'+\frac{u}{x}=-6xu-1$$

$$\boxed{u'+u\left(6x+\frac{1}{x}\right)=-1}$$

$$u'+u\left(6x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\frac{du}{dx}=-u\left(6x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\int\frac{du}{u}=\int-\left(6x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln u=-\frac{6x^2}{2}-\ln x+\ln C \longrightarrow \ln\frac{ux}{C}=-3x^2$$

$$\frac{ux}{C}=e^{-3x^2}$$

$$u=C\cdot\frac{e^{-3x^2}}{x}$$

$$\ln u=\ln\frac{C}{x}-3x^2$$

$$\boxed{u=\frac{C}{x}\cdot e^{-3x^2}}$$

$$C=C(x)$$

$$u'=\frac{C'x-C}{x^2}\cdot e^{-3x^2}-6\cancel{x}\cdot\frac{C}{\cancel{x}}\cdot e^{-3x^2}$$

$$u'=\left(\frac{C'}{x}-\frac{C}{x^2}\right)\cdot e^{-3x^2}-6C\cdot e^{-3x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=C'\cdot\frac{e^{-3x^2}}{x}+C\,\frac{-6x^2e^{-3x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}$$

$$C'\cdot\frac{e^{-3x^2}}{x}+C\cdot\left(-6\cdot e^{-3x^2}-\frac{e^{-3x^2}}{x^2}\right)+\left(6+\frac{1}{x^2}\right)Ce^{-3x^2}=-1$$

$$\frac{dC}{dx}=-x\cdot e^{3x^2}$$

$$\int dC=\int -x e^{3x^2}\,dx$$

$$\frac{C'}{x}\cdot e^{-3x^2}-\frac{C}{x^2}\cdot e^{-3x^2}-6C\cdot e^{-3x^2}+\frac{C}{x}\cdot e^{-3x^2}\left(6x+\frac{1}{x}\right)=-1$$

$$\frac{C'}{x}\cdot e^{-3x^2}\cancel{-\frac{C}{x^2}\cdot e^{-3x^2}}\cancel{-6C\cdot e^{-3x^2}}\cancel{+6C\cdot e^{-3x^2}}\cancel{+\frac{C}{x^2}\cdot e^{-3x^2}}=-1$$

$$\frac{C'}{x}\cdot e^{-3x^2}=-1$$

$$C'=-x\cdot e^{3x^2}$$

$$\frac{dC}{dx}=-x\cdot e^{3x^2}$$

$\int dC = \int -x.e^{3x^2}.dx$

$3x^2 = t$
$6xdx = dt$
$xdx = \frac{dt}{6}$

$\int \frac{dt}{6}.e^t = \frac{1}{6}e^t$

$C = -\frac{1}{6}e^{3x^2} + K$

$$u = \frac{-\frac{1}{6}e^{3x^2} + K}{x} . e^{-3x^2}$$

$$u = \left(-\frac{1}{6}e^{3x^2} + K\right)\frac{e^{-3x^2}}{x}$$

$$\boxed{u = -\frac{1}{6x} + \frac{K.e^{-3x^2}}{x}}$$

$y = y_1 + \frac{1}{u}$

$y = 3x + \frac{1}{u}$

$$\boxed{y = 3x + \frac{1}{-\frac{1}{6x} + \frac{K.e^{-3x^2}}{x}}}$$

CLAIRAUT DİFERANSİYEL DENKLEMİ

$y = x.y' + \varphi(y')$

Bu denklemin çözümü için yardımcı parametre kullanılır.

$y' = p$

$y'' = \frac{dp}{dx}$

Denklemi x değişkenine göre türetelim:

$y' = y' + x.y'' + y''.\varphi'(y')$

$\cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}.\varphi'(p)$

$\frac{dp}{dx}\left(x + \varphi'(p)\right) = 0$

1) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \int dp = \int 0\, dx$

$y' = p = C$ (Soruda y' yerine c yazarız

$\boxed{y = Cx + \varphi(c)}$ Genel çözüm (Bir doğru ailesini gösteriyor.)

2) $x+\varphi'(p)=0$

$$\left.\begin{aligned} x&=-\varphi'(p) \\ y&=px+\varphi'(p) \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} x&=-\varphi'(p) \\ y&=p\cdot(-\varphi'(p))+\varphi'(p) \end{aligned}}$$

Tekil çözümün parametrik denklemleri

Bu denklemlerden p yok edilerek $F(x,y)=0$ şeklinde bir denklem elde ederiz. Bu denklem sabit içermez. Dolayısıyla bu denklem genel çözümde elde edilemeyen bir çözümdür.

$\boxed{F(x,y)=0}$ Tekil çözüm

Örnek: $y=xy'+y'-y'^2$ dif. denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} y'&=p \\ y''&=\frac{dp}{dx} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y'=y'+x.y''+y''-2y'.y'' \\ &\cancel{p}=\cancel{p}+x.\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}-2.p.\frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x+1-2p\right)=0$$

1) $\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=y'=c$

$\boxed{y=Cx+C-C^2}$ Genel çözüm

2) $x+1-2p=0$

$\rightarrow x=2p-1$

par. denk. $y=px+p-p^2$

$\rightarrow y=p(2p-1)+p-p^2$

$y=p^2 \quad p=\frac{x+1}{2}$

$\boxed{y=\frac{(x+1)^2}{4}}$ Tekil çözüm

Örnek: $y=xy'+\sqrt{y'}$ dif. denklemi çözünüz.

$$y=xy'+y'^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'=p \\ y''=\frac{dp}{dx} \end{array}\right\} \quad y'=y'+x.y''+\frac{1}{2}y'^{-1/2}.y''$$

$$\cancel{p}=\cancel{p}+x.\frac{dp}{dx}+\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}.\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x+\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)=0$$

1) $\frac{dp}{dx}=0 \Longrightarrow p=y'=C$

$\boxed{y=Cx+\sqrt{C}}$ Genel çözüm

2) $x+\frac{1}{2\sqrt{p}}=0$

$$x=-\frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$y=px+\sqrt{p} \longrightarrow y=\frac{1}{4x^2}.x+\frac{-1}{2x}$$

$$y=p.\left(-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)+\sqrt{p} \qquad \boxed{y=-\frac{1}{4x}}$$

$$y=-\frac{\sqrt{p}}{2}+\sqrt{p}$$

$$y=\frac{\sqrt{p}}{2} \qquad \sqrt{p}=-\frac{1}{2x}$$

$$p=\frac{1}{4x^2}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{4x}}$$

LAGRANGE DİFERANSİYEL DENKLEMİ

$$y=x.f(y')+\varphi(y')$$

$$\left.\begin{array}{l} y'=p \\ y''=\frac{dp}{dx} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y'=f(y')+x.y''.f'(y')+y''.\varphi'(y') \\ p=f(p)+x.\frac{dp}{dx}.f'(p)+\frac{dp}{dx}.\varphi'(p) \end{array}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x.f'(p)+\varphi'(p)\right)+f(p)-p=0$$

$$\frac{dx}{dp}\left(f(p)-p\right)+x.f'(p)+\varphi'(p)=0$$

Bu denklem düzenlenirse denklemin bir lineer dif.denklem olduğu görülür.

$$\begin{cases} x=F(p,c) \\ y=x.f(p)+\varphi(p) \end{cases}$$

Lagrange dif.denkleminin genel çözümünün parametrik denklemleridir.

Örnek: $y=x\underbrace{(1+y')}_{f(y')}+\underbrace{y'^2}_{\varphi(y')}$ dif.denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{array}{l} y'=p \\ y''=\frac{dp}{dx} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y'=1+y'+x.y''+2.y'.y'' \\ \cancel{p}=1+\cancel{p}+x\frac{dp}{dx}+2p.\frac{dp}{dx} \end{array}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x+2p\right)+1=0$$

x fonksiyon, p değişken olarak düzenlenirse

$$\frac{dx}{dp}+x+2p=0$$

$y'+r(x)y=q(x)$ Lineer dif.denk.

$$\boxed{x'+r(p).x=q(p)}$$

$$\frac{dx}{dp}+x=-2p$$

$$\frac{dx}{dp}+x=0$$

$$\frac{dx}{dp}=-x$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int-dp$$

$$\ln x=-p+\ln C$$

$$\ln\frac{x}{C}=-p$$

$$\frac{x}{C}=e^{-p} \longrightarrow \boxed{x=C.e^{-p}}$$

$C=C(p)$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dC}{dp}.e^{-p}-e^{-p}.C$$

$$\frac{dC}{dp}.e^{-p}\cancel{-e^{-p}.C+Ce^{-p}}=-2p$$

$$\frac{dC}{dp}.e^{-p}=-2p$$

$$\int dC=-2\int pe^{p}.dp$$

$p=u \Rightarrow dp=du$
$e^{p}dp=dv \Rightarrow e^{p}=v$

$$\int p.e^{p}dp=p.e^{p}-\int e^{p}.dp$$
$$=p.e^{p}-e^{p}$$
$$=e^{p}(p-1)$$

$$C=-2e^{p}(p-1)+K$$

$$\left.\begin{aligned}x&=Ke^{-p}-2(p-1)\\ y&=x.(p+1)+p^{2}\end{aligned}\right\}$$

$$y=\left[K.e^{-p}-2(p-1)\right](p+1)+p^{2}$$

Örnek: $y=x(2+y')+y'^{2}$

$$\left.\begin{aligned}y'&=p\\ y''&=\frac{dp}{dx}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}y'&=2+y'+x.y''+2.y'.y''\\ \cancel{p}&=2+\cancel{p}+x.\frac{dp}{dx}+2p.\frac{dp}{dx}\end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dx}(x+2p)+2=0$$

$$2.\frac{dx}{dp}+x+2p=0$$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{x}{2}=-p$$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{1}{2}.x$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\int dp$$

$$\ln x=-\frac{1}{2}p+\ln C \Rightarrow \ln\frac{x}{C}=-\frac{p}{2} \Rightarrow \frac{x}{C}=e^{-\frac{p}{2}}$$

$$\boxed{x=C.\,e^{-\frac{p}{2}}}$$

$C=C(p)$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dC}{dp}.e^{-\frac{p}{2}}-\frac{1}{2}.e^{-\frac{p}{2}}.C$$

$$\frac{dC}{dp}.e^{-\frac{p}{2}}\cancel{-\frac{1}{2}.e^{-\frac{p}{2}}.C}\cancel{+\frac{1}{2}.C.e^{-\frac{p}{2}}}=-p$$

$$\frac{dC}{dp}.e^{-\frac{p}{2}}=-p$$

$$\int dC=\int -p.e^{\frac{p}{2}}dp$$

$$C=-2e^{\frac{p}{2}}(p-2)$$

$$x=K.e^{-p/2}-2(p-2)$$

$$y=x(p+2)+p^2$$

$$y=\left[K.e^{-p/2}-2(p-2)\right](p+2)+p^2$$

$p=u$
$dp=du$

$$\int e^{\frac{p}{2}}dp=\int d\vartheta$$

$$2.e^{\frac{p}{2}}=\vartheta$$

$$\int p.e^{\frac{p}{2}}dp=p.2.e^{\frac{p}{2}}-\int 2.e^{\frac{p}{2}}.dp$$
$$=2p.e^{p/2}-4e^{p/2}$$

Örnek: $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x+y-4}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x+y=t$
$1+y'=t'$
$y'=t'-1$

$$t'-1=\sqrt{t-4}$$

$$\frac{dt}{dx}=1+\sqrt{t-4}$$

$$\int dx=\int\frac{dt}{1+\sqrt{t-4}}$$

$$x=2\sqrt{t-4}-2\ln(1+\sqrt{t-4})+C$$

$$\boxed{x=2\sqrt{x+y-4}-2\ln(1+\sqrt{x+y-4})+C}$$

$$\int\frac{dt}{1+\sqrt{t-4}}$$

$t-4=u^2$
$dt=2u\,du$

$$=\int\frac{2u\,du}{1+u}=2\int\frac{u+1-1}{1+u}du$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=2u-2\ln(1+u)$$

$$=2\sqrt{t-4}-2\ln(1+\sqrt{t-4})$$

Örnek: $\underbrace{y^2}_{M}dx+(\underbrace{3xy+y^2-1}_{N})dy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial N}{\partial x}=3y$$

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{2y - 3y}{3xy + y^2 - 1} \right) dx$$

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \, dy$$

$$\ln \lambda = \int \frac{y}{y^2} \, dy$$

$$\ln \lambda = \ln y$$

$$\boxed{\lambda = y}$$

$$\underbrace{y^3}_{M_1} dx + (\underbrace{3xy^2 + y^3 - y}_{N_1}) dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 3y^2 \qquad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 3y^2$$

$$u(x,y) = C$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = y^3 dx + (3xy^2 + y^3 - y) dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3$$

$$\frac{du}{dx} = y^3$$

$$\int du = \int y^3 dx$$

$$u(x,y) = y^3 x + R(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2 + y^3 - y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{3y^2x} + \frac{dR}{dy} = \cancel{3xy^2} + y^3 - y$$

$$\frac{dR}{dy} = y^3 - y$$

$$\int dR = \int (y^3 - y) dy$$

$$R(y) = \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + K$$

$$u(x,y) = C$$

$$y^3 x + \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + K = C$$

$$\boxed{xy^3 + \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} = C_1} \quad (C - K = C_1)$$

Örnek: $y' + xy = x^3 y^3$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$n = 3$

$z = \frac{1}{y^2}$; $z' = \frac{-2yy'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3}$

$\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x^3$

$-\frac{z'}{2} + xz = x^3$

$$\boxed{z' - 2xz = -2x^3}$$

$z = u.v$

$z' = u'.v + v'.u$

$u'v + v'.u - 2xuv = -2x^3$

$u\underbrace{(v' - 2xv)}_{=0} + \underbrace{u'v = -2x^3}$

$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0$

$\frac{dv}{dx} = 2xv$

$\int \frac{dv}{v} = \int 2x dx$

$\ln v = x^2$

$$\boxed{v = e^{x^2}}$$

$u'v = -2x^3$

$\frac{du}{dx} . e^{x^2} = -2x^3$

$\int du = \int -2x^3 . e^{-x^2} . dx$

$$\boxed{u = x^2 . e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}$$

$\int 2x^3 . e^{-x^2} dx$ $\quad x^2 = t$, $2xdx = dt$

$= \int x^2 . e^{-x^2} 2xdx$

$= \int \underset{u}{t} . \underbrace{e^{-t} . dt}_{dv}$ $\quad u = t$, $du = dt$, $e^{-t}dt = dv$, $-e^{-t} = v$

$= -t.e^{-t} + \int e^{-t} dt$

$= -te^{-t} - e^{-t}$

$= -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}$

$z = u.v$

$$\boxed{z = x^2 + 1 + C.e^{x^2}}$$

$z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z}$

$$\boxed{y^2 = \frac{1}{x^2 + 1 + C.e^{x^2}}}$$

Örnek: $y=2xy'-y'^2-1$ dif. denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{array}{l} y'=p \\ y''=\frac{dp}{dx} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y'=2y'+2xy''-2y'\cdot y'' \\ p=2p+2x\frac{dp}{dx}-2p\cdot\frac{dp}{dx} \end{array}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(2x-2p\right)+p=0$$

$$\frac{dx}{dp}\cdot p+2x-2p=0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}=2}$$

$$\frac{dx}{dp}+2\frac{x}{p}=0$$

$$\frac{dx}{dp}=-2\frac{x}{p}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int-2\frac{dp}{p}$$

$$\ln x=-2\ln p+\ln C$$

$$\ln\frac{x}{C}=\ln p^{-2}$$

$$\frac{x}{C}=\frac{1}{p^2}$$

$$x=\frac{C}{p^2}$$

$$C=C(p)$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\frac{dc}{dp}\cdot p^2-2p\cdot C}{p^4}$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dC}{dp}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{2C}{p^3}$$

$$\frac{dC}{dp}\cdot\frac{1}{p^2}-\cancel{\frac{2C}{p^3}}+\cancel{2\frac{C}{p^3}}=2$$

$$\int dC=\int 2p^2dp \implies C=\frac{2}{3}p^3+K$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}p+\frac{K}{p^2} \\ y &= 2xp-p^2-1 \end{aligned}\right\}$$

$$y=2\left(\frac{2}{3}p+\frac{K}{p^2}\right)p-p^2-1$$

$$y=\frac{4}{3}p^2+\frac{2K}{p}-p^2-1$$

YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Mertebesi 2 veya daha büyük olan denklemlere denir.

$F(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)})=0$ $\{n>0$ ve tamsayı$\}$

Genel çözüm içinde mertebe sayısı kadar parametre olur.

$$\Downarrow$$

$$G(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$$

$$A_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+A_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+A_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+A_n(x).y=B(x) \quad A_0(x)\neq 0$$

$$\frac{A_1(x)}{A_0(x)}=P_1(x) \quad --- \quad \frac{A_n(x)}{A_0(x)}=P_n(x) \text{ ve } \frac{B(x)}{A_0(x)}=f(x)$$

$$\boxed{\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_n(x)y=f(x)} \Rightarrow \text{Değişken katsayılı dif. denklem}$$

$a_1,a_2,\dots,a_n$ sbt olmak üzere

$$\boxed{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)} \Rightarrow \text{Sbt. katsayılı dif. denk.}$$

(Derecesi 1, mertebesi n)

İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$F(x,y,y',y'')=0 \rightarrow$ Genel çözümü $\Rightarrow G.(x,y,C_1,C_2)=0$

ÖZEL DURUMLU BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$y''=f(x,y,y')$ II. mertebeden dif. denklem ele alınsın.

1) y ve y' nün Bulunmadığı Denklemler:

$$y''=f(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x)$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int f(x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)+C_1$$

$$\int dy=\int\left[f_1(x)+C_1\right]dx$$

$$\boxed{y=f_2(x)+C_1x+C_2}$$ Genel Çözüm

$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$ için de bu yöntem kullanılır.

Örnek: $y''=\frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Artg}\,x+C_1$$

$$\int dy=\int(\mathrm{Artg}\,x+C_1)dx$$

$\mathrm{Artg}\,x=u$

$dx=dv$

$$y=x\,\mathrm{artg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$$

2) x ve y' nün Bulunmadığı Denklemler:

$$y'' = f(y)$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= p \\ y'' &= p\cdot\frac{dp}{dy}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= \frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} \\ &= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy'}{dy}\end{aligned}\right\}$$

Her zaman kullanmak zorunda değiliz.

$$p\cdot\frac{dp}{dy} = f(y)$$

$$\int p\cdot dp = \int f(y)dy$$

$$\frac{p^2}{2} = f_1(y) + C_1$$

$$p^2 = 2f_1(y) + 2C_1$$

$$p = \sqrt{2f_1(y)+2C_1} = \frac{dy}{dx}$$ Pozitif olanı alıyoruz.

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{2f_1(y)+2C_1}}$$

$$\boxed{x = \varphi(y, C_1, C_2)}$$

Örnek: $y^3 y'' = a^2$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.
(a=sbt.)

$$\left.\begin{aligned} y' &= p \\ y'' &= p\cdot\frac{dp}{dy}\end{aligned}\right\} \quad y^3\cdot p\cdot\frac{dp}{dy} = a^2$$

$$\int p\,dp = \int \frac{a^2}{y^3}dy$$

$$\frac{p^2}{\cancel{2}} = \frac{-a^2}{\cancel{2}y^2} + \frac{C_1}{\cancel{2}}$$

$$p^2 = \frac{C_1\cdot y^2 - a^2}{y^2}$$

$$p = \sqrt{\frac{C_1\cdot y^2 - a^2}{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C_1 \cdot y^2 - a^2}{y^2}}$$

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{y^2}{C_1 \cdot y^2 - a^2}}\, dy = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 \cdot y^2 - a^2}}$$

$C_1 y^2 - a^2 = u$
$2C_1 y\,dy = du$
$y\,dy = \frac{du}{2C_1}$

$$x = \frac{1}{2C_1} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{C_1} u^{1/2} + C_2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 y^2 - a^2} + C_2}$$

Örnek: $y'' = 2y^3 + 8y$ dif. denkleminin $x = \frac{\pi}{4}$ için $y = 2$ ve $y' = 8$ olan özel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} y' &= P \\ y'' &= P \cdot \frac{dP}{dy} \end{aligned}\right\} \quad P \cdot \frac{dP}{dy} = 2y^3 + 8y$$

$$\int P \cdot dP = \int (2y^3 + 8y)\, dy$$

$$\frac{P^2}{2} = \frac{y^4}{2} + 4y^2 + C_1$$

$$P^2 = y^4 + 8y^2 + 2C_1$$

$$64 = 16 + 32 + 2C_1$$

$$16 = 2C_1$$

$$\boxed{C_1 = 8}$$

$$P^2 = y^4 + 8y^2 + 16 = (y^2 + 4)^2$$

$$P = y^2 + 4 = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \int \frac{dy}{y^2 + 4}$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Artg} \frac{u}{a}$$

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{artg} \frac{u}{2} + C_2$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{artg} 1 + C_2$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + C_2$$

$$\boxed{C_2 = \frac{\pi}{8}}$$

$$x=\frac{1}{2}\,\mathrm{Artg}\,\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\mathrm{Artg}\,\frac{y}{2}$$

$$\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{y}{2}$$

$$\boxed{y=2\,\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

3) x Değişkeninin Bulunmadığı Diferansiyel Denklemler:

$$y''=f(y,y')$$

$$\left.\begin{aligned} y'&=p\\ y''&=p\cdot\frac{dp}{dy}\end{aligned}\right\}\quad p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

$$\int f(p)\,dp=\int G(y)\,dy$$

$$F_1(P)=G_1(y)+C_1$$

$$P=F_1^{-1}\left[G_1(y)+C_1\right]=\frac{dy}{dx}$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{F_1^{-1}\left[G_1(y)+C_1\right]}$$

$$\boxed{x=\varphi(y,C_1,C_2)}$$

Örnek: $y.y''=y^2y'+y'^2$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} y'&=p\\ y''&=p.\frac{dp}{dy}\end{aligned}\right\}\quad y.p\frac{dp}{dy}=y^2.p+p^2$$

$$p\left(y.\frac{dp}{dy}-y^2-p\right)=0$$

1) $p=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\boxed{y=C}$ Genel çözüm niteliği taşımaz

$\Downarrow$
Yabancı çözüm

2) $y\cdot\frac{dP}{dy}-y^2-P=0$

$y\cdot\frac{dP}{dy}-P=y^2$

$\boxed{\frac{dP}{dy}-\frac{P}{y}=y}$ L.D.D.

P ⇒ fonk.
y ⇒ değişken

$\frac{dP}{dy}-\frac{P}{y}=0$

$\int\frac{dP}{P}=\int\frac{dy}{y}$

$\ln P=\ln y+\ln K$

$\boxed{P=Ky}$

$K=K(y)$

$\frac{dP}{dy}=\frac{dK}{dy}\cdot y+K$

$\frac{dK}{dy}\cdot\cancel{y}+\cancel{K}-\cancel{K}=\cancel{y}$

$dK=dy$

$K=y+C_1$

$\boxed{P=(y+C_1)\cdot y}$

$\frac{dy}{dx}=(y+C_1)\cdot y$

$\int dx=\int\frac{dy}{(y+C_1)\cdot y}$

$\frac{1}{y(y+C_1)}=\frac{A}{\underset{(y+C_1)}{y}}+\frac{B}{y+C_1}$

$1\equiv Ay+AC_1+By$

$1=(A+B)y+AC_1$

$A+B=0$ $AC_1=1$

$B=-\frac{1}{C_1}$ $A=\frac{1}{C_1}$

$x=\frac{1}{C_1}\left[\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y+C_1}\right]$

$x=\frac{1}{C_1}\left(\ln y-\ln(y+C_1)\right)+C_2$

$\boxed{x=\frac{1}{C_1}\ln\frac{y}{y+C_1}+C_2}$

Ödev: $y'' = y'^3 + y'$

$$\left.\begin{array}{l} y' = p \\ y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy} \end{array}\right\} \quad p \cdot \frac{dp}{dy} = p^3 + p$$

$$p\left(\frac{dp}{dy} - p^2 - 1\right) = 0$$

1) $p = 0$, $y = C$

2) $\dfrac{dp}{dy} = p^2 + 1$

$$\int \frac{dp}{p^2+1} = \int dy$$

$$\operatorname{Arctg} P = y + C_1$$

$$P = tg(y + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = tg(y + C_1)$$

$$\int \frac{dy}{tg(y+C_1)} = \int dx$$

$$\ln \sin(y + C_1) = x + \ln C_2$$

$$\frac{\sin(y+C_1)}{C_2} = e^x$$

$$\sin(y + C_1) = C_2 \cdot e^x$$

$$\boxed{y = \arcsin C_2 \cdot e^x - C_1}$$

4) y değişkeni Bulunmayan Diferansiyel Denklemler:

$$y'' = f(x, y')$$

$$\begin{array}{l} y' = P \\ y'' = \dfrac{dp}{dx} \end{array} \quad \left\{ \frac{dP}{dx} = f(x, P) \right.$$

Bu, I. mertebeden bir dif. denklemdir ve türü göz önüne alınarak çözülür.

$$P = \phi(x, C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, C_1)$$

$$\int dy = \int \phi(x, C_1)\, dx$$

$$\boxed{y = \varphi(x, C_1, C_2)}$$

Örnek: $xy''+2y'=4\ln x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} y'=P \\ y''=\frac{dP}{dx} \end{array}\right\} \quad x.\frac{dP}{dx}+2p=4\ln x$$

$$\frac{dP}{dx}+2\frac{P}{x}=4\,\frac{\ln x}{x} \quad \text{L.D.D.}$$

$$\frac{dP}{dx}+\frac{2P}{x}=0$$

$$\frac{dP}{dx}=-2\frac{P}{x}$$

$$\int\frac{dP}{P}=\int-2\frac{dx}{x}$$

$$\ln P=-2\ln x+\ln K$$

$$\boxed{P=\frac{K}{x^2}} \qquad K=K(x)$$

$$\frac{dP}{dx}=\frac{K'.x^2-2xK}{x^4}$$

$$\frac{K'}{x^2}-\cancel{\frac{2K}{x^3}}+2\cancel{\frac{K}{x^3}}=4\frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{dK}{dx}=4x\ln x$$

$$\int dK=\int 4x\ln x\,dx \qquad \begin{array}{l} x\,dx=dv \\ \ln x=u \end{array}$$

$$K=2x^2\ln x-x^2+C_1$$

$$P=2\ln x-1+\frac{C_1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=P=2\ln x-1+\frac{C_1}{x^2}$$

$$\int dy=\int\left(2\ln x-1+\frac{C_1}{x^2}\right)dx \qquad \begin{array}{l} \ln x=u \\ dx=dv \end{array}$$

$$\boxed{y=2x\ln x-2x-x-\frac{C_1}{x}+C_2}$$

7) Bağımlı Değişkeni ve İlk k. Mertebeye Kadar Türevleri Bulunmayan Diferansiyel Denklemler:

$$F(x, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

* $u = y^{(k+1)}$, $u' = y^{(k+2)}$, $\vdots$ $\Big\}$ $f(x,u,u',u'',\dots,u^{(n-(k+1))}) = 0$ şeklinde düzenlenen dif. denklem ilk denkleme nazaran $(k+1)$ mertebe düşük bir denklemdir.

Örnek: $x.\dfrac{d^4y}{dx^4} - 4\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{d^3y}{dx^3} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d^4y}{dx^4} \end{aligned}\right\} \quad x.\frac{du}{dx} - 4u = 0$$

$$x.\frac{du}{dx} = 4u$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 4\frac{dx}{x}$$

$$\ln u = 4\ln x + \ln C_1$$

$$\boxed{u = C_1.x^4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1.x^4$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = C_1.x^4$$

$$\int d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \int C_1.x^4.dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C_1x^5}{5} + C_2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{C_1x^5}{5} + C_2$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int\left(\frac{C_1x^5}{5} + C_2\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1.x^6}{30} + C_2x + C_3$$

$$\int dy = \int \left(\frac{C_1 x^6}{30} + C_2 x + C_3 \right) dx$$

$$\boxed{y = \underbrace{\frac{C_1 x^7}{210}}_{k_1} + \underbrace{\frac{C_2 x^2}{2}}_{k_2} + \underbrace{C_3}_{k_3} x + \underbrace{C_4}_{k_4}}$$

6) Liouville Diferansiyel Denklemi:

f(x) ve g(y) sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\frac{d^2y}{dx^2} + f(x).\frac{dy}{dx} + g(y).\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ şeklinde olup II. mertebeden değişkenlerine ayrılabilir bir dif. denklem niteliğindedir.

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + f(x) + g(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + f(x) + g(y)\frac{dy}{dx} = 0$ Denklemi dx ile çarparsa

$$\int d\left[\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] + \int f(x)dx + \int g(y)dy = \int 0$$

$$\ln\frac{dy}{dx} + f_1(x) + g_1(y) = \ln C_1$$

$$\ln\frac{1}{C_1}\frac{dy}{dx} = -f_1(x) - g_1(y)$$

$$\frac{1}{C_1}\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{-f_1(x)-g_1(y)}} = \underbrace{e^{-f_1(x)}} . \underbrace{e^{-g_1(y)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 . e^{-f_1(x)} . e^{-g_1(y)}$$

$$\int e^{g_1(y)} dy = \int C_1 . e^{-f_1(x)} dx$$

$$\boxed{g_2(y) = C_1 f_2(x) + C_2}$$

Örnek: $y'' - \frac{3}{x}y' - \frac{1}{2}y'^2 = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{y''}{y'} - \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y') - \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\int d(\ln y') - \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{1}{2}dy = 0$$

$$\ln y' - 3\ln x - \frac{1}{2}y = \ln C_1$$

$$\ln \frac{y'}{C_1} = \ln x^3 + \frac{1}{2}y$$

$$\frac{y'}{C_1} = e^{\ln x^3 + \frac{y}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 . e^{\ln x^3} . e^{\frac{y}{2}}$$

$$\int e^{-\frac{y}{2}} . dy = \int C_1 . x^3 dx$$

$$\boxed{-2e^{-\frac{y}{2}} + C_2 = C_1 . \frac{x^4}{4}}$$

İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$ay'' + by' + cy = f(x)$

$f(x) = 0$ 2. tarafsız denklem

$f(x) \neq 0$ 2. taraflı denklem

$ay'' + by' + cy = 0$ Çözümü:

$a=0$ olarak kabul edelim.

$by' + cy = 0$

$b.\frac{dy}{dx} = -cy$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \overset{r}{\boxed{-\frac{c}{b}}}\, dx$$

$$\ln y = rx + \ln C$$

$$\boxed{y = C.e^{rx}}$$

$$y' = C.r.e^{rx}$$

$$y'' = C.r^2.e^{rx}$$

$$aCr^2.e^{rx} + b.Cre^{rx} + cCe^{rx} = 0$$

$$\underbrace{C.e^{rx}}\ \underbrace{(ar^2 + br + c)} = 0$$

① $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$

$y = C.e^{rx}$'teki r değeri ① denklemini sağlayan bir kök ise $y = C.e^{rx}$ bir çözümdür.

① nolu denkleme diferansiyel denklemin karakteristik denklemi denir.

$y'' \longrightarrow r^2$

$y' \longrightarrow r$

$y \longrightarrow$

$ar^2 + br + c = 0$

1) $\Delta > 0$ $\quad r_1, r_2$ ise $\quad y_G = C_1.e^{r_1 x} + C_2.e^{r_2 x}$

2) $\Delta = 0$ $\quad r_1 = r_2 = r$ (Çakışık kök) $\quad y_G = e^{rx}(C_1 x + C_2)$ Niye böyle olduğunun ispatı [illegible]?

3) $\Delta < 0$ $\quad r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ $\quad y_G = e^{\alpha x}.(C_1.\cos\beta x + C_2.\sin\beta x)$

Örnekler:

1-) $y'' + y' - 2y = 0$

$r^2 + r - 2 = 0$ $\quad r_1 = -2$, $r_2 = 1$ $\quad y_G = C_1.e^{-2x} + C_2.e^{x}$

2-) $y'' - 4y' + 4y = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0$ $\quad r_1 = r_2 = 2$ $\quad y_G = e^{2x}(C_1 x + C_2)$

$(r-2)^2 = 0$

3-) $y''-2y'+5y=0$

$r^2-2r+5=0$

$\Delta=4-5.4=-16<0$

$r_{1,2}=\dfrac{2\mp\sqrt{-16}}{2}$ $\sqrt{-1}=i$

$r_{1,2}=\dfrac{2\mp 4i}{2}=1\mp 2i$

$y_G=e^x\left(C_1.\cos 2x+C_2.\sin 2x\right)$ β, mutlak değer olarak alınacaktır.

$ay''+by'+cy=f(x)$ Çözümü:

1. Yöntem: Bu diferansiyel denklemin çözümü 2. tarafsız denklemin çözümü ile 2. taraflı denklemin özel çözümünün toplamına eşittir.

$y=y_G+y_ö$

a) $f(x)$ m. dereceden bir polinom olsun. O taktirde seçilmesi gereken özel çözüm yine aynı dereceden bir polinom olmalıdır.

Bu polinomun türevleri alınarak denklemde yerine yazılıp polinom özdeşliği sayesinde polinomun katsayıları bulunur.

Örnek: $y''+y'-2y=x^2-1$ dif. denklemini çözünüz.

$r^2+r-2=0$

$\left.\begin{matrix}r_1=1\\ r_2=-2\end{matrix}\right)$ $\boxed{y_G=C_1.e^x+C_2.e^{-2x}}$

$y_ö=ax^2+bx+c$

$y_ö'=2ax+b$

$y_ö''=2a$

$2a+2ax+b-2ax^2-2bx-2c\equiv x^2-1$

$-2ax^2+(2a-2b)x+2a+b-2c\equiv x^2-1$

$-2a=1$ $2a-2b=0$ $2a+b-2c=-1$

$a=-\frac{1}{2}$ $a=b$ $\cancel{-1}-\frac{1}{2}-2c=\cancel{-1}$

$b=-\frac{1}{2}$ $-2c=\frac{1}{2}$

$c=-\frac{1}{}$

$$\boxed{y_{\ddot{o}} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$$

$$y = y_G + y_{\ddot{o}}$$

$$\boxed{y = C_1 . e^{x} + C_2 . e^{-2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$$

Özel Durum:

Eğer karakteristik denklemin köklerinden biri 0 ise seçilmesi gereken polinom x ile, eğer ikisi de 0 ise seçilmesi gereken polinom x^2 ile çarpılır.

Örnek: $y'' - y' = 2x + 1$

$$r^2 - r = 0$$

$$r(r-1) = 0 \qquad \left.\begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{matrix}\right) \boxed{y_G = C_1 + C_2 . e^{x}}$$

$$y_{\ddot{o}} = (ax+b)x$$

$$y_{\ddot{o}} = ax^2 + bx$$

$$y'_{\ddot{o}} = 2ax + b$$

$$y''_{\ddot{o}} = 2a$$

$$2a - 2ax - b \equiv 2x + 1$$

$$-2a = 2 \qquad 2a - b = 1$$

$$a = -1 \qquad -2 - b = 1$$

$$b = -3$$

$$y_{\ddot{o}} = -x^2 - 3x$$

$$\boxed{y = y_G + y_{\ddot{o}} = C_1 + C_2 . e^{x} - x^2 - 3x}$$

b) $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = M . e^{\alpha x}$ şeklinde bir üstel fonksiyon ise seçilmesi gereken özel çözüm $y_{\ddot{o}} = k . e$ tir.

<u>Örnek:</u> $y''-4y'+3y=4e^{2x}$

$$r^2-4r+3=0 \quad \left.\begin{matrix} r_1=3 \\ r_2=1 \end{matrix}\right\} \boxed{y_G=C_1.e^{3x}+C_2.e^{x}}$$

$y_{\ddot{o}}=k.e^{2x}$

$y'_{\ddot{o}}=2k.e^{2x}$

$y''_{\ddot{o}}=4k.e^{2x}$

$$4k.e^{2x}-8k.e^{2x}+3ke^{2x}=4e^{2x}$$

$$-k.e^{2x}=4e^{2x}$$

$$k=-4$$

$y_{\ddot{o}}=-4e^{2x}$

$$\boxed{y=y_G+y_{\ddot{o}}=C_1.e^{3x}+C_2.e^{x}-4e^{2x}}$$

<u>Özel Durum:</u> Eğer α karakteristik denklemin bir kökü ise seçilen özel çözüm x ile çarpılır. α karakteristik denklemin 2 katlı kökü ise seçilen özel çözüm x^2 ile çarpılır.

<u>Örnek:</u> $y''-5y'+6y=5.e^{2x}$

$$r^2-5r+6=0 \quad \left.\begin{matrix} r_1=3 \\ r_2=2 \end{matrix}\right) y_G=C_1.e^{3x}+C_2.e^{2x}$$

$y_{\ddot{o}}=(k.e^{2x})x=kx.e^{2x}$

$y'_{\ddot{o}}=k.e^{2x}+2kxe^{2x}$

$y''_{\ddot{o}}=2ke^{2x}+2k.e^{2x}+4kx.e^{2x}$

$$4ke^{2x}+\cancel{4kx.e^{2x}}-5ke^{2x}-\cancel{10kxe^{2x}}+\cancel{6kx.e^{2x}}=5.e^{2x}$$

$$-k.e^{2x}=5.e^{2x}$$ [illegible]

$$-k=5$$

$$k=-5$$

$y_{\ddot{o}}=-5x.e^{2x}$

$$\boxed{y=y_G+y_{\ddot{o}}=C_1.e^{3x}+C_2.e^{2x}-5x.e^{2x}}$$

c) $f(x)$ fonksiyonu $f(x)=M\sin\lambda x+N.\cos\lambda x$ şeklindeyse seçilmesi gereken özel çözüm $y_ö=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$ dir.

Örnek: $y''-5y'+6y=2\cos x$

$$r^2-5r+6=0 \quad \left.\begin{matrix} r_1=2 \\ r_2=3 \end{matrix}\right) y_G=C_1.e^{2x}+C_2.e^{3x}$$

$$y_ö=A\sin x+B\cos x$$

$$y'_ö=A\cos x-B\sin x$$

$$y''_ö=-A\sin x-B\cos x$$

$$-A\sin x-B\cos x-5A\cos x+5B\sin x+6A\sin x+6B\cos x\equiv 2\cos x$$

$$5A\sin x+5B\cos x-5A\cos x+5B\sin x\equiv 2\cos x$$

$$(5A+5B)\sin x+(5B-5A)\cos x\equiv 2\cos x$$

$$5A+5B=0 \qquad 5B-5A=2$$

$$5A=-5B \qquad 5B+5B=2$$

$$\boxed{A=-B} \qquad B=\frac{1}{5}$$

$$A=-\frac{1}{5}$$

$$y_ö=-\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x$$

$$\boxed{y=y_G+y_ö=C_1.e^{2x}+C_2.e^{3x}-\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x}$$

Özel Durum:

Karakteristik denklemin köklerinin kompleks kök olması ve bu köklerde reel kısmın olmaması, yani $r_{1,2}=\mp i\beta$ olsun.

$f(x)=M\sin\beta x+N\cos\beta x$ ise seçilmesi gereken özel çözüm x ile çarpılır.

$$y_ö=(A\sin\beta x+B\cos\beta x)x$$

Örnek: $y''+4y=\sin 2x$ dif. denklemini çözünüz.

$$r^2+4=0 \qquad r_{1,2}=\mp 2i$$

$$y_G=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

$$y_ö=(A\sin 2x+B\cos 2x)x=Ax\sin 2x+Bx\cos 2x$$

$$y'_ö=A\sin 2x+2Ax\cos 2x+B\cos 2x-2Bx\sin 2x$$

$$y''_ö=2A\cos 2x+2A\cos 2x-4Ax\sin 2x-2B\sin 2x-2B\sin 2x-4Bx\cos$$

$$4A\cos 2x - \cancel{4Ax\sin 2x} - 4B\sin 2x - \cancel{4Bx\cos 2x} + \cancel{4Ax\sin 2x} + \cancel{4Bx\cos 2x} \equiv \sin 2x$$

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x \equiv \sin 2x$$

$$4A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$-4B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$y_ö = -\frac{x}{4}\cos 2x$$

$$y = y_G + y_ö$$

d) $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = R(x).e^{\alpha x}$ şeklinde ise seçilmesi gereken özel çözüm $y_ö = u(x).e^{\alpha x}$ tir.

Örnek: $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^x$

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \qquad r_1 = -1$$
$$r_2 = -2$$

$$y_G = C_1.e^{-x} + C_2.e^{-2x}$$

$$y_ö = u.e^x$$

$$y'_ö = u'.e^x + u.e^x$$

$$y''_ö = u''.e^x + u'.e^x + u'.e^x + u.e^x = 2u'e^x + u''.e^x + u.e^x$$

$$u''.e^x + 2u'.e^x + u.e^x + 3u'.e^x + 3u.e^x + 2u.e^x = (x+1)e^x$$

$$u'' + 5u' + 6u = x+1 \qquad r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$u = ax + b$$

$$u' = a$$
$$u'' = 0$$

$$0 + 5a + 6ax + 6b \equiv x + 1$$

$$6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$5a + 6b = 1$$
$$6b = 1 - \frac{5}{6}$$
$$6b = \frac{1}{6}$$
$$b = \frac{1}{36}$$

$$u = \frac{x}{6} + \frac{1}{36}$$

$$y_ö=\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)\cdot e^{x}$$

$$\boxed{y=y_G+y_ö=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-2x}+\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)\cdot e^{x}}$$

Örnek: $y''-2y'+2y=e^{x}\cos x$ dif. denklemini çözünüz.

$$r^2-2r+2=0 \qquad r_{1,2}=1\mp i$$

$$y_G=e^{x}\left(C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x\right)$$

$$y_ö=u\cdot e^{x}$$

$$y'_ö=u'\cdot e^{x}+u\cdot e^{x}$$

$$y''_ö=u''\cdot e^{x}+2u'e^{x}+u\cdot e^{x}$$

$$u''+\cancel{2u'}+u-\cancel{2u'}-\cancel{2u}+\cancel{2u}=\cos x$$

$$u''+u=\cos x \qquad r^2+1=0 \quad r_{1,2}=\mp i$$

$$u=(A\sin x+B\cos x)\cdot x=Ax\sin x+Bx\cos x$$

$$u'=A\sin x+Ax\cos x+B\cos x-Bx\sin x$$

$$u''=A\cos x+A\cos x-Ax\sin x-B\sin x-B\sin x-Bx\cos x$$

$$2A\cos x-2B\sin x-\cancel{Ax\sin x}-\cancel{Bx\cos x}+\cancel{Ax\sin x}+\cancel{Bx\cos x}\equiv\cos x$$

$$2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$-2B=0\Rightarrow B=0$$

$$u=\frac{x}{2}\sin x$$

$$y_ö=\left(\frac{x}{2}\sin x\right)e^{x}$$

$$\boxed{y=y_G+y_ö=e^{x}\left(C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x\right)+e^{x}\left(\frac{x}{2}\sin x\right)}$$

e) $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots$ birkaç fonksiyonun toplamı olsun. Bu diferansiyel denklemin çözümü için seçilmesi gereken özel çözüm herbir fonksiyon için ayrı ayrı özel çözüm seçerek olur.

Örnek: $y'' + 4y = e^x + \sin x$

$r^2 + 4 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp 2i$

$$\boxed{y_G = C_1 \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x}$$

$y_{ö_1} = k . e^x$

$y'_{ö_1} = k . e^x$

$y''_{ö_1} = k . e^x$

$k . e^x + 4 k e^x = e^x$

$5k = 1$

$k = \frac{1}{5}$

$$\boxed{y_{ö_1} = \frac{1}{5} e^x}$$

$y_{ö_2} = A \sin x + B \cos x$

$y'_{ö_2} = A \cos x - B \sin x$

$y''_{ö_2} = -A \sin x - B \cos x$

$-A\sin x - B\cos x + 4A\sin x + 4B\cos x = \sin x$

$3A\sin x + 3B\cos x = \sin x$

$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$3B = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\boxed{y_{ö_2} = \frac{1}{3} \sin x}$$

$$\boxed{y = y_G + y_{ö_1} + y_{ö_2} = C_1 . \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5} e^x + \frac{1}{3} \sin x}$$

2. Yöntem Sabitin Değişimi Yöntemi Lagrange Yöntemi

$ay'' + by' + cy = f(x)$

$ar^2 + br + c = 0$

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = C_1(x) \\ C_2 = C_2(x) \end{array}\right\} \text{Çözülecek.}$$

$C_1' \cdot y_1 + C_2' y_2 = 0$ Bu bir kabul.

$C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = \frac{f(x)}{a}$

yerine yaz.

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{C_1' = \frac{dC_1}{dx}} \longrightarrow C_1(x) \\ \boxed{C_2' = \frac{dC_2}{dx}} \longrightarrow C_2(x) \end{array}\right\}$$

Örnek: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

$$\left.\begin{array}{l} r^2+1=0 \\ r_{1,2} = \mp i \end{array}\right\} y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cos x$$

$C_1 = C_1(x) \qquad C_2 = C_2(x)$

$$\left.\begin{array}{l} C_1' \cdot \sin x + C_2' \cos x = 0 \\ C_1' \cos x - C_2' \cdot \sin x = \dfrac{1}{\sin x} \end{array}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1' = \frac{dC_1}{dx} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \int dC_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$C_1(x) = \ln(\sin x) + K_1$$

$$C_2' = \frac{dC_2}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1 \Rightarrow \int dC_2 = \int - dx$$

$$C_2(x) = -x + K_2$$

$$\boxed{y = \left[\ln(\sin x) + K_1\right] \cdot \sin x + \left[-x + K_2\right] \cos x}$$

$$y = \underbrace{K_1 \cdot \sin x + K_2 \cos x}_{\text{Genel çözüm}} + \underbrace{\sin x \cdot \ln(\sin x) - x \cdot \cos x}_{\text{Özel çözüm}}$$

Örnek: $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

n. MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

$f(x)=0$ 2. tarafsız

$f(x)\neq 0$ 2. taraflı

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

$$y_G = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

Karakteristik denklemin kökleri katlı gerçek kök halinde ise e^{rx}'in çarpanı olan polinomların dereceleri ve katlı kompleks kök halinde ise $\sin \beta x, \cos \beta x$'in çarpanı olan polinomların dereceleri katlılık mertebesinden eksiktir.

<u>Örnek:</u> $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$

$$r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r = 0$$
$$r(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0$$
$$r(r+1)^3 = 0$$

$r_1 = 0$ $\quad r_{2,3,4} = -1$ (Üç katlı)

$$y_G = c_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + e^{-x}(c_2 x^2 + c_3 x + c_4) = c_1 + e^{-x}(c_2 x^2 + c_3 x + c_4)$$

<u>Örnek:</u> $y^{IV} + 9y'' = 0$

$$r^4 + 9r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 + 9) = 0$$

$r_{1,2} = 0$ (iki katlı)

$r_{3,4} = \mp 3i$

$$y_G = e^{0x}(c_1 x + c_2) + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$$

<u>Örnek:</u> $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r^2 + 1)^2 = 0$$

$r_{1,2,3,4} = \mp i$ (2 katlı)

$$y_G = (c_1 x + c_2)\sin x + (c_3 x + c_4)\cos x$$

Örnek: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

-2 ile +2 aralığında çok deneme yap

$r_1 = 1$

	1	-2	-1	2
$r_1=1$		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

aşağı iner

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$r_2 = 2$
$r_3 = -1$

$$y_G = C_1 . e^x + C_2 e^{2x} + C_3 . e^{-x}$$

Örnek: $y''' + 3y'' - 4y = 0$

$$r^3 + 3r^2 - 4 = 0$$

$r_1 = 1$

	1	3	0	-4
$r_1=1$		1	4	4
	1	4	4	0

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$

$r_{2,3} = -2$ (iki katlı)

$$y_G = c_1 . e^x + e^{-2x}(C_2 x + C_3)$$

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ 'in Çözümü

Bu denklemin çözümü için önce genel çözüm bulunur. Daha sonra $f(x)$'in durumuna göre özel çözüm bulunur ve bu 2 çözümün toplamı dif. denklemin istenilen çözümüdür.

1) $f(x)$ n. dereceden bir polinom ise buna ait özel çözüm aynı dereceden bir polinomdur.

Eğer r^p karakteristik denklemin bir çarpanı ise seçilen özel çözümü x^p ile çarparız.

2) $f(x)=Me^{\alpha x}$ ise özel çözüm $k.e^{\alpha x}$ seçilir.

Eğer $r=\alpha$ karakteristik denklemin p katlı kökü ise seçilen özel çözüm x^p ile çarpılır.

3) $f(x)=M\sin\lambda x+N\cos\lambda x$ ise özel çözüm $y_ö=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$ seçilir.

Eğer $r=\mp\lambda i$ karakteristik denklemin p katlı kökü ise seçilen özel çözüm x^p ile çarpılır.

4) $f(x)=R(x).e^{\alpha x}$ ise $y_ö=U(x).e^{\alpha x}$ seçilir.

5) $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+---$ ise her bir fonksiyon için denklem ayrı ayrı çözülür.

<u>Örnek:</u> $y'''-2y''-y'+2y=3x^2-5x+2$

$$r^3-2r^2-r+2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1=1 \\ r_2=-1 \\ r_3=2 \end{array}\right\} \quad y_G=c_1.e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$$

$$y_ö=ax^2+bx+c$$

$$y'_ö=2ax+b$$

$$y''_ö=2a$$

$$y'''_ö=0$$

$$0-4a-2ax-b+2ax^2+2bx+2c=3x^2-5x+2$$

$$2ax^2+(2b-2a)x-4a-b+2c=3x^2-5x+2$$

$$2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$2b-2a=-5$$

$$2b=-5+\cancel{2}.\frac{3}{\cancel{2}}$$

$$2b=-2 \Rightarrow b=-1$$

$$-4a-b+2c=2$$

$$-\overset{2}{\cancel{4}}.\frac{3}{\cancel{2}}+1+2c=2$$

$$2c=1+6=7 \Rightarrow c=\frac{7}{2}$$

$$y_ö=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{7}{2} \qquad \boxed{y=y_G+y_ö}$$

Örnek: $y^{IV}+4y''=\underbrace{6\sin 2x}_{f_1(x)}+\underbrace{2}_{f_2(x)}$

$r^4+4r^2=0$

$\underset{\sim}{r^2}(r^2+4)=0$

$r_{1,2}=0$ (iki katlı)

$r_{3,4}=\mp 2i$

$y_G=C_1x+C_2+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$

$y_{ö_2}=ax^2$ (Özel durum var)

$$\left.\begin{array}{l} y'_{ö_2}=2ax \\ y''_{ö_2}=2a \\ y'''_{ö_2}=0 \\ y^{IV}_{ö_2}=0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 0+8a=2 \\ a=\frac{1}{4} \\ \boxed{y_{ö_2}=\frac{x^2}{4}} \end{array}$$

$y_{ö_1}=(A\sin 2x+B\cos 2x)x=Ax\sin 2x+Bx\cos 2x$

$y'_{ö_1}=A\sin 2x+2Ax.\cos 2x+B\cos 2x-2Bx\sin 2x$

$\vdots$

$A=0 \quad B=\frac{3}{8}$

$$\boxed{y_{ö_1}=\frac{3x}{8}\cos 2x}$$

$$\boxed{y=C_1x+C_2+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+\frac{3x}{8}\cos 2x+\frac{x^2}{4}}$$

__Örnek:__ $y''' + 3y'' - 4y = x.e^{-2x}$ dif. denklemini çözünüz.

→ [illegible] için özel durum yok

$$r^3+3r^2-4=0$$

$$r_1=1$$

$r_2=-2$ (2 katlı kök)

$$y_G = C_1.e^{x} + e^{-2x}(C_2x+C_3)$$

$$y_ö = u.e^{-2x}$$

$$y'_ö = u'.e^{-2x} - 2ue^{-2x}$$

$$y''_ö = u''.e^{-2x} \overbrace{-2u'e^{-2x} - 2u'.e^{-2x}}^{-4u'e^{-2x}} + 4ue^{-2x}$$

$$y'''_ö = u'''.e^{-2x} \underbrace{-2u''.e^{-2x} - 4u''.e^{-2x}}_{-6u''e^{-2x}} + \underbrace{8u'.e^{-2x} + 4u'.e^{-2x}}_{12u'.e^{-2x}} - 8ue^{-}$$

$$\cancel{e^{-2x}}(u''' - 6u'' + \cancel{12u'} - \cancel{8u} + 3u'' - \cancel{12u'} + \cancel{12u} - \cancel{4u}) = x\cancel{e^{-2x}}$$

$$u''' - 3u'' = x \qquad r^3-3r^2=0$$

$$r^2(r-3)=0$$

$$u=(ax+b)x^2 = ax^3+bx^2$$

$$u' = 3ax^2+2bx$$

$$u'' = 6ax+2b$$

$$u''' = 6a$$

$$6a - 18ax - 6b = x$$

$$-18a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{18}$$

$$6a-6b=0$$

$$6b=6a$$

$$b=a=-\frac{1}{18}$$

$$u = -\frac{1}{18}\left(x^3+x^2\right)$$

$$y_ö = u.e^{-2x} = -\frac{1}{18}\left(x^3+x^2\right)e^{-2x}$$

$$y=y_G+y_ö = C_1.e^{x} + e^{-2x}(C_2x+C_3) - \frac{1}{18}\left(x^3+x^2\right)e^{-2x}$$

Sabitin Değişimi Yöntemi:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

$$\left.\begin{matrix} C_1 = C_1(x) \\ C_2 = C_2(x) \\ \vdots \\ C_n = C_n(x) \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' \cdot y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' \cdot y_1^{(n-1)} + C_2' \cdot y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' \cdot y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0} \end{matrix}$$

Bu sistemde $C_1', C_2', \dots, C_n'$ bilinmeyenleri bulunur. Bulunan bu ifadelerin integralleri alınarak $C_1, C_2, \dots, C_n$ hesaplanır.

Örnek: $y''' + y' = \dfrac{1}{\cos x}$

$$r^3 + r = 0$$

$$r(r^2+1) = 0$$

$$r_1 = 0 \qquad r_{2,3} = \mp i$$

$$y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

$$C_1 = C_1(x)$$
$$C_2 = C_2(x)$$
$$C_3 = C_3(x)$$

$$\left.\begin{matrix} C_1' + C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0 \\ C_2' \cos x - C_3' \sin x = 0 \\ -C_2' \sin x - C_3' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{matrix}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\cos x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos x \\ 0 & 0 & -\sin x \\ 0 & \frac{1}{\cos x} & -\cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & 0 \\ 0 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1' = \frac{dC_1}{dx} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\cos x}$$

$$C_2' = \frac{dC_2}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_3' = \frac{dC_3}{dx} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$$

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \int dC_1 = \int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

$$C_1 = \ln(\sec x + tg\, x) + K_1$$

$$\frac{dC_2}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \int dC_2 = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$C_2 = \ln \cos x + K_2$$

$$\frac{dC_3}{dx} = -1 \Rightarrow \int dC_3 = \int -dx$$

$$C_3 = -x + K_3$$

$$\boxed{y = K_1 + \ln(\sec x + tg\, x) + \sin x(\ln \cos x + K_2) + \cos x(-x + K_3)}$$

Örnek: $y''+2y'+y=e^{-x}.\ln x$

$$r^2+2r+1=0$$

$$(r+1)^2=0$$

$$r_{1,2}=-1 \text{ (2 katlı kök)}$$

$$y=e^{-x}(C_1x+C_2)=C_1\underbrace{x.e^{-x}}_{y_1}+C_2\underbrace{e^{-x}}_{y_2}$$

$$C_1'x.e^{-x}+C_2'e^{-x}=0$$

$$C_1'(e^{-x}-xe^{-x})-C_2'e^{-x}=e^{-x}.\ln x$$

$$C_1'x+C_2'=0$$

$$C_1'(1-x)-C_2'=\ln x$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1-x & -1 \end{vmatrix}=-\cancel{x}-1+\cancel{x}=-1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \ln x & -1 \end{vmatrix}=-\ln x$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1-x & \ln x \end{vmatrix}=x.\ln x$$

$$C_1'=\frac{dC_1}{dx}=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\ln x$$

kısmi int.

$$\int dC_1=\int \ln x\,dx$$

$$C_1=x\ln x-x+K_1$$

$$C_2'=\frac{dC_2}{dx}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-x\ln x$$

$$\int dC_2=\int x\ln x\,dx \qquad \begin{matrix}\ln x=u\\ x\,dx=dv\end{matrix}$$

$$C_2=-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+K_2$$

$$y = e^{-x}\left(K_1 x + x^2 \ln x - x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + K_2\right)$$

Ödev / **Örnek:** $y'' - 4y' + 3y = 12\,\mathrm{Ch}\,3x$ $\quad \left(\mathrm{Ch}\,3x = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\right)$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ -3 \\ -1}}{r^2 - 4r + 3 = 0} \Rightarrow \begin{matrix} r_1 = 1 \\ r_2 = 3 \end{matrix}$$

$$y = C_1.e^{x} + C_2.e^{3x}$$

$$C_1'.e^{x} + C_2'.e^{3x} = 0$$

$$C_1'.e^{x} + 3C_2'.e^{3x} = 12\mathrm{Ch}\,3x = \cancel{12}^{6}\,\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{\cancel{2}} = 6\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{3x} \\ e^{x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{4x} - e^{4x} = 2e^{4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 6(e^{3x}+e^{-3x}) & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -6e^{3x}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right) = -6e^{6x} - 6 = -6\left(e^{6x}+1\right)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & 6(e^{3x}+e^{-3x}) \end{vmatrix} = 6e^{x}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right) = 6\left(e^{4x}+e^{-2x}\right)$$

$$C_1' = \frac{dC_1}{dx} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6e^{3x}(e^{3x}+e^{-3x})}{2e^{4x}} = -3e^{-x}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right) = -3\left(e^{2x}+e^{-4x}\right)$$

$$\int dC_1 = \int -3\left(e^{2x}+e^{-4x}\right)dx$$

$$C_1(x) = -3\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-4x}\right) + K_1$$

$$C_2' = \frac{dC_2}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6e^{x}(e^{3x}+e^{-3x})}{2e^{4x}} = 3e^{-3x}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right) = 3\left(1+e^{-6x}\right)$$

$$\int dC_2 = \int 3\left(1+e^{-6x}\right)dx$$

$$C_2(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}e^{-6x}\right) + K_2$$

$$y = e^{x}\left(-\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-4x} + K_1\right) + e^{3x}\left(3x - \frac{1}{2}e^{-6x} + K_2\right)$$

DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Euler Diferansiyel Denklemi:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \rightarrow$ Sabit katsayılar

$x^n, x^{n-1}, \ldots, x \rightarrow$ Değişken "

$x = e^t$ dönüşümü yapılır.

$$\left.\begin{matrix} y = y(x) \\ x = x(t) \\ t = t(x) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} y = y(x(t)) \\ y = y(t(x)) \end{matrix}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} = \boxed{e^{-t} \frac{dy}{dt} = e^{-t} Dy} \qquad D = \frac{d}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = e^{-t} \frac{dy'}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}\left[e^{-t} \frac{dy}{dt}\right]$$

$$= e^{-t}\left[-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2}\right]$$

$$y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t} D(D-1)y$$

$$y''' = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) = e^{-3t} D(D-1)(D-2)y$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = e^{-nt} D(D-1)(D-2) \cdots (D-n+1)y$$

Örnek: $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln x$ dif. denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{matrix} x = e^t \\ y' = e^{-t} \dfrac{dy}{dt} \\ y'' = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right) \end{matrix}\right\} \underbrace{e^{2t} e^{-2t}}_{1}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \underbrace{4e^t e^{-t}}_{1} \frac{dy}{dt} + 2y = \ln e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = t$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{matrix}\right\} y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$y_ö = at + b$

$y'_ö = a$

$y''_ö = 0$

$0 + 3a + 2at + 2b \equiv t$

$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$3a + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$

$y_ö = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$

$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

$y = C_1 . e^{-\ln x} + C_2 e^{-2\ln x} + \frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}$

$$\boxed{y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}}$$

<u>Örnek:</u> $x^3 y''' - 2x^2 y'' = 2x^3 - x$

$x = e^t$

$y' = e^{-t} Dy$

$y'' = e^{-2t} D(D-1)y$

$y''' = e^{-3t} D(D-1)(D-2)y$

$\underbrace{e^{3t} . e^{-3t}}_{1} (D^3 - 3D^2 + 2D)y - \underbrace{2e^{2t} . e^{-2t}}_{1} (D^2 - D)y = 2e^{3t} -$

$\underbrace{(D^3 - 5D^2 + 4D)}_{\frac{d^3y}{dt^3} - 5\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt}} y = \underbrace{2e^{3t}}_{f_1(t)} - \underbrace{e^t}_{f_2(t)}$

$r^3 - 5r^2 + 4r = 0$

$r(r^2 - 5r + 4) = 0$ $\quad r_1 = 0$
$r_2 = 1$
$r_3 = 4$

$y_G = C_1 + C_2 . e^t + C_3 . e^{4t}$

$y_{ö_1} = k . e^{3t}$

$y'_{ö_1} = 3ke^{3t}$

$y''_{ö_1} = 9ke^{3t}$

$y'''_{ö_1} = 27ke^{3t}$

$27ke^{3t} - 45ke^{3t} + 12ke^{3t} = 2e^{3t}$

$6ke^{3t} = 2e^{3t}$

$-6k = 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$ $\qquad y_{ö_1} = -\frac{1}{3} e^{3t}$

$y_{ö_2} = mte^t$

$y'_{ö_2} = me^t + mte^t$

$y''_{ö_2} = me^t + me^t + mte^t$

$y'''_{ö_2} = 2me^t + me^t + mte^t = 3me^t + mte^t$

$3me^t + \cancel{mte^t} - 10me^t - \cancel{5mte^t} + 4me^t + \cancel{4mte^t} = -e^t$

$-3me^t = -e^t$

$-3m = -1$

$m = \frac{1}{3}$

$y_{ö_2} = \frac{t}{3}e^t$

$y = C_1 + C_2e^t + C_3e^{4t} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{t}{3}e^t$

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

$y = C_1 + C_2 e^{\ln x} + C_3 e^{4\ln x} - \frac{1}{3}e^{3\ln x} + \frac{\ln x}{3} e^{\ln x}$

$$\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 x^4 - \frac{x^3}{3} + \frac{\ln x}{3} x}$$

Legendre Diferansiyel Denklemi:

$a_0(\alpha x + \beta)^n y^{(n)} + a_1(\alpha x + \beta)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(\alpha x + \beta) y' + a_n y = f(x)$

$\alpha x + \beta = e^t$

$y' = ae^{-t} Dy$

$y'' = \alpha^2 e^{-2t} D(D-1)y$

$\vdots$

$y^{(n)} = \alpha^n e^{-nt} D(D-1) \dots (D-n+1)y$

Örnek: $(1+2x)^2 y'' - 2(1+2x)y' - 12y = 3x+1$

$1+2x = e^t \Longrightarrow x = \frac{e^t - 1}{2}$

$\alpha = 2$

$y' = 2e^{-t} Dy$

$y'' = 4.e^{-2t} D(D-1)y$

$e^{2t}.4.e^{-2t}(D^2-D)y - 2e^t.2e^{-t}Dy - 12y = \frac{3}{2}(e^t-1)+1$

$(4D^2 - 8D - 12)y = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}$

$(D^2 - 2D - 3)y = \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{8}$

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$r_1 = 3, \; r_2 = -1 \quad \} \; y_G = C_1 e^{3t} + C_2 . e^{-t}$

$y_{ö_1} = k . e^t$

$y'_{ö_1} = k.e^t$

$y''_{ö_1} = k.e^t$

$\} \; k.e^t - 2ke^t - 3ke^t = \frac{3}{8}e^t$

$-4k = \frac{3}{8}$

$k = -\frac{3}{32}$

$y_{ö_1} = -\frac{3}{32}e^t$

$y_{ö_2} = a$

$y'_{ö_2} = 0$

$y''_{ö_2} = 0$

$\} \; 0 - 0 - 3a = -\frac{1}{8}$

$a = \frac{1}{24}$

$y_{ö_2} = \frac{1}{24}$

$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{3}{32}e^t + \frac{1}{24}$

$y = C_1 e^{3\ln(1+2x)} + C_2 e^{-\ln(1+2x)} - \frac{3}{32} e^{\ln(1+2x)} + \frac{1}{24}$

$$\boxed{y = C_1 . (1+2x)^3 + \frac{C_2}{1+2x} - \frac{3}{32}(1+2x) + \frac{1}{24}}$$

Ödev:1-) $(x-1)^3 y''' + 2(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' + 4y = \ln(x-1)$

Çözüm: $y = C_1(x-1) + \frac{C_2}{(x-1)^2} + C_3(x-1)^2 + \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{4}$

Ödev:2-) $x^2 y'' + xy' + 4y = x^2 \cdot \sin(2\ln x)$

Çözüm: $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{2t}\left(\frac{1}{20}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos 2t\right)$

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Bağımsız değişkenle bu değişkenin bilinmeyen n tane fonksiyonu ve fonksiyonların türevleri arasındaki n tane denklemden meydana gelen sisteme n bilinmeyenli dif. denk. sistemi denir.

Bir sistemde denklem sayısı bilinmeyen fonksiyon sayısına eşit, sistemin her denklemi bilinmeyen fonksiyonlardan birinin en yüksek mertebeli türevine göre çözülmüşse sisteme kanonik sistem denir.

Yalnız 1. mertebe türevleri içeren bir kanonik sisteme normal sistem denir.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$$

$\left\{\begin{array}{l} t \text{ değişken} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ bilinmeyen fn.} \end{array}\right.$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$$

$a_{ij}(t)$ fonksiyonlarına sistemin katsayıları denir.

$b_i(t)$ fonksiyonlarından her biri sıfırsa bu sisteme homojen sistem denir.

NORMAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMÜ

1. Yöntem (Türetme, yoketme yöntemi):

Bu yöntemde sistemin denklemini türetmek ve fonksiyonlardan biri hariç diğer bütün fonksiyonları yok etmek suretiyle bilinmeyen bir tek fonksiyonun diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü yardımıyla çözüm bulunur.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = -5y - z + 1 + x^2$

$$\frac{dz}{dx} = y - 3z + e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + 2x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - y + 3z - e^{2x} + 2x$$ {1'den z çeki yerine konur.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - y - 15y - 3\frac{dy}{dx} + 3 + 3x^2 - e^{2x} + 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = \underbrace{3x^2 + 2x + 3}_{f_1(x)} - \underbrace{e^{2x}}_{f_2(x)}$$ {$r^2+8r+16$ çözümü yap}

$$y = (C_1x + C_2)e^{-4x} + \frac{3x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{25}{128} - \frac{1}{36}e^{2x}$$

Bu değer sistemdeki denklemlerden herhangi birine yerine konarak diğer bilinmeyen fonksiyon da bulunur.

① 'de yerine konur.

$$z = (C_1x + C_2)e^{-4x} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{11}{128} + \frac{7}{36}e^{2x}$$

2. Yöntem:

Bu yöntemle dif. denklem türev operatörüne göre ifade edilir ve cebirsel denklemlerin çözümündeki gibi çözülür.

Sistemin genel çözümünde katsayılar determinantının açılımında bulunan D'lerin en yüksek derecesine eşit sayıda keyfi sabit bulunur.

~~2. Yöntem~~

Örnek: $(D+5)y + z = x^2 + 1$ $\qquad D = \frac{d}{dx}$

$$-y + (D+3)z = e^{2x}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+5 & 1 \\ -1 & D+3 \end{vmatrix} = (D+5)(D+3)+1 = \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \text{ tane keyfi sabit}}}{D^{\textcircled{2}}} + 8D + 16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x^2+1 & 1 \\ e^{2x} & D+3 \end{vmatrix} = (D+3)(x^2+1) - e^{2x} = 2x + 0 + 3x^2 + 3 - e^{2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D+5 & x^2+1 \\ -1 & e^{2x} \end{vmatrix} = (D+5)e^{2x} + x^2+1 = 2e^{2x} + 5e^{2x} + x^2 + 1$$

$$y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3x^2+2x+3-e^{2x}}{D^2+8D+16}$$

$$(D^2+8D+16)y = 3x^2+2x+3-e^{2x}$$

$$y = (C_1x+C_2)e^{-4x} + \frac{3x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{25}{128} - \frac{1}{36}e^{2x}$$

$$z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7e^{2x}+x^2+1}{D^2+8D+16}$$

$$(D^2+8D+16)z = 7e^{2x} + x^2+1$$

$$z = (C_3x+C_4)e^{-4x} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{11}{128} + \frac{7}{36}e^{2x}$$

2 tane keyfi sabit olmalı C1 C2 ile C3 C4 cinsinden yazılır.

Bulunan değerleri sistemdeki en basit denkleme yerlerine yazalım.

I. denklem için:

$$(D+5)y + z = x^2+1$$

$$C_1 e^{-4x} - 4C_1\cancel{xe^{-4x}} - \cancel{4C_2e^{-4x}} + \cancel{\frac{6x}{16}} - \cancel{\frac{1}{16}} - \cancel{\frac{2}{36}e^{2x}} + 5\cancel{C_1xe^{-4x}} + \cancel{5C_2e^{-4x}} + \cancel{\frac{15x^2}{16}} - \cancel{\frac{5}{16}}x +$$

$$\cancel{\frac{125}{128}} - \cancel{\frac{5}{36}e^{2x}} + C_3xe^{-4x} + C_4e^{-4x} + \cancel{\frac{x^2}{16}} - \cancel{\frac{x}{16}} + \cancel{\frac{11}{128}} + \cancel{\frac{7}{36}e^{2x}} = \cancel{x^2+1}$$

$$C_1\underline{xe}^{-4x} + C_2e^{-4x} + C_1e^{-4x} + C_3\underline{xe}^{-4x} + C_4e^{-4x} = 0$$

$$xe^{-4x}(C_1+C_3) + e^{-4x}(C_2+C_1+C_4) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1+C_3=0 \\ C_1+C_2+C_4=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C_3=-C_1 \\ C_4=-C_1-C_2 \end{array}$$

$$z = (-C_1x - C_1 - C_2)e^{-4x} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{11}{128} + \frac{7}{36}e^{2x}$$

Örnek: $\left.\begin{aligned} Dy-(D+1)z &= -e^{t} \\ y+(D-1)z &= e^{2t} \end{aligned}\right\}$ dif. denklemi çözünüz.

$D=\frac{d}{dt}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} D & -(D+1) \\ 1 & D-1 \end{vmatrix}=D^2-D+D+1=D^{\textcircled{2}}+1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -e^{t} & -(D+1) \\ e^{2t} & D-1 \end{vmatrix}=3e^{2t}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} D & -e^{t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix}=2e^{2t}+e^{t}$$

$y=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{3e^{2t}}{D^2+1}$

$(D^2+1)y=3e^{2t}$

$y=C_1\sin t+C_2\cos t+\frac{3}{5}e^{2t}$

$z=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2e^{2t}+e^{t}}{D^2+1}$

$(D^2+1)z=2e^{2t}+e^{t}$

$z=C_3\sin t+C_4\cos t+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}$

(Ara işlemler yapılmadı.)

$(C_1-C_3-C_4)\sin t+(C_2+C_3-C_4)\cos t=0$

$\left.\begin{aligned} C_1-C_3-C_4&=0 \\ C_2+C_3-C_4&=0 \end{aligned}\right\}$ $C_3=\frac{1}{2}(C_1-C_2)$

$C_4=\frac{1}{2}(C_1+C_2)$

Sınava dahil değil

Örnek: $\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2}+5y+z&=\cos 2x \\ \frac{d^2z}{dx^2}-y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$ dif. denklemi çözünüz.

$D=\frac{d}{dx}$

$(D^2+5)y+z=\cos 2x$

$-y+(D^2+3)z=0$

$$\Delta=\begin{vmatrix} D^2+5 & 1 \\ -1 & D^2+3 \end{vmatrix} = D^{\textcircled{4}}+8D^2+16$$

$$\vdots$$

HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ

Sadece genel çözümü var.

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+---+a_{1n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+---+a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+---+a_{nn}x_n$$

Bunun için $\left.\begin{array}{l} x_1=k_1e^{rt} \\ x_2=k_2e^{rt} \\ \vdots \\ x_n=k_ne^{rt} \end{array}\right\}$ şeklinde çözümler bulunur.

$$k_1re^{rt}=a_{11}k_1e^{rt}+a_{12}k_2e^{rt}+---+a_{1n}k_ne^{rt}$$

$$k_2re^{rt}=a_{21}k_1e^{rt}+a_{22}k_2e^{rt}+---+a_{2n}k_ne^{rt}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k_nre^{rt}=a_{n1}k_1e^{rt}+a_{n2}k_2e^{rt}+---+a_{nn}k_ne^{rt}$$

Denklemleri e^{rt} ile kısaltalım ve $k_1,k_2,---,k_n$'e göre düzenleyelim.

$$(a_{11}-r)k_1+a_{12}k_2+---+a_{1n}k_n=0$$

$$a_{21}k_1+(a_{22}-r)k_2+---+a_{2n}k_n=0$$

$$a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+---+(a_{nn}-r)k_n=0$$

$\Delta(r)=0$ 'a sistemin karakteristik denklemi denir.

Buradan $k_1, k_2, ---, k_n$ bulunur ve $x_1, x_2, ---, x_n$'e yerine konur.

metotta 2 bilinmeyenli → 2 yönt

Örnek
$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1-2x_2\\ \frac{dx_2}{dt}&=x_2-2x_1\end{aligned}\right\}$$ dif. denk. sistemini çözünüz.

$$\left.\begin{aligned}x_1&=k_1e^{rt}\\ x_2&=k_2e^{rt}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\to k_1r\cancel{e^{rt}}=k_1\cancel{e^{rt}}-2k_2\cancel{e^{rt}}\\ &\to k_2r\cancel{e^{rt}}=k_2\cancel{e^{rt}}-2k_1\cancel{e^{rt}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}(1-r)k_1-2k_2&=0\\ -2k_1+(1-r)k_2&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta(r)=\begin{vmatrix}1-r & -2\\ -2 & 1-r\end{vmatrix}=1-2r+r^2-4=\underbrace{r^2-2r-3=0}$$

$r_1=3$
$r_2=-1$

katlı kök [illegible]
1. yöntemi
[illegible] yet.

$r_1=3$ için
$$\left.\begin{aligned}-2k_1-2k_2&=0\\ -2k_1-2k_2&=0\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&k_1=-k_2\\ &k_1=1 \text{ için } k_2=-1\end{aligned}$$

$\boxed{x_1=e^{3t}}$ $\boxed{x_2=-e^{3t}}$

$r_2=-1$ için
$$\left.\begin{aligned}2k_1-2k_2&=0\\ -2k_1+2k_2&=0\end{aligned}\right\}k_1=k_2=1$$

$\boxed{x_1=e^{-t}}$ $\boxed{x_2=e^{-t}}$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=C_1\cdot e^{3t}+C_2\cdot e^{-t}\\ x_2&=-C_1e^{3t}+C_2e^{-t}\end{aligned}\right\}$$

Örnek: $\frac{dx}{dt}=-5x+6y+2z$

$$\frac{dy}{dt}=-4x+5y+2z$$

$$\frac{dz}{dt}=-4x+4y+3z$$

$x=k_1e^{rt}$

$y=k_2e^{rt}$

$z=k_3e^{rt}$

$(-5-r)k_1+6k_2+2k_3=0$

$-4k_1+(5-r)k_2+2k_3=0$

$-4k_1+4k_2+(3-r)k_3=0$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-5-r & 6 & 2\\ -4 & 5-r & 2\\ -4 & 4 & 3-r\end{vmatrix}=(1-r)(1+r)(r-3)$$

$r_1=1 \quad r_2=-1 \quad r_3=3$

$r_1=1$ için $\quad k_2=k_3 \;,\; k_1=2k_2$

$k_2=1, k_3=1 \;,\; k_1=2$

$x=2e^t \quad y=e^t \quad z=e^t$

$r_2=-1$ için $\quad k_3=0, k_1=k_2=1$

$x=e^{t} \quad y=e^{-t} \quad z=0$

$r_3=3$ için $\quad k_1=k_2=k_3=1$

$x=e^{3t} \quad y=e^{3t} \quad z=e^{3t}$

$x=2C_1e^t+C_2.e^{-t}+C_3e^{3t}$

$y=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}$

$z=C_1e^t+C_3e^{3t}$

operatörün özellikleri

1°) D operatörü için n dereceden bir F(D) fonksiyonu $F(D) = a^{\circ}D^{n} + a_1.D^{n-1} + \dots \; a_{n-1}.D + a_n$ şeklinde D'nin kuvvetlerine göre düzenlenmiştir.

2°) $\{F_1(D) + F_2(D)\}\, y = F_1(D)\, y + F_2(D).y$

3°) $\lambda \neq 0$ bir sabit olmak üzere $F(\lambda D).y = \lambda.F(D).y$ 'dır.

4°) $F_1(D)\left[F_2(D).y\right] = F_2(D)\left[F_1(D).y\right] = F_1(D)F_2(D).y$

5°) $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y \qquad D^0 y = y$

6°) $D^n(\lambda y) = \lambda D^n y$

7°) $F(D)e^{kx}y = e^{kx}F(D+k)y$

8°) $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n = \frac{d^n}{dx^n} \qquad D^{-n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-n} = \left(\frac{dx}{d}\right)^n$

⊛ Negatif üs integral operatörünü gösterir yani:

$$\boxed{D^{-1}y = \int y\, dx}$$

$F(D).y = f(x)$ operatörlerle ifade edilmiş denklemin özel çözümünün bulunması

1°) _f(x) üstel fonksiyon ise,_

$y'' + Ay' + By = F(D)y = k.e^{\alpha x}$ (D gördüğün yere α yaz)

$$y = \frac{k.e^{\alpha x}}{F(D)} = \frac{k.e^{\alpha x}}{D^2 + AD + B} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{k.e^{\alpha x}}{\alpha^2 + A\alpha + B}}$$

$(\alpha^2 + A\alpha + B \neq 0)$ olmalı

Örnek $y''+3y'=2.e^{5x}$ dif. denkleminin özel çözümünü bulalım

$D^2y+3Dy=2.e^{5x}$

$(D^2+3D)y=2.e^{5x}$

$$y=\frac{2.e^{5x}}{D^2+3D} \Rightarrow y_2=\frac{2.e^{5x}}{5^2+3.5}=\boxed{\frac{e^{5x}}{20}}$$

(★) Eğer $\underline{\alpha^2+A\alpha+B=0}$ oluyorsa $y=\frac{k.e^{ax}}{\alpha^2+A\alpha+B}$ ifadesi tanımlı değildir,

$\alpha^2+\alpha A+B=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)$ olsun

$\alpha-\alpha_1 \rightarrow$ tanımsız olsun diyelim; $\Rightarrow D-D_1$

$$\boxed{y=\frac{k.e^{ax}}{(D-D_1)(D-D_2)}=e^{\alpha x}\int\frac{k.dx}{\alpha-\alpha_2}}$$

Örnek $y''-7y'+10y=4.e^{2x}$ dif. denk. özel çözümünü operatörler yardımıyla bulalım,

$D^2y-7Dy+10y=4.e^{2x}$

$(D^2-7D+10)y=4.e^{2x}$ $\quad y=\frac{4.e^{2x}}{\underset{-5\;-2}{D^2-7D+10}}=\frac{4.e^{2x}}{\underbrace{2^2-7.2+10}_{0}}=$ Tanımsızdır!

$$y=\frac{4.e^{2x}}{\underset{\text{Tanımsız } \alpha=2}{(D-2)}(D-5)}=4.e^{2x}\int\frac{dx}{\underset{2}{\alpha}-5}$$

$$=4.e^{2x}\int\frac{dx}{-3}\Rightarrow\boxed{-\frac{4}{3}.e^{2x}.x=y_2}$$

② $f(x)$ fonksiyonu $\sin(ax+b)$ / $\cos(ax+b)$ gibi bir trigonometrik fonksiyon ise

$y''+Ay'+By=f(x)$ dif. denk operatörler yardımıyla

$F(D).y=f(x)$

$F(D).y=\cos(ax+b)$

$$y=\frac{\cos(ax+b)}{F(D)}$$

$$y=\frac{\cos(ax+b)}{\underbrace{D^2}_{}+AD+B}=\frac{\cos(ax+b)}{AD+\underbrace{B-a^2}_{\substack{K\\(\text{bir sayı})}}}=\frac{\cos(ax+b)}{AD+K}$$

$D^2\to -a^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (AD-K)$

$$y=\frac{(AD-K).\cos(ax+b)}{A^2\boxed{D^2}-K^2}=\frac{(AD-K).\cos(ax+b)}{\underbrace{-A^2a^2-K^2}_{\text{sayı }(K_1)}}\to(\text{parantezi açtı})$$

$D^2\to -a^2$

$$\Rightarrow y_2=\frac{A}{K_1}.-a.\sin(ax+b)-\frac{K}{K_1}.\cos(ax+b)$$

örnek $y''-3y'=\cos 3x$ dif. denk. özel çöz. bulalım.

$$(D^2-3D)y=\cos 3x$$

$$y=\frac{\cos 3x}{\underset{\substack{\downarrow\\-9}}{D^2}-3D}=\frac{\cos 3x}{\underset{(-9+3D)}{-9-3D}}=\frac{(-9+3D)(\cos 3x)}{81-9\boxed{D^2}_{\to -9}}=\frac{\overset{(3D-9)}{(-9+3D)}(\cos 3x)}{162}$$

$$\Rightarrow y_2=\frac{3(-3.\sin 3x)}{162}-\frac{9}{162}.\cos 3x=-\frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{162}_{18}}\left[\sin 3x+\cos 3x\right]$$

soru

$$y''-4y'+3y=\sin\frac{x}{2}$$

$$(D^2-4D+3)y=\sin\frac{x}{2}$$

$$y=\frac{\sin\frac{x}{2}}{(\underset{\substack{\downarrow\\-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{D^2}-4D+3)}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\underset{\left(+\frac{11}{4}+4D\right)}{-\frac{1}{4}-4D+3}}=\frac{\left(\frac{11}{4}+4D\right)\sin\frac{x}{2}}{\frac{121}{16}-16D^2_{\to-\frac{1}{4}}}\Rightarrow\overset{y_2}{\boxed{\frac{4.\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{11}{4}\sin\frac{x}{2}}{\frac{185}{16}}}}$$

③ $f(x)$ m. dereceden bir polinom ise ;

$$y''+Ay'+By=F(D).y=a_0.x^m+a_1.x^{m-1}+\dots \quad +a_m$$

olduğunda özel çözüm

$$y_2=\frac{a_0.x^m+a_1.x^{m-1}+\dots \quad +a_{m-1}\cdot x+a_m}{D^2+AD+B}$$

$$\frac{1}{D^2+AD+B}=\frac{1}{B+AD+D^2} \quad \text{yene kullanılır.}$$

Soru $y''-2y=x^2-4$ dif denk özel çözümünü operatör yardımıyla bulalım.

$$(D^2-2)=x^2-4$$

$$y=\frac{x^2-4}{D^2-2}=-\frac{1}{2-D^2}(x^2-4)=\frac{1}{2-D^2}(4-x^2)$$

$$1 \;\Big|\; 2-D^2$$

$$-1+\frac{D^2}{2} \;\Big|\; \boxed{\frac{1}{2}+\frac{D^2}{4}}$$

$$\frac{D^2}{2}$$

$$-\frac{D^2}{2}\pm\frac{D^4}{4}$$

$$\frac{D^4}{4}$$

$$y_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{D^2}{4}\right)(4-x^2)$$

$$y_2=\frac{4-x^2}{2}+\frac{1}{4}(-2)$$

$$\boxed{y_2=\frac{3-x^2}{2}}$$

Soru $y''+2y'+3y=\frac{x^3}{8}$

$$(D^2+2D+3).y=\frac{x^3}{8}$$

$$y=\frac{x^3/8}{D^2+2D+3}=\frac{1}{3+2D+D^2}\left(\frac{x^3}{8}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2D}{9}+\frac{D^2}{27}+\frac{4D^3}{81}\left(\frac{x^3}{8}\right)$$

$$=\frac{x^3}{24}-\frac{2}{\cancel{9}_3}\left(\frac{3x^2}{8}\right)+\frac{1}{27}\left(\frac{6x}{8}\right)+\frac{4}{81}\Big(\frac{6}{8}$$

$$1 \;\Big|\; 3+2D+D^2$$

$$-1\mp\frac{2D}{3}\mp\frac{D^2}{3} \;\Big|\; \frac{1}{3}-\frac{2D}{9}+\frac{D^2}{27}+\frac{4D^3}{81}$$

$$-\frac{2D}{3}-\frac{D^2}{3}$$

$$-\frac{2D}{3}\pm\frac{4D^2}{9}\mp\frac{2D^3}{9}$$

$$\frac{D^2}{9}+\frac{2D^3}{9}$$

$$\frac{D^2}{9}+\frac{2D^3}{9}$$

$$-\frac{D^2}{9}\mp\frac{2D^3}{27}\mp\frac{D^4}{27}$$

$$\frac{4D^3}{27}-\frac{D^4}{27}$$

$$\frac{4D^3}{27}+$$

$$y_2=\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{36}+\frac{1}{27}$$

④ Bi sonraki SAYFA

DEGİŞKEN KATSAYILI DİF. DENKLEMLER

$a_0(x)y^n + a_1(x).y^{n-1} + \dots \; a_{n-1}(x)y' + a_n = f(x)$ şeklindeki diferansiy denklemlere değişken katsayılı dif denk. denir. Çözüm için genel bir keral yoktur. Bazı özel dif denk. çözümü için özel kurallar uygulanır.

1) Euler (Cauchy) Dif Denk

$$a_0 \overset{\text{kuvvet}}{x^n} y^{\overset{\text{türev}}{(n)}} + a_1 x^{n-1}.y^{(n-1)} + \dots \; a_{n-1}x.y' + a_n y = f(x)$$

dif denk Euler dif denk. denir. Her terimde türev mertebesine eşit derecede x çarpanı mevcuttur.

$x=e^t$ dönüşümü uygulandığında sbt katsayılı Lineer Dif Denk. elde edilir.

$x=e^t$

$\ln x = t$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\boxed{\frac{dx}{dt}}e^t} = \boxed{e^{-t}.\frac{dy}{dt} = y'}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'}\Big) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\boxed{\frac{dx}{dt}}e^t} = e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(e^{-t}.\frac{dy}{dt}$$

$$= e^{-t}\Big(-e^{-t}.\frac{dy}{dt} + e^{-t}.\frac{d^2y}{dt^2}\Big)$$

$$\boxed{y'' = e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big)}$$

~~$(D^2-D)y.e^{-2t}$~~

$$y''' = (D^3 - 3D^2 + 2D)y.e^{-3t}$$

Soru $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2\ln x$ dif denk çözelim.

$x=e^t$

$y' = e^{-t}.\frac{dy}{dt}$

$y'' = e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big)$

$$\cancel{e^{2t}}.\cancel{e^{-2t}}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) - 3\cancel{e^t}.\cancel{e^{-t}}.\frac{dy}{dt} + 4y = e^t + e^{2t}\ln e^{t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^t + t.e^{2t}}$$ sbt katsayılı dif denk.

$$y'' - 4y' + 4y = e^t + t.e^{2t}$$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$r_1 = r_2 = 2$

$\boxed{y_1 = (c_1 t + c_2)e^{2t}}$

$y_2 = y_{21} + y_{22}$

$y_{21} = k.e^t$

$y_{21}' = k e^t$

$y_{21}'' = k.e^t$

$\hookrightarrow k.e^t - \cancel{4k e^t} + \cancel{4k e^t} = e^t$

$\boxed{k=1}$

$\boxed{y_{21} = e^t}$

$y_{22} = z(t).e^{2t}$

$y_{22}' = z'(t).e^{2t} + 2.z(t).e^{2t}$

$y_{22}'' = z''(t).e^{2t} + 2.z'(t).e^{t} + 2.z'(t).e^{2t} + 4.z(t).e^{2t}$

$$z''.e^{2t}+\cancel{4z'.e^{t}}+\cancel{4z e^{2t}}-\cancel{4z'.e^{2t}}-8\cancel{z}.e^{2t}+\cancel{4z.e^{2t}}=t.e^{2t}$$

$$z''\cancel{e^{2t}}=t.\cancel{e^{2t}}$$

$$z=at^3+bt^2+ct+d$$

$$z''=t$$

$$z'=3at^2+2bt$$

$$6at+2b=t$$

$$2b=0 \qquad 6a=1 \qquad a=1/6$$

$$\boxed{z_2=\frac{1}{6}t^3}$$

$$\boxed{y_{22}=\frac{1}{6}t^3.e^{2t}}$$

$$y=(c_1t+c_2)e^{2t}+e^t+\frac{1}{6}t^3e^{2t} \qquad t=\ln x$$

$$y=(c_1.\ln x+c_2)\underbrace{e^{2\ln x}}_{x^2}+\underbrace{e^{\ln x}}_{x}+\frac{1}{6}(\ln x)^3.\underbrace{e^{2.\ln x}}_{x^2}$$

$$\boxed{y=(c_1.\ln x+c_2)x^2+x+\frac{1}{6}(\ln x)^3.x^2}$$ Sonuç!

[redacted]

$$x^2y''+2xy'-2x=\frac{1+\ln^2x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{\ln^2x}{x}$$

$$y''=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$y'=e^{-t}.\frac{dy}{dt}$$

* LEGENDRE DİF DENKLEMİ

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^n}+\cdots a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$$

$ax+b=e^t$ dönüşümü yapılır. $a.\frac{dx}{dt}=e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=e^t.a^{-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{e^t}{a}}=a.e^{-t}.\frac{dy}{dt}=a.e^{-t}.Dy \qquad \boxed{\frac{d}{dt}=D}$$

$$y'=\boxed{\frac{dy}{dx}=a.e^{-t}.Dy}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=a^2e^{-2t}D(D-1)y$$

$y^n=a^ne^{-nt}.D(D-1)\cdots(D-(n-1))y$. Bulunan ifadeler yerine yazılırsa $F(D)y=f\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$ şeklinde sbt katsayılı ve 2 taraflı bir dif denkleme ulaşılmış olur. bu dif denk. çözümü

$y=\varphi(\ln(ax+b),c_1,c_2,\dots c_n)$ dif denk. genel çözümüdür.

Özel $y=(c_1t+c_2)e^{2t}+e^{t}+\frac{1}{6}+3.e^{2t}$

Bu daha önceki sayfa

(c) $f(x)$ aynı cinsten fonksiyonların toplamı ise özel çözüm her bir fonk. için ayrı ayrı hesaplanır ve bunların toplamı özel çöz. verir

(d) Çarpanlardan biri üstel, diğer bir fonksiyon ise

p031

$$y''+Ay'+By=\varphi(x).e^{kx}$$

$$(D^2+AD+D)y=\varphi(x).e^{kx}$$

$$y=\frac{\varphi(x).e^{kx}}{(\underset{\downarrow}{D}^2+AD+D)}=\frac{e^{kx}.\varphi(x)}{(D+k)^2+A(D+k)+B}\Rightarrow y_2=\frac{e^{kx}.\varphi(x)}{F(D+k)}$$ direk hesaplanır.

$D\rightarrow(D+k)$

Bundan sonraki işlem $\varphi(x)$'e göre devam ettirilir.

Örnek $y''-y'+2y=x^2.e^{3x}$ özel çöz operatör yönt. bul.

$$(D^2-D+2)y=x^2.e^{3x}$$

$$y=\frac{x^2.e^{3x}}{(D^2-D+2)}=\frac{x^2.e^{3x}}{[(D+3)^2-(D+3)+2]}=\frac{x^2.e^{3x}}{(D^2+5D+8)}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 8+5D+D^2 \\ -\frac{1}{8}-\frac{5}{8}D-\frac{D^2}{8} & \boxed{\frac{1}{8}-\frac{5D}{64}+\frac{17D^2}{512}} \\ \hline -\frac{5D}{8}-\frac{D^2}{8} & \\ \pm\frac{5}{8}D\pm\frac{25D^2}{64}\pm\frac{5D^3}{64} & \\ \hline \frac{17D^2}{64}-\frac{5D^2}{64} & \end{array}$$

$$y_2=\frac{x^2.e^{3x}}{D^2+5D+8}=e^{3x}.\left(\frac{1}{8}-\frac{5D}{64}+\frac{17D^2}{512}\right)(x^2)$$

$$y_2=e^{3x}\left[\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{64}(2x)+\frac{17}{512}(2)\right]$$

Örnek

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{x}.\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0\ \Big/\ \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}=\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{dy}{dx}\right)-\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0\right)dx$$

$$=\int d\left(\ln\frac{dy}{dx}\right)-\int\frac{3}{x}dx-\int\frac{1}{2}dy=0$$

$$\boxed{\ln\frac{dy}{dx}-3\ln x-\frac{1}{2}y=c_1}$$

$$\ln\frac{dy}{dx}=c_1+3\ln x+\frac{1}{2}y$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{c_1+3\ln x+\frac{1}{2}y}$$

$$\frac{dy}{e^{\frac{1}{2}y}}=e^{c_1}.\overset{x^3}{e^{3\ln x}}dx$$

$$\boxed{-2.e^{-1/2y}=e^{c_1}.\frac{x^4}{4}+c_2}$$

Liouville

$$(1+2x)^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2(1+2x) \cdot \frac{dy}{dx} - 12y = 3x+1$$

10

$1+2x = e^t$ $\qquad$ $y' = a \cdot e^{-t} Dy$

$x = \frac{e^t - 1}{2}$ $\qquad$ $y' = 2 \cdot e^{-t} Dy$

$3x+1 = \frac{3 \cdot e^t - 3}{2} + 1$ $\qquad$ $y'' = a^2 \cdot e^{-2t} D(D-1)y = 4 \cdot e^{-2t} D(D-1)y$

$$\boxed{= \frac{3 \cdot e^t - 1}{2}}$$

$$\cancel{(e^t)^2} \cdot 4 \cdot \cancel{e^{-2t}} D(D-1)y - 2\cancel{(e^t)} \cdot 2 \cdot \cancel{e^{-t}} Dy - 12y = 3 \cdot \frac{e^t - 1}{2}$$

$$4[D^2 - D - D - 3]y = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}$$

$$(D^2 - 2D - 3)y = \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{8}$$

$-3 \quad 1$

$D_1 = 3$

$D_2 = -1$

$$y_1 = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

$$y = \frac{\frac{3}{8}e^{t}}{(D-3)(D+1)} + \frac{\frac{1}{8}}{-D^2+2D+3}$$

$$y = -\frac{3}{24}e^t + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{2}{8}D}\right)$$

$$y_2 = -\frac{3 \cdot e^t}{24} + \frac{1}{24}$$

$$1 \;\Big|\; \frac{3+2D-D^2}{\frac{1}{3} - \frac{2}{8}D}$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{3}{32}e^t + \frac{1}{24}$$

$$\boxed{y = c_1 (1+2x)^{-1} + c_2(1+2x)^3 - \frac{3}{32}(1+2x) + \frac{1}{24}}$$

Diferansiyel Denklem Sistemleri

Bağımsız değişken ile bu değişkenin n tane bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonların türevleri arasındaki n denklemden meydana gelen sisteme n bilinmeyenli diferansiyel denklem sistemi denir.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} - 2y - 3z = e^{2z} \quad \checkmark \\ &\frac{d^2z}{dx^2} + 2z + y = 0 \quad \checkmark \end{aligned}\right\}$$

$z = f(x)$

$y = g(x)$

✓ Bir diferansiyel denklem sisteminde bilinmeyen fonksiyon sayısı denklem sayısına eşit ve her denklem bilinmeyen fonksiyonlardan birinin en yüksek mertebeli türevine göre çözülmüşse böyle bir sisteme KANONİK sistem denir. Kanonik sistemde yalnız I. mertebeden türevler bulunuyorsa bu sisteme NORMAL sistem adı verilir. Normal sistemin çözümü sistemdeki bilinmeyen fonksiyonların çözümüdür.

193

Örnek

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -5y - z + 1 \\ \frac{dz}{dx} &= y - 3z + e^{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

2 bilinmeyenli Lineer Normal Sistem

✓ Eğer sistemde bağımsız değişkenli ifadeler yoksa böyle sisteme Homojen sistem denir.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -5y - z \\ \frac{dz}{dx} &= y - 3z \end{aligned}\right\}$$

2 bilinmeyenli Lineer Homojen sistem

Normal Diferansiyel Denklem Sistemi Çözümü =

1. yöntem

(Türetme ve Yoketme Metodu)

Bu yöntemde sistemin denklemlerini türetmek (türev almak) ve fonksiyonlardan biri hariç diğer bütün fonksiyonları yok etmek suretiyle bilinmeyen bir tek fonksiyonun diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem ile sistemin çözümü bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -5y - z + 1 + x^2 \\ &\boxed{\frac{dz}{dx} = y - 3z + e^{2x}} \end{aligned}\right\}$$

dif denklem sistemini çözelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + 2x$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 3\frac{dz}{dx} + 2e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - y + 3z - e^{2x} + 2x$$

z'yi, 1. dif denk. çekip yerine yazıyoruz !

$z = -5y + 1 + x^2 - y'$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - y + 3\left(-5y + 1 + x^2 - \frac{dy}{dx}\right) - e^{2x} + 2x$$

$$y'' = -8y' - 16y + 3x^2 + 2x - e^{2x} + 3$$

✓ $$y'' + 8y' + 16y = 3x^2 + 2x + 3 - e^{2x}$$

$r^2 + 8r + \overset{-4\,-4}{16} = 0$

$\underline{r_1 = r_2 = 4}$

$\boxed{y_1 = (c_1x + c_2)e^{-4x}}$

$y_{21} = ax^2 + bx + c$

$y_{21}' = 2ax + b$

$y_{21}'' = 2a$

$2a + \boxed{16a}x + 8b + 16ax^2 + \boxed{16b}x + 16c = 3x^2 + 2x + 3$

$16a = 3$

$a = \frac{3}{16}$

$16(\overset{\frac{3}{16}}{a} + b) = 2$

$\boxed{b = -\frac{1}{16}}$ $c = \frac{25}{128}$

$\boxed{y_{21} = \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{25}{128}}$

$y_{22} = k.e^{+2x}$

$y_2' = 2ke^{2x}$

$y_2'' = 4ke^{2x}$

$4k\cancel{e^{2x}} + 16k\cancel{e^{2x}} + 16k\cancel{e^{2x}} = -\cancel{e^{2x}}$

$36k = -1$

$k = -1/36$

$\boxed{y_{22} = -\frac{1}{36}e^{2x}}$

$$\boxed{y = y_1 + y_{21} + y_{22} = (c_1x + c_2)e^{-4x} + \frac{3x^2}{16} - \frac{1}{16}x + \frac{25}{128} - \frac{1}{36}e^{2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1.e^{-4x} - 4(c_1x + c_2)e^{-4x} + \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} - \frac{1}{18}e^{2x}$$

→ Bunu z'de yerine yaz ve z'yi bulunuz

Başka yol

$z'' = -5y' - z + 1 + x^2 - 3z' + 2.e^{2x}$ $y = z' + 3z - e^{2x}$

$z'' = \underline{-5z'} - 15z + 5e^{2x} - z + 1 + x^2 \underline{- 3z'} + 2e^{2x}$

$z'' + 8z' + 16z = x^2 + 1 + 7e^{2x}$

$r^2 + 8r + 16 = 0$

$r_{1,2} = -4$

$\boxed{z_1 = (c_1x + c_2)e^{-4x}}$

$z_{21} = ax^2 + bx + c$

$z_{21}' = 2ax + b$

$z_{21}'' = 2a$

$a = \frac{1}{16}$

$b = -\frac{1}{16}$

$c = 11/128$

$z_{21} = 2a + 16ax + 8b + 16ax^2 + 16bx + 16c$ ---

$\boxed{z_{21} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{11}{128}}$

$z_{22} = k.e^{2x}$

$k = \frac{7}{36}$

$\boxed{z_{22} = \frac{7}{36}.e^{2x}}$

İkinci Yöntem

Bu yönteme göre diferansiyel denklem sisteminin çözümü homojen sistemin genel çözümü ile, homojen olmayan sistemin özel çözümünün toplamına eşittir.

Örnek
$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x-5y+t.e^{t}\\ \frac{dy}{dt} &= x+7y+\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}$$ dif. denk çözünüz.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x-5y\\ \frac{dy}{dt} &= x+7y\end{aligned}\right\}$$

Homojen Denklem

Bu denklemin çözümü $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2.e^{rt}$ olsun;

Bu çözümler homojen sistemin çözümleridir.

Şimdi bunları denklem sisteminde yerine yazalım

$$\frac{dx}{dt} = k_1.r.e^{rt} \qquad \frac{dy}{dt} = k_2.r.e^{rt}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1.r.\cancel{e^{rt}} &= k_1.\cancel{e^{rt}} - 5k_2.\cancel{e^{rt}}\\ k_2.r.\cancel{e^{rt}} &= k_1.\cancel{e^{rt}} + 7k_2.\cancel{e^{rt}}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}(1-r)k_1 - 5k_2 &= 0\\ k_1 + (7-r)k_2 &= 0\end{aligned}$$

Katsayılar Matrisinin "0" olması gerekli bu denklem sisteminin bir çözümü olması için!

$$\Leftarrow \Delta r = \begin{vmatrix}(1-r) & -5\\ 1 & (7-r)\end{vmatrix} = (7-r)(1-r)+5$$

$$= 7-8r+r^2+5$$

$$= \boxed{r^2-8r+12=0}$$

$$r^2-8r+12=0$$
$$-6 \quad -2$$

$r_1=2$
$r_2=6$

$\underline{r_1=2 \text{ için}}$

$$-k_1-5k_2=0$$
$$k_1+5k_2=0$$
$$k_1=-5k_2$$
$$k_1=1 \Rightarrow k_2=-\frac{1}{5}$$

$\underline{r=6 \text{ için}}$

$$-5k_1-5k_2=0$$
$$k_1+k_2=0$$
$$k_1=-k_2$$
$$k_1=1 \Rightarrow k_2=-1$$

$\underline{r=2 \text{ için}}$

$$\boxed{\begin{aligned}x &= 1.e^{2t}\\ y &= -\frac{1}{5}e^{2t}\end{aligned}}$$

$\underline{r=6 \text{ için}}$

$$\boxed{\begin{aligned}x &= 1e^{6t}\\ y &= -1.e^{6t}\end{aligned}}$$

(*) $$\left.\begin{aligned}x &= c_1.e^{2t}+c_2.e^{6t}\\ y &= \frac{c_1}{5}.e^{2t}-c_2.e^{6t}\end{aligned}\right\}$$ Homojen sistemin genel çözümü ifadeleri

✓ Bunlar homojen sistemin genel çözümleridir. Bu ifadeleri diferansiyel denklemde yerine yazıp özel çözümleri bulmaya başlayalım.

$x = c_1 . e^{2t} + c_2 e^{6t}$ (Türev alırken c_1 ve c_2'ler fonk. kabul edilir; $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$)

$y = \frac{c_1}{5} e^{2t} - c_2 . e^{6t}$

$\frac{dx}{dt} = c_1' . e^{2t} + . c_2' . e^{6t} + 2 . c_1 e^{2t} + 6 c_2 . e^{6t}$ } Bunu ilk ifadede yerine yaz!

$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{5} c_1' e^{2t} - c_2' e^{6t} - \frac{2}{5} c_1 e^{2t} - 6 c_2 e^{6t}$

$c_1' . e^{2t} + c_2' e^{6t} + \cancel{2 c_1 e^{2t}} + \cancel{6 c_2 e^{6t}} = c_1 \cancel{e^{2t}} + c_2 \cancel{e^{6t}} + \cancel{c_1} e^{2t} + \cancel{5 c_2 e^{6t}} + t e^t$

(*) $c_1' e^{2t} + \cancel{c_2' e^{6t}} = t e^t$

$5 / -\frac{1}{5} c_1' e^{2t} - \cancel{c_2' e^{6t}} = 1/2$

$\frac{4}{5} e^{2t} . c_1' = t e^t + \frac{1}{2}$

~~dt~~ $\frac{dc_1}{\cancel{dt}} = c_1' = \frac{5}{4} e^{-2t} \left(t e^t + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4} t e^{-t} + \frac{5}{8} e^{-2t} \, dt$

$c_1 = \frac{5}{4} \int t e^{-t} dt + \frac{5}{8} \int e^{-2t} dt$

$$\boxed{c_1 = \frac{5}{4} \left(-t . e^{-t} - e^{-t} \right) [illegible] \frac{5}{16} e^{-2t}}$$

$-4 e^{6t} . c_2' = t e^t + 5/2$

$\frac{dc_2}{dt} = c_2' = \frac{e^{-6t}}{-4} \left(t e^t + \frac{5}{2} \right) = -\frac{1}{4} t . e^{-5t} - \frac{5}{8} . e^{-6t}$

$c_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{5} e^{-5t} + \frac{1}{25} . e^{-5t} \right) + \frac{5}{48} e^{-6t}$

Yerine yazarız!

(*) $x_0 = c_1 . e^{2t} + c_2 e^{6t}$

$= \left[\frac{5}{4} \left(-t . e^{-t} - e^{-t} \right) - \frac{5}{16} e^{-2t} \right] . e^{2t} + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t}{5} e^{-5t} + \frac{1}{25} e^{-5t} \right) + \frac{5}{48} . e^{-6t} \right] . e^{6t}$

(*) $y_0 = \left[\frac{5}{4} \left(-t e^{-t} - e^{-t} \right) - \frac{5}{16} e^{-2t} \right] \frac{1}{5} e^{2t} [illegible] \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t}{5} e^{-5t} + \frac{1}{25} . e^{-5t} \right) + \frac{5}{48} e^{-6t} \right] e^{6t}$

$x = c_1e^{2t}+c_2e^{6t}+x_0$

$y = -\frac{1}{5}c_1.e^{2t}-c_2e^{6t}+y_0$

3. yöntem

Bu yöntemde diferansiyel denklem türev operatörüne göre ifade edilir ve cebirsel denklemlerin çözümündeki yöntemle çözülür. Denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı ($\Delta\neq0$) halini inceleyeceğiz. $\Delta=0$ halinde de sistemin denklemi denklemleri birbirine bağlı olur. Sistemin genel çözümünde katsayılar determinantının açılımında bulunan D (türev) en yüksek derecesine eşit sayıda keyfi sbt bulunur.

$$\left.\begin{aligned} Dy-(D+1)z &= -e^{t} \\ y+(D-1)z &= e^{2t} \end{aligned}\right\}$$ dif denk sistemini çözelim,

$$\Delta=\begin{vmatrix} D & -D-1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix} = D^2-\cancel{D}+\cancel{D}+1$$

$$\underline{\Delta = D^{2}+1} \longrightarrow$$ Diferansiyel denklemin çözümünde 2 tane keyfi sabit vardır.

Cramer Yöntemiyle sistemin çözümü:

y için

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -e^{t} & -D-1 \\ e^{2t} & D-1 \end{vmatrix} = (D-1).e^{t}+(D+1)e^{2t} = -(e^{t}-e^{t})+(2e^{2t}+e^{2t})$$

$$\Delta_1 = \cancel{-e^{t}}\cancel{+e^{t}}+2e^{2t}+e^{2t}$$

$$\boxed{\Delta_1 = 3e^{2t}}$$

$$y_2=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{3e^{2t}}{\underset{D\to2}{D^2+1}}=\boxed{\frac{3e^{2t}}{5}}$$

$D^2+1=0$

$D^2=i^2$

$D_{1,2}=\mp i$

$$\boxed{\overset{y_1}{y=c_1.\sin x+c_2\cos x}+\frac{3}{5}e^{2t}}$$

z için

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} D & -e^{t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix} = D.e^{2t}+e^{t}=2e^{2t}+et$$

$$z=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2e^{2t}}{D^2+1}+\frac{e^{t}}{D^2+1} \Rightarrow \boxed{z=c_3.\sin x+c_4\cos x+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}}$$

c_3 ve c_4 yok edilmeli cünkü 4 tane keyfi degisken cıktı, 2 tan olması gerek o zaman c_3 ve c_4'ü yok edicez.

$y + (D-1)z = e^{2t}$

$C_1\sin x + C_2\cos x + \cancel{\frac{3}{5}e^{2t}} + \cancel{C_3\cos x} - \cancel{C_4\sin x} + \cancel{\frac{4}{5}e^{2t}} + \cancel{\frac{1}{2}t} - \cancel{C_3\sin x} - \cancel{C_4\cos x} - \cancel{\frac{2}{5}}$

$-\cancel{\frac{1}{2}}e^{t} = e^{2t}$

$$(\overbrace{C_1 - C_4 - C_3}^{0})\sin x + (\overbrace{C_2 + C_3 - C_4}^{0})\cos x = 0$$

$C_3 + C_4 = C_1$

$C_3 - C_4 = -C_2$

$C_3 = \frac{C_1 - C_2}{2}$

$C_4 = \frac{C_1 + C_2}{2}$

SORU 1

$(D^2-2)x - 3y = e^{2t}$

$(D^2+2)y + x = 0$

çözün

çözüm:

$x = \frac{1}{4}(3e^{t} + 7e^{-t}) - \frac{1}{10}(18\cos t - 2\sin$

$+ \frac{2}{5}e^{2t}$

$y = -\frac{1}{12}(3e^{t} + 7e^{-t}) + \frac{1}{10}(18\cos t - 2\sin$

$-\frac{1}{15}e^{2t}$

SORU

$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^{t}$

$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0$

cevap:

$x = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{e^{t}}{2}$

$y = (C_1 - 3C_2)\sin t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^{t}$

SORU 3

$(D+1)x + Dy = 2t + 1$

$(2D+1)x + 2Dy = t$

$x = -t - 2/3$

$y = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}t + C_1$

SORU 4

$(D-3)y + 2(D+2)z = 2\sin x$

$2(D+1)y + (D-1)z = \cos x$

cevap

$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-1/3x} + \frac{1}{65}(8\sin x + \cos x)$

$z = -\frac{4}{3}C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x/3} + \frac{1}{130}(61\sin x - 33\cos x)$

SORU 5

$(D-1)x + (D+2)y = 1 + e^{t}$

$(D+2)y + (D+1)z = 2 + e^{t}$

$(D-1)x + (D+1)z = 3 + e^{t}$

cevap

$x = -1 + \frac{te^{t}}{2} + C_2 e^{t}$

$y = \frac{t^6}{6} + C_1 e^{-2t}$

$z = 2 + t^4 + C_3 e^{-t}$