(8)

$$\int_{C_a} f(z)\,dz = \int_0^1 f(t+a)\,dt = \int_0^1 [f(t+a)-f(a)]\,dt + \int_0^1 f(a)\,dt$$

$$= \int_0^1 [f(t+a)-f(a)]\,dt + f(a)$$

Süreklilikten; $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ var öyle ki $|z-a|<\delta$ iken $|f(z)-f(a)|<\varepsilon$ olur. Özel olarak $z\in C_a$ ise $\forall \varepsilon>0$ için $\exists \delta>0$ var $\ni$ $|t|<\delta$ iken $|f(t+a)-f(a)|<\varepsilon$ dur.

$J = \int_0^1 [f(t+a)-f(t)]\,dt$ şeklinde işaretleyelim.

$$J = \int_0^\delta [f(t+a)-f(t)]\,dt + \int_\delta^1 [f(t+a)-f(t)]\,dt$$

$$\Rightarrow |J| \leq \int_0^\delta |f(t+a)-f(a)|\,dt + \int_\delta^1 |f(t+a)-f(a)|\,dt$$

$$< \delta.\varepsilon + \int_\delta^1 [|f(t+a)| + |f(a)|]\,dt$$

$$\leq \delta.\varepsilon + 2m(1-\delta).$$

Şimdi δ sayısını öyle seçelim ki; $|J|<\varepsilon$ olsun.

$\delta\varepsilon + 2m - 2m\delta \leq \varepsilon \Rightarrow (\varepsilon-2m)\delta \leq \varepsilon-2m \Rightarrow \delta=1.$

Böylece

$$\left|\int_{C_a} f(z)dz - f(a)\right| = |J| < \varepsilon$$

$a\to\infty$ için $\lim_{a\to\infty} \left|\int_C f(z)dz - f(\infty)\right| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty} \int_C f(z)dz = f(\infty)$$ bulunur.

SORU! (SS) a) γ, i ve $1+2i$ noktalarını birleştiren doğru parçası ise $\int_\gamma \frac{z}{z+1}\,dz$ integralini hesaplayınız

Çözüm: $z = i + (1+2i-i)t, \quad 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow z = i + (1+i)t \quad , \quad 0 \le t \le 1$

$dz = (1+i)\,dt.$

$$\int_\gamma \frac{z}{z+1}\,dz = \int_0^1 \frac{i+(1+i)t}{1+i+(1+i)t}(1+i)\,dt = \int_0^1 \frac{i+(1+i)t}{1+t}\,dt$$

$$= i\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (1+i)\int_0^1 \frac{1+t-1}{1+t}\,dt$$

$$= i\ln(1+t)\Big|_0^1 + (1+i)\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= i\ln 2 + (1+i)\left[t - \ln(1+t)\Big|_0^1\right]$$

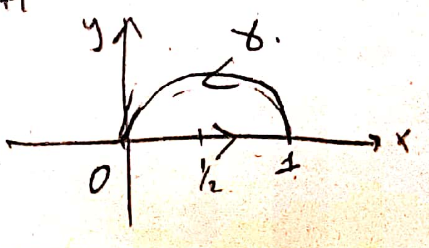
$$= i\ln 2 + 1 + i - (1+i)\ln 2$$

$$= \underline{\underline{1+i-\ln 2}}$$

b). $\gamma = \left\{ z : \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \; , \; \operatorname{Im} z \ge 0 \right\}$ olsun.

$\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:



$\tilde{\gamma} = \overbrace{\left\{ z : \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \right\} \cup [0,1]}^{C}$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = -\int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} = -\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\arctan x\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

Soru: γ, 3 ve $3-2i$ noktalarını birleştiren doğru parçası ise $\int_\gamma \bar{z}^2 dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\gamma: \; z = 3 + (3-2i-3)t, \quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow dz = -2i\,dt$

$z = 3 - 2it, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_\gamma \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (3+2it)^2 (-2i)dt = \frac{(-2i)}{2i} \left. \frac{(3+2it)^3}{3} \right|_0^1$$

$$= 12 - \frac{46i}{3}$$

SORU: C eğrisi birim çember olduğunda

$$\int_C \frac{e^z}{z}\,dz$$

integralini gözönüne alarak $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = \pi$

olduğunu gösteriniz

Çözüm: $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z}\,dz \overset{\text{c.i.f.}}{=} 2\pi i.\,e^0 = 2\pi i$ dir.

$z = e^{i\theta}$ dön. yap.

$$2\pi i = \int_C \frac{e^z}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(e^{i\theta})}{\cancel{e^{i\theta}}}\,.\,i\,\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{(\cos\theta + i\sin\theta)}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}.\cos(\sin\theta)\,d\theta + \underset{(-1)}{\underset{\|}{i^2}}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,d\theta$$

iki komp. sayının eşit den

$$2\pi i = i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}.\cos(\sin\theta)\,d\theta \Rightarrow 2\pi = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow 2\pi = \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta$$

$u = -\theta + 2\pi$

$du = -d\theta$

$\theta = \pi \Rightarrow u = \pi$

$\theta = 2\pi \Rightarrow u = 0$

$$= \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi} e^{\cos(2\pi-u)}.\cos(\sin(2\pi-u))\,du$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi} e^{\cos u}.\cos(\sin(-u))\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta \Rightarrow \boxed{\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = \pi}$$

⑦ $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ $\quad (|a|<r<|b|, \; n=1,2,\dots)$

Çözüm: $|a|<r<|b|$ olduğundan singülerite $z=a$ noktada $f(z)=\frac{1}{z-b}$ fonksiyonu $z=b$ noktası çemberin dışındadır. $f(z)=\frac{1}{z-b}$ $z=a$ noktasını $|z|=r$ çemberi içinde ve üzerinde analitik ve $z=a$ noktası çemberi içinde olduğundan C.İ.T.F. gereği

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a)$$

dır.

$$f(z)=\frac{1}{z-b} \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{(z-b)^2}$$

$$f''(z)=\frac{2}{(z-b)^3}, \dots \quad f^{(n-1)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(z-b)^n}$$

Buradan;

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz = \frac{2\pi i}{\cancel{(n-1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)!}\,(-1)^{n-1}}{(a-b)^n}$$

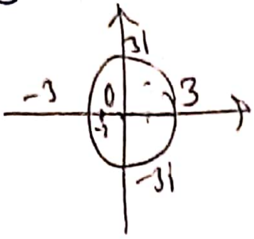
$$= -2\pi i \frac{(-1)^n}{(a-b)^n}$$

$$= -2\pi i \cdot (b-a)^{-n}$$

bulunur.

SORU: $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z+2)^{10}}\,dz = ?$

Çözüm:



$f(z)=e^{3z}$ fonksiyonu $|z|=3$ çemberi içinde ve üzerinde analitiktir. $n+1=10 \Rightarrow n=9$. Böylece C.İ.T.F. den.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z+2)^{10}}\,dz = \frac{2\pi i}{9!}\cdot f^{(9)}(-2)$$

$$= \frac{2\pi i}{9!}\cdot 3^9 e^{-6}$$

$f(z)=e^{3z} \Rightarrow f'(z)=3e^{3z}$, $f''(z)=3^2e^{3z}, \ldots, f^{(9)}(z)=3^9e^{3z}$,

Soru: Aşağıda verilen fonksiyonların ilkel fonksiyonlarını bulunuz.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad |z-a| \leq R$

$0 < R < \left(\lim \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$

① e^{az}, a sabit

$e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!}$

$\int_a^z e^{a\tau} d\tau$ $\quad \frac{1}{a} e^{az}$

Çözüm:

$$F(z) = \int_0^z e^{a\tau} d\tau = \frac{1}{a} \cdot e^{a\tau}\Big|_0^z = \frac{1}{a}(e^{az} - 1)$$

$F(z) = \frac{1}{a} e^{az}$

$F'(z) = e^{az}$

$$\Rightarrow \boxed{F(z) = \frac{1}{a} e^{az} + C}$$

---

② $chaz$, a sabit

Çözüm:

$$F(z) = \int_0^z ch(a\tau) d\tau = \frac{sh(a\tau)}{a}\Big|_0^z = \frac{1}{a} shaz - 0$$

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{a} shaz + C}$$

---

③ $shaz$ ④ $cosaz$ ⑤ $sinaz$

---

⑥ $e^{az} . cosbz$

Çözüm:

$$F(z) = \int_0^z e^{a\tau} . cosb\tau d\tau$$

$cosbz = u$

$-bsinbzdz = du$

$\frac{1}{a} e^{az} = dv$

$$= \frac{1}{a} cosbz\, e^{az}\Big|_0^z + \frac{b}{a}\int_0^z e^{a\tau} sinb\tau d\tau$$

$$= \frac{1}{a} cosbz\, e^{az} - \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\left[\frac{sinbz}{a} e^{az}\Big|_0^z\right.$$

$$= \frac{1}{a} cosbz\, e^{az} - \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} sinbz\, e^{az} - 0$$

$$\left. - \frac{b}{a}\int_0^z cosb\tau\, e^{a\tau} d\tau\right] = \frac{1}{a} cosbz\, e^{az} - \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} sinbz\, e^{az}$$

$$- \frac{b^2}{a^2} . F(z)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right) F(z) = \frac{1}{a} cosbz\, e^{az} + \frac{b}{a^2} sinbz\, e^{az} - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{a}{a^2+b^2} cosbz\, e^{az} + \frac{b}{a^2+b^2} sinbz\, e^{az} + C$$

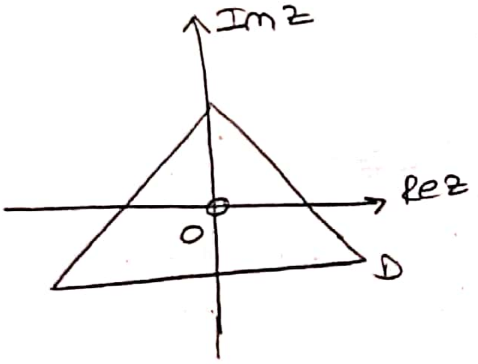
⑦ $z e^{az}$ ⑧ $z^2 \operatorname{ch} az$ ⑨ $z \cos az$

Soru: Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı bölgede bir ilkel fonksiyona sahip olmadığını gösteriniz.

a) $\frac{1}{z}$, $(0<z<\infty)$

Çözüm:

«Bir D bölgesinde verilen f(z) fonk.nun bu bölgede ilkel fonksiyona sahip olması için gerek ve yeter koşul bölgeye ait olan her çokgen boyunca integralin sıfıra eşit olmasıdır»

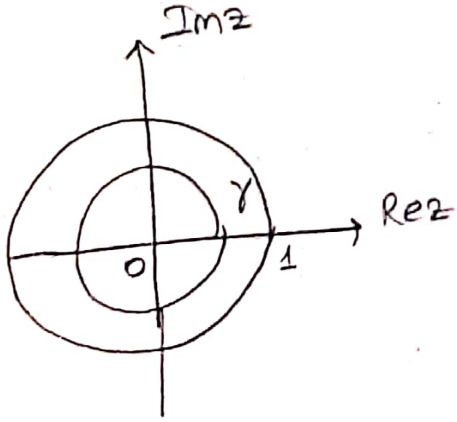


$$\int_D \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0.$$

verilen bölgede int. altındaki fonk. süreklidir.

b) $\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$ $(0<|z|<1)$

Çözüm:



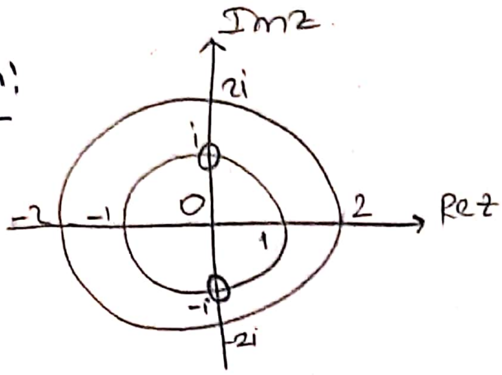
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz = 0$$

Buradan $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) dz = 2\pi i \neq 0$

c) $\dfrac{z}{1+z^2}$ $(1<|z|<\infty)$

Çözüm:



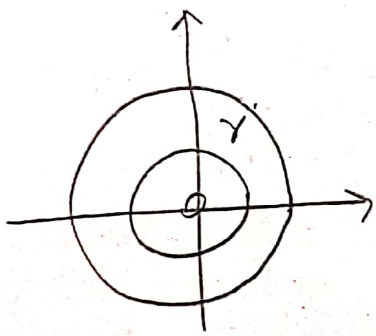
$$\int_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \left(\frac{z}{z+i}\Big|_{z=i} + \frac{z}{z-i}\Big|_{z=-i} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i \neq 0$$

olduğundan verilen bölgede fonk.nun ilkel fonk.nu yoktur.

d) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$, $0<|z|<1$

Çözüm:



$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(1-z^2)}\,dz = 2\pi i \neq 0.$$

old.dan ilkel fonk. yok

<u>SORU:</u> γ köşeleri $0, 1, 1+i$ ve i olan karenin sınırı olmak üzere.

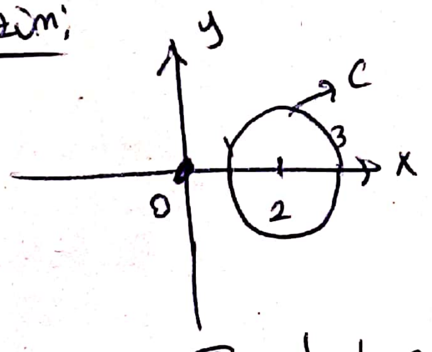
$$\int_\gamma e^z \cos\left(1+\frac{2}{z-2}\right) dz$$

integralini hesaplayınız.

<u>Çözüm!</u> $\cos z$ fonk nu her yerde analitik, $\cos(f(z))$ $f(z)$ nin analitik olduğu her yerde analitik $\cos\left(1+\frac{2}{z-2}\right)$ $z=2$ nok. hariç her yerde. analitiktir. $z=2$ noktası verilen eğrinin sınırladığı noktaların dışında olduğundan $f(z)=e^z\cos\left(1+\frac{2}{z-2}\right)$ fonk. nu eğrinin sınırladığı bölgede ve üzerinde analitiktir. Dolayısıyla Cauchy teo ne göre integral sıfıra eşittir.

<u>SORU!</u> $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z} dz = ?$ C; $z(t) = 2 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

<u>Çözüm;</u>



$f(z)=\frac{e^z}{z}$ fonk nu C çemberinin içinde ve üzerinde analitik ($z=0 \notin C$) O halde

Cauchy Teo'den.

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz = 0 \text{ dır.}$$

SORU! Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

SORU! Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

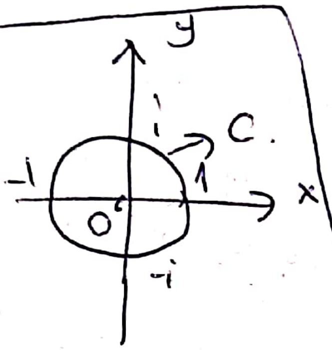
a) $\int_C \sin z\, dz$ b) $\int_C \frac{\sin z}{z}\, dz$ $\cancel{\int \frac{\sin z}{z^2}\, dz}$

$\cancel{d)}$. $\int_C \frac{\sin(e^z)}{z^2}\, dz$. c) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2z+2} = ?$ (0)

Burada C birim çemberdir.

d) $\int_{|z-1|=1} (z^3-1)\, dz = ?$ (0)

Çözüm:



a) $f(z)=\sin z$ fonksiyonu C çemberi içinde ve üzerinde analitik olduğundan Cauchy Teo. gereği

$$\int_C \sin z\, dz = 0$$

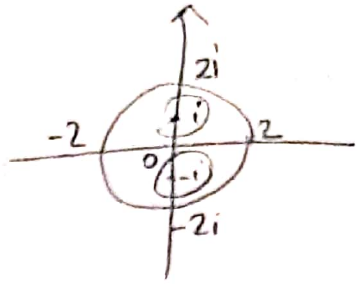
dır.

b) $f(z)=\sin z$ fonksiyonu C çemberi içinde ve üzerinde ana ve $z=0$ noktası C çemb. içinde
O halde C.İ.F gereği

$$\int_C \frac{\sin z}{z}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \sin 0 = 0.$$

SORU! Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

① $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = ?$



Çözüm! $\displaystyle \frac{1}{z^2+1} = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = -\frac{1}{2i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} + \frac{1}{2i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-i}$$

$$\overset{\text{c.i.f}}{=} -\frac{2\pi i}{2i}\cdot 1 + \frac{2\pi i}{2i}\cdot 1.$$

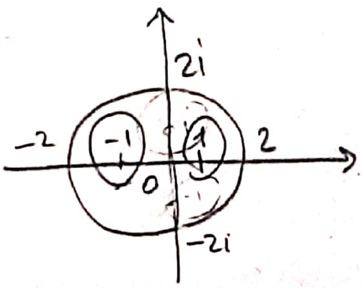
$$= 0$$

---

② $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = ?$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

Çözüm!



f(z) fonk nu. |z|=2 çem. içinde ve üz ana ve 1 ve -1 noka bu çemberin içinde

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot e^1 - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot e^{-1}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right)$$

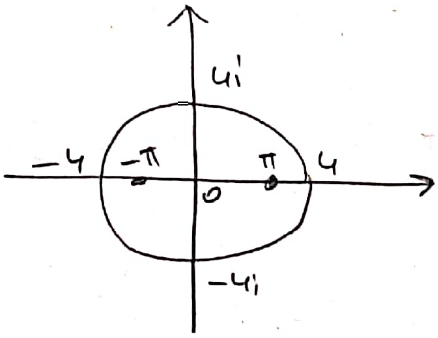
$$= \underline{\underline{2\pi i\cdot \operatorname{sh}1}}.$$

$\ldots (z-i)^3$

③ $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz = ?$

$z^2-\pi^2=0 \Rightarrow (z-\pi)(z+\pi)=0$

Çözüm:



$f(z)=\cos z$ fonk nu $|z|=4$ çemberi içinde ve üzerinde ana ve $z=\pi$ ve $z=-\pi$ nok. bu çember içinde olduğundan

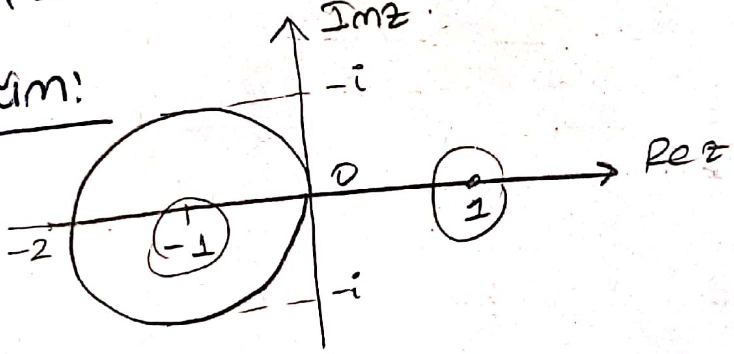
$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz = \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=4}\frac{\cos z}{z-\pi}\,dz - \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=4}\frac{\cos z}{z+\pi}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2\pi}\cdot\cos\pi - \frac{2\pi i}{2\pi}\cos(-\pi) = 0$$

---

④ $\displaystyle\oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3} = ?$

Çözüm:



$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}$ fonk nu $|z+1|=1$ çemberi içinde ve üzerinde analitik. $z=-1$ nok. çember içinde. old.

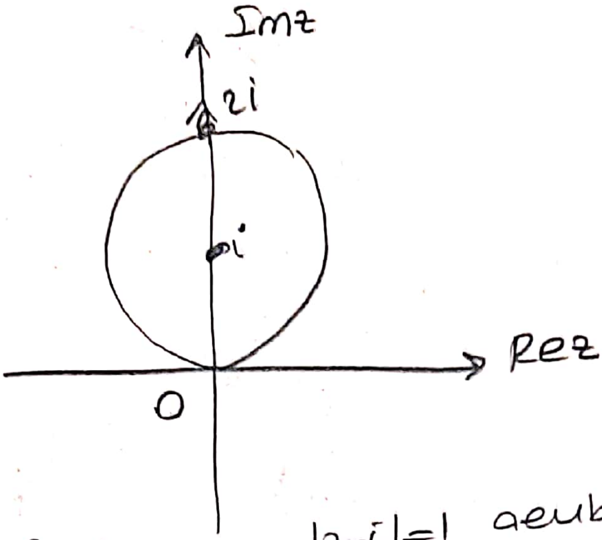
$$\oint_{|z+1|=1}\frac{f(z)}{1+z}\,dz \overset{CIF}{=} 2\pi i\cdot f(-1) = 2\pi i\,\frac{1}{(-1-1)^3} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{4}$$

(7)

(5) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz = ?$

Çözüm:



$f(z)=\cos z$ fonk in u. $|z-i|=1$ çemberi içinde ve üzerinde analitik $z=i$ nok(tası) çemberin içinde

o halde C.T.F'den

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot f^{(2)}(i) = -\pi i \cdot \cos i$$
$$= +\pi i \operatorname{ch} 1$$

$f'(z) = -\sin z$, $f^{(2)}(z) = -\cos z \Rightarrow f^{(2)}(i) = -\cos i$

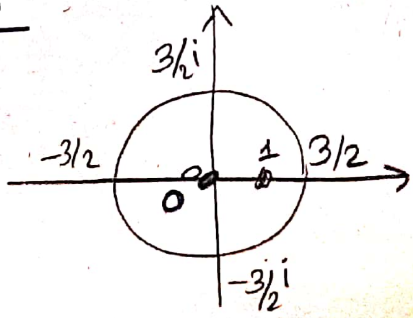
---

(6) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} = ?$

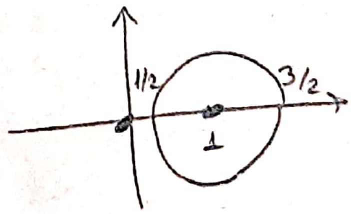
a) D; $|z|<3/2$ ise ; b) D; $|z-1|<1/2$ ise.

Çözüm:

a)



b)



$$\int_{\partial D} \frac{\frac{e^z}{z}}{(1-z)^3}\,dz = -\int \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz$$

$$= -\frac{2\pi i}{2} \cdot f''(1) = -\pi i\,(e)$$

$f' = \dfrac{e^z \cdot z - e^z}{z^2}$

$f'' = \dfrac{[e^z \cdot z + \cancel{e^z} - \cancel{e^z}] \times z^2}{z^4} - \dfrac{2z\,[e^z \cdot z - e^z]}{z^4}$

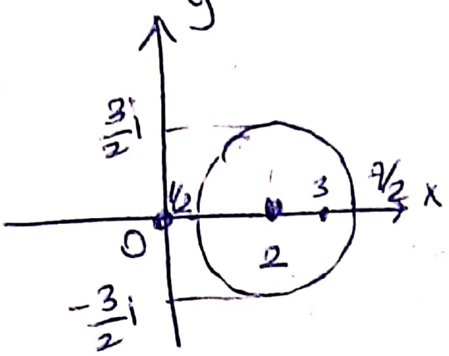
SS

SORU!

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-3)}\,dz = ?$$

Burada $C: |z-2| = \frac{3}{2}$ dır.

Çözüm!



$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ fonk.nu $|z-2| = \frac{3}{2}$ içinde ve üzerinde analitik, ayrıca $z=0$ noktası bu çemberin içinde. Böylece C.İ.F gereği

$$\int_C \frac{e^z}{e^2(z-3)}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-3}\,dz = 2\pi i\, f(3)$$

$$= 2\pi i.\ \frac{e^3}{9}$$

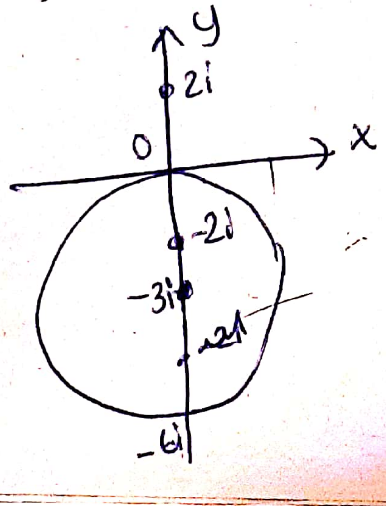
SORU!

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2+4}\,dz = ?$$

$C: x^2+y^2+6y=3$ çemberi

Çözüm! $x^2+y^2+6y=3 \Rightarrow x^2+(y+3)^2=9$

$(0,-3)$ merkezli 3 yarıçaplı çember.



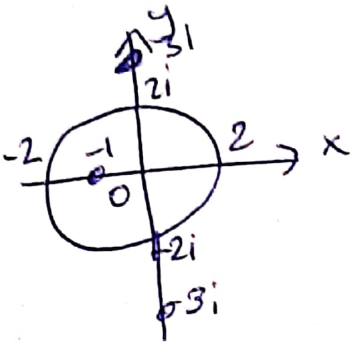
$f(z) = \frac{\sin z}{z-2i}$ fonk.nu $x^2+(y+3)^2=3^2$ çemberi içinde ve üzerinde analitiktir.

$-2i \in C$, C.İ.F'den

$$\int_C \frac{f(z)}{z+2i}\,dz = 2\pi i\, f(-2i) = 2\pi i.\ \frac{\sin(-2i)}{2.-4i}$$

SORU: $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+1)(z-3i)}\, dz = ?$

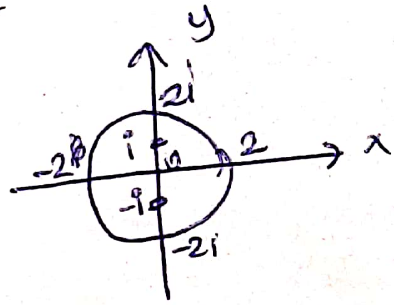
ÇÖZÜM: $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-3i}$ fonk nu $|z|=2$ içinde ve üzerinde analitik ve $z=-1$ noktası $|z|=2$ içinde olduğundan C.İ.F gereği.



$$\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z+1}\, dz = 2\pi i\, f(-1) = 2\pi i \cdot \frac{\sin(-1)}{-1-3i} = \frac{2\pi i \sin 1}{1+3i}$$

SORU: $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz = ?$

ÇÖZÜM:



$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} \Rightarrow 1 \equiv (A+B)z + Bi - Ai \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B=\frac{1}{i}=-i \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B=-i \end{array}$$

$$B=-\frac{i}{2}, \quad A=\frac{i}{2}$$

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)}\, dz = \frac{i}{2}\int_{|z|=2} \frac{\sin z\, dz}{z+i} - \frac{i}{2}\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-i}\, dz$$

$$\overset{\text{C.İ.F}}{=} \frac{i}{2}\cdot 2\pi i \sin(-i) - \frac{i}{2}\cdot 2\pi i \sin i$$

$$= \pi \sin i + \pi \sin i = 2\pi \sin i$$

Soru: $C_R = \{z : |z|=R, \ |\arg z| \leq \alpha\}$ $z=Re^{i\alpha}$ nok.dan ve $z\to\infty$, $zf(z)\to A$ ise

(11)

$z=Re^{i\alpha}$ noktasına yönlenen çemberin yayı

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 2\alpha i A$$

$\left[z=Re^{i\theta} \quad dz = iRe^{i\theta}d\theta \right]$

olduğunu gösteriniz

ispat:

$$\int_{C_R} f(z)dz = iR \int_{-\alpha}^{\alpha} f(Re^{i\theta})\, e^{i\theta}.d\theta.$$

$$\int_{C_R} f(z)dz - 2i\alpha A = iR \int_{-\alpha}^{\alpha} f(Re^{i\theta})\, e^{i\theta}d\theta - 2i\alpha A$$

$$= i\int_{-\alpha}^{\alpha} [R f(Re^{i\theta})\, e^{i\theta} - A.]\, d\theta.$$

$\left[\lim_{z\to\infty} z f(z) = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \ \exists\delta>0 \text{ var } \ni |z|>\delta \text{ iken} \right.$

$|zf(z)-A| < \varepsilon$ dur.

Sonuç olarak $R>\delta$ ise $z=Re^{i\theta}$ için $|z|=R>\delta$ dur.

$-\alpha<\theta<\alpha$ oy $\left. |Re^{i\theta}f(Re^{i\theta})-A| < \varepsilon \text{ dur.} \right]$

Böylece

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz - 2iA\right| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |Re^{i\theta}f(e^{i\theta})-A|\,d\theta < \varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta.$$

$$= 2\alpha\varepsilon$$

dır. Burada

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 2\alpha i A$$

dır.

SORU: $\left| \int_{|z|=1} \frac{dz}{3+5z^2} \right| \leq \pi$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\pi.$

$|3+5z^2| \geq \left| |5z^2| - 3 \right| = 5-3 = 2$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{3+5z^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

Böylece $\left| \int_{|z|=1} \frac{dz}{3+5z^2} \right| \leq 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$

Γ γ uzunluğu L olan bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $f(z)$ sürekli ve $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı varsa $\forall z \in \gamma$ için

$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot L$ dir.

SORU! $\left| \int_{|z|=1} \frac{2z+1}{5+z^2} dz \right| \leq \frac{3\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm! $\left| \frac{2z+1}{5+z^2} \right| \leq \frac{2|z|+1}{\left| |5| - |z|^2 \right|} \overset{|z|=1}{=} \frac{2+1}{5-1} = \frac{3}{4}.$

$L = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

$\Rightarrow \left| \int_{|z|=1} \frac{2z+1}{5+z^2} dz \right| \leq \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ //

olsun.

Soru! Aşağıdaki çevrelerin uzunluğunu hesaplayınız.

γ: a) $z(t) = 2 + 3e^{2it}$, $-\pi \le t \le \pi$

Çözüm: $z(t) = 2+3e^{2it} = 2+3(\cos 2t + i\sin 2t) = \underbrace{2+3\cos 2t}_{x(t)} + i\underbrace{3\sin 2t}_{y(t)}$ =

$$L = \int_\gamma |dz| = \int_\gamma \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

$\frac{dx}{dt} = -6\sin 2t \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 36\sin^2 2t \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36.$

$\frac{dy}{dt} = 6\cos 2t \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36\cos^2 2t$

$:|dz$

Böylece

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{36}\, dt = 6.(\pi-(-\pi)) = \underline{\underline{12\pi}}$$

---

b) γ! $z(t) = e^{(1+i)t}$, $-\pi \le t \le \pi$

Çözüm: $z(t) = e^t . e^{it} = e^t(\cos t + i\sin t)$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^t\cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) \\ \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) \end{array}$

$\frac{3z}{2}$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}\left(\cos^2 t - \cancel{2\sin t\cos t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + \cos^2 t\right)$$
$$= 2e^{2t}$$

olduğundan

$$L = \int_\gamma |dz| = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}\,\frac{[e^{\pi} - e^{-\pi}]}{2}.2 = \underline{\underline{2\sqrt{2}.\operatorname{sh}\pi}}$$

Soru!

a) f ve g fonksiyonları bir D bölgesinde analitik olsun.

Eğer γ, D içinde bir çevre ise

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_\gamma - \int_\gamma f'(z)g(z)dz$$

dir.

Çözüm!

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

olduğundan

$$\int_\gamma \frac{d}{dz}(f(z)g(z))dz = \int_\gamma f'(z)g(z)dz + \int_\gamma f(z)g'(z)dz$$

yazılır. Buradan

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_\gamma - \int_\gamma f'(z)g(z)dz$$

bulunur.

b) $\int z e^{2z} dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm! $f(z)=z$ $g'(z)=e^{2z}$ olsun. Bu durumda $g(z)=\frac{e^{2z}}{2}$

$$\int z e^{2z} dz = \frac{z . e^{2z}}{2} - \int \frac{e^{2z}}{2} dz + C$$

$$= \frac{z e^{2z}}{2} - \frac{1}{4} e^{2z} + C$$

SORU: $\oint_C \frac{z^2+\sinh 2z}{z^3-3iz^2+4z-12i}\,dz = ?$ Burada C; $|z|=1$

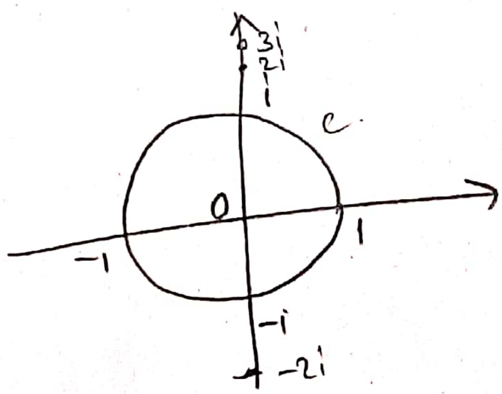
birim çemberdir.

Çözüm: $z^3-3iz^2+4z-12i=0$

$z_1=3i$ denklemi sağlar.

$$\begin{array}{l|l} z^3-3iz^2+4z-12i & z-3i \\ \underline{-\; z^3-3iz^2} & \overline{z^2+4} \\ \quad 4z-12i & \\ \quad \underline{4z-12i} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Buradan. $z^3-3iz^2+4z-12i=(z-3i)(z-2i)(z+2i)$



$\frac{z^2+\sinh 2z}{z^3-3iz^2+4z-12i}$ fonksiyonu birim çember içinde ve birim çember üzerinde analitik olduğundan Cauchy Teoremi gereği

$$\oint_C \frac{z^2+\sinh 2z}{z^3-3iz^2+4z-12i}\,dz=0$$

dır

<u>Soru:</u> $n=1,2,3,4$ o.ü

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} 2\pi.$$

olduğunu gösteriniz.

<u>Adım:</u> $z=e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta. \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

dir. Böylece C; $|z|=1$ birim çemberi üzerinde

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \int_C \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{2n} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}i} \int_C \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

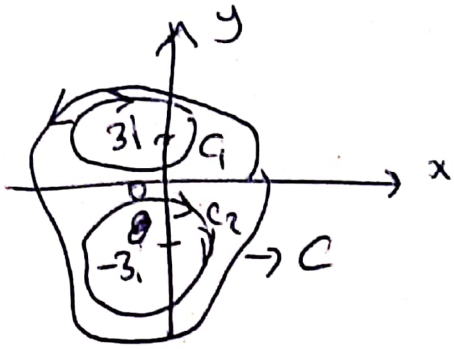
$$= \frac{1}{2^{2n}i} \int_C \frac{1}{z}\left[z^{2n} + \binom{2n}{1} z^{2n-1}\frac{1}{z} + \ldots + \binom{2n}{p} z^{2n-p}\left(\frac{1}{z}\right)^p + \ldots + \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right] dz$$ için

$$= \frac{1}{i2^{2n}} \int_C \left[z^{2n-1} + \binom{2n}{1} z^{2n-3} + \ldots + \binom{2n}{p} z^{2n-2p-1} + \ldots + z^{-2n-1}\right] dz$$

$$= \frac{1}{i2^{2n}} \cdot 2\pi i \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot 2\pi \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{\cancel{1.2\ldots}n(n-1)(2n-2)\ldots 2n \cdot 2\pi}{2^{2n}\cdot \cancel{n!}\, n!}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot 2\pi.$$

c)



$C^+ \cup C_1^- \cup C_2^-$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

(Çok bağlantılı bölge için Cauchy İntg. For.)

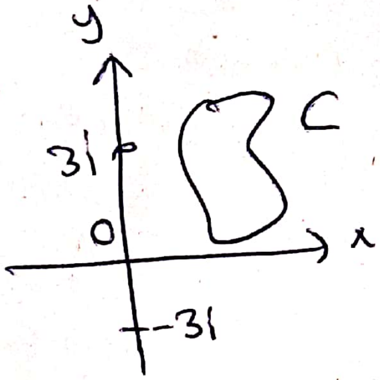
$$\int_C f(z)dz = \int_{|z-3i|=\frac{1}{10}} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{|z+3i|=\frac{1}{10}} \frac{dz}{z^2+9}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} + 2\pi i \frac{1}{-6i}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 0.$$

d)



Tek bağlantılı bölge için Cauchy Teo.dan

$$\int_C \frac{dz}{z^2+9} = 0$$

(C eğrisi üzerinde ve içinde verilen fonk. analitik).

5

c) C; $\pm 3i$ noktalarını içinde bulunduran bir çevre

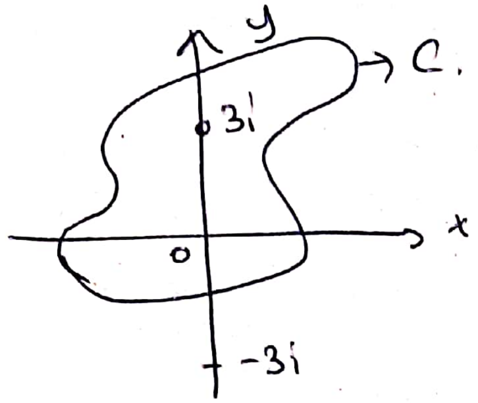
d) C; $\pm 3i$ nokt. " bulundurmayan bir çevre.

o.ü integrali hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)}$$

a)

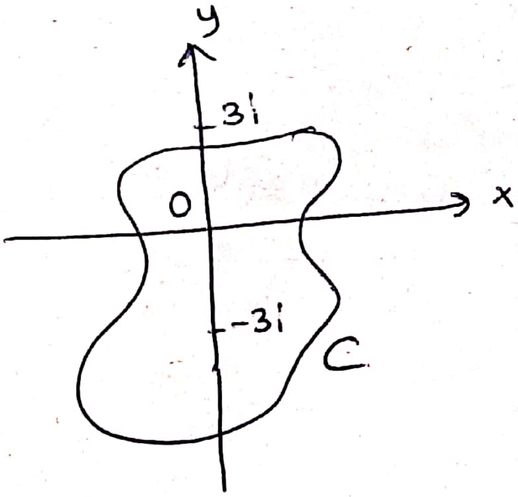


$f(z)=\frac{1}{z+3i}$ fonk.nu C bölge ve üz. de ana ve $z=3i$ nok.ı C nin içinde olduğu

$$\int_C \frac{dz}{z^2+9} \underset{\text{C.i.f den}}{=} \oint_C \frac{f(z)}{z-3i}\,dz = 2\pi i \cdot f(3i)$$

$$= 2\pi i \,\frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}$$

b)



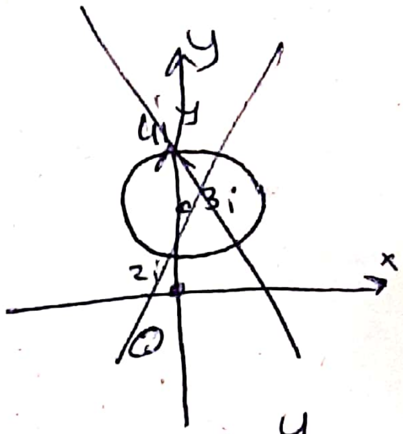
$f(z)=\frac{1}{z-3i}$ fonk.nu C bölg. de ve üz. ana ve $z=-3i \in C$ olduğundan C.i.f gereği

$$\int_C \frac{dz}{z^2+9} = \int_C \frac{f(z)}{z+3i}\,dz = 2\pi i\, f(-3i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-6i}$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

SORU! $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)} = ?$

$\left(C;\ z = -3i + e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi] \right)$

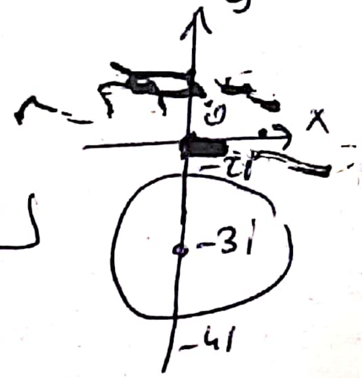


Çözüm! $\displaystyle \frac{1}{z(z+\pi i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+\pi i}$

$\Rightarrow 1 \equiv Az + A\pi i + Bz$

$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = \frac{i}{\pi}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{\pi i} = -\frac{i}{\pi}$



$$\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)} = \underbrace{-\frac{i}{\pi}\int_C \frac{dz}{z}}_{\text{CT den } 0} + \frac{i}{\pi}\int_C \frac{dz}{z+\pi i}$$

$$= \frac{i}{\pi} \cdot 2\pi i \cdot 1$$

$$= -2$$

SORU! $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+9}$

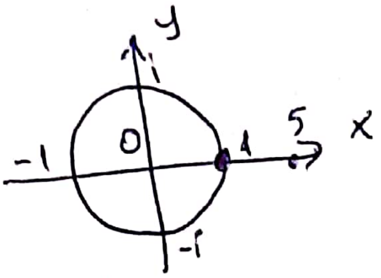
a) C; $3i$ noktası içinde bulunduran ancak $-3i$ noktası içinde bulundurmayan bir çevre

b) C; $-3i$ noktası içinde bulunduran ancak $3i$ noktası içinde bulundurmayan bir çevre.

$$= \frac{\pi}{2}\cdot \sin 2i = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i} = -\frac{\pi}{2i}\cdot\frac{e^{2}-e^{-2}}{2} = \frac{i\pi}{2}\sinh 2$$ (4)

SORU: $$\oint_{|z|=1}\left(\frac{\sin z + z}{z-1} + \frac{\cos z}{z-5}\right)dz = ?$$

Çözüm:



$$\underbrace{\oint_{|z|=1}\frac{\sin z + z}{z-1}\,dz}_{\text{C.İ.F.}} + \underbrace{\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z-5}\,dz}_{\text{C. Teo. den.}} =$$

$$= 2\pi i.\left[\sin(1)+1\right] + 0$$

$$= 2\pi i\,.\sin 1 + 2\pi i = \cancel{2}\pi \cancel{i}.\,\frac{e^{i}-e^{-i}}{\cancel{2i}} + 2\pi i = \pi\left(e^{i}-e^{-i}\right)+2\pi i$$

SORU: $$\oint_{|z|=4}\left(z^2+z+\frac{4}{z}\right)dz = ?$$

Çözüm: $$\oint_{|z|=4}\left(z^2+z+\frac{4}{z}\right)dz = \underbrace{\oint_{|z|=4}(z^2+z)\,dz}_{\text{C.T. den}} + 4\underbrace{\oint_{|z|=4}\frac{dz}{z}}_{\text{C.İ.F den}}$$

$$= 0 + 4\cdot 2\pi i\cdot 1 = 8\pi i$$

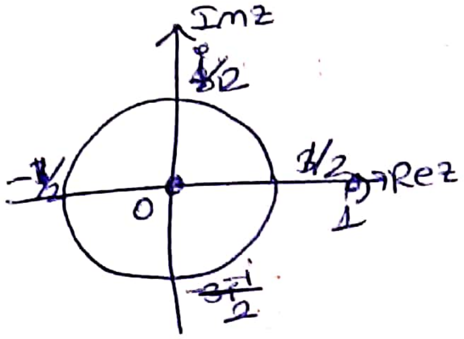
$f_1(z)$ fonk. $|z|=4$ içinde ve üzerinde analitik

$f_2(z)=1$ sabit fonk. " " " ve

$z=0$ noktası çemberin içinde.

SORU: $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{z}}{z(1-z)^3}\,dz = ?$

$f(z)=\dfrac{e^{z}}{(1-z)^3}$ $\quad |z|=\frac{1}{2}$



de analitik $z=0$ nok.-ı bu çemberin içinde. Böylece C.İ.F. den

$$\int_{|z|=1/2} \frac{\frac{e^{z}}{(1-z)^3}}{z}\,dz = 2\pi i .\, f(0) = 2\pi i .\, \frac{e^{0}}{(1-0)^3} = 2\pi i$$

SORU: $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^3-5z+3}{z-1}\,dz$. γ: $z=1$ noktasını içeren herhangi bir kapalı eğri.

Çözüm: $f(z)=z^3-5z+3$ fonk.nu tüm kompleks düzlemde analitik olduğundan herhangi bir γ kapalı eğrisi üzerinde ve bu eğrinin iç bölgesinde analitiktir. C.İ.F gereği

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i\,(1-5+3) = -2\pi i$$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$. $x^2+4=0$ denkleminin kökleri $\mathbb{R}$'de yoktur.

Cauchy İntegral Formülü:

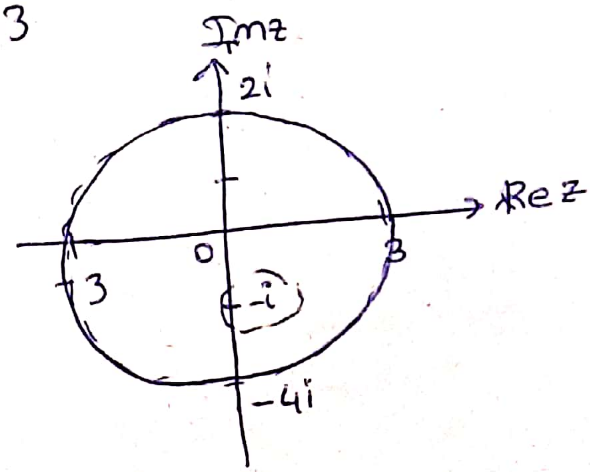
$f(z)$, tek bağlantılı bir D bölgesinde analitik fonk., γ bu bölgede bulunan herhangi bir parçalı düzgün kapalı eğri olsun. O halde γ eğrisinin iç bölgesinde bulunan tüm z noktaları için

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi} \quad \text{———} \quad (*)$$

dir. $(*)$ formülüne Cauchy integral formülü denir.

SORU: $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}\, dz = ?$

Çözüm:



$f(z) = \sin z \Rightarrow f(-i) = \sin(-i)$.

$$\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}\, dz \overset{\text{C.İ.F.}}{=\!=} 2\pi i \cdot f(-i) = 2\pi i \cdot \sin(-i)$$

SORU! Eğer f fonksiyonu birim dairenin içinde ve üzerinde analitik ise $r<1$ için

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-re^{i(t-\theta)}}\,d\theta$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Cauchy integral formülünden. $|z|<1$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}}\cdot\frac{dw}{w}$$

biçiminde yazılır.

$z=re^{it}$, $w=e^{i\theta}$ alınırsa.

$dw = ie^{i\theta}d\theta$ olur.

Buradan

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-\frac{re^{it}}{e^{i\theta}}}\cdot\frac{i\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta}{\cancel{e^{i\theta}}}$$

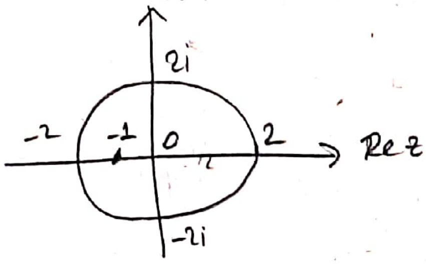
$$= \frac{\cancel{i}}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-re^{i(t-\theta)}}\,d\theta$$

ır.

SORU: Aşağıdaki integralleri yanlarında belirtilen yollar üzerinde hesaplayınız. (2)

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin\pi z}{(z+1)^3}\,dz \quad , \quad \gamma = \{|z|=2\}$

Çözüm:



$\sin\pi z$ fonk nu analitik ve $z=-1$ ndeki γ nın sınırladığı bölge içinde kaldığından Cauchy Türev Formülünden.

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z+1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(-\pi^2 \sin\pi\cdot(-1)\right) = 0 \text{ dır}$$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^2-40z-3}{z^3+10z^2+19z-30}\,dz = ? \quad , \quad \gamma = \{|z|=2\}$

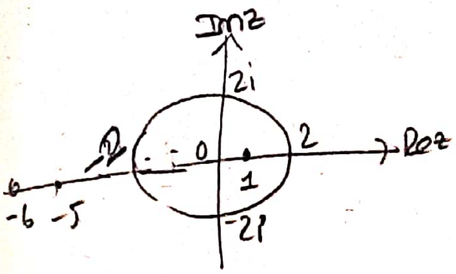
Çözüm:

$z^3+10z^2+19z-30=0 \Rightarrow z=1$ köklerden biri

$$\begin{array}{l|l} z^3+10z^2+19z-30 & z-1 \\ \underline{-\;z^3-z^2} & z^2+11z+30 \\ \quad 11z^2+19z-30 & \\ \quad \underline{-\;11z^2-11z} & \\ \qquad 30z-30 & \\ \qquad \underline{-\;30z-30} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$z^2+11z+30$: $z \;\; +6$, $z \;\; +5$

Böylece $z^3+10z^2+19z-30 = (z-1)(z+5)(z+6)$



$$f(z) = \frac{5z^2-40z-3}{(z+5)(z+6)}$$

$z=1 \in \gamma$. C.İ.F 'den

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)}\,dz = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i\,\frac{(5-43)}{6\cdot 7} = -\frac{38}{21}\pi$$