① C; 0 ile 2+i noktalarını birleştiren doğru parçası ise $\int_C \mathrm{Im}\, z\, dz = ?$ ①

Çözüm: I. YOL: $z : a + (b-a).t \quad , 0 \le t \le 1$, $[a,b]$

$z = (2+i)t, \ 0 \le t \le 1$

$dz = (2+i)dt$

$$\int_C \mathrm{Im}\, z\, dz = \int_0^1 \mathrm{Im}[0 + (2+i-0)t]\, dt$$

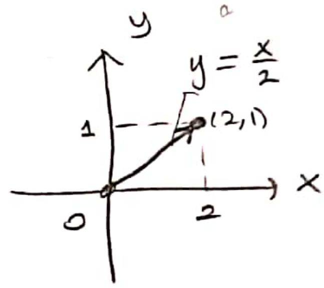
$$= (2+i)\int_0^1 t\, dt = (2+i)\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{2+i}{2} = 1 + \frac{i}{2}$$

II. YOL: $z = x + iy \Rightarrow \mathrm{Im}\, z = y$ dir.

$f(z) = \mathrm{Im}\, z$ o.ü. $\quad u(x,y) = y \ , \ v(x,y) = 0$

$\Big[\ f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ o.ü.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)\ \Big]$$



$y = \frac{x}{2}$

$dy = \frac{dx}{2}$

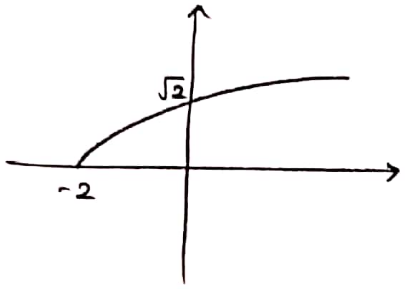
$$\int_C \mathrm{Im}\, z\, dz = \int_C y\, dx + i\int_C y\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2} dx + i\int_0^2 \frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{2}$$

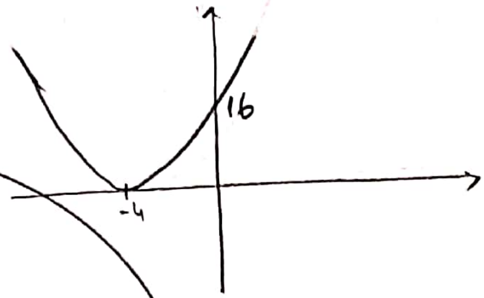
$$= \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + i\left[\left.\frac{x^2}{8}\right|_0^2\right]$$

$$= 1 + \frac{i}{2}$$

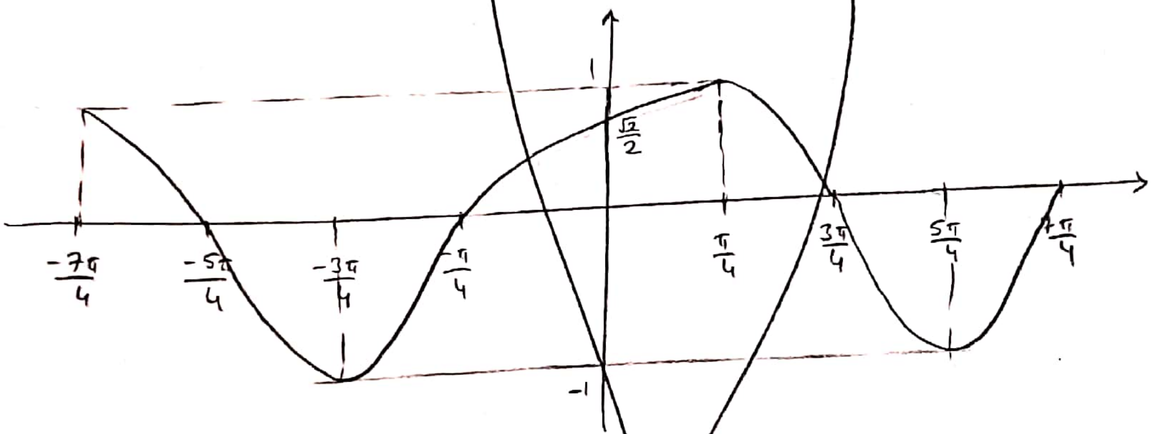
50- $y = \sqrt{2+x}$



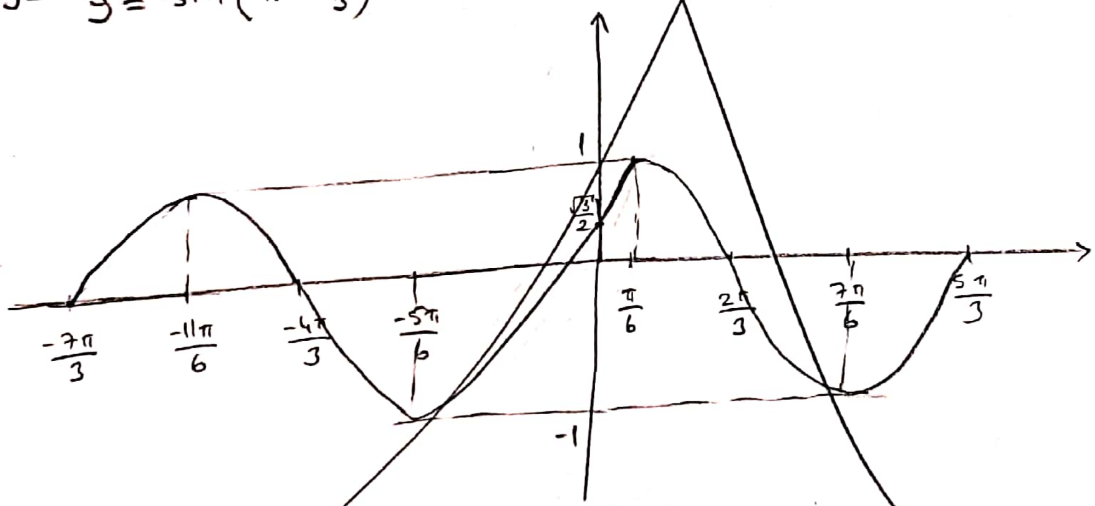
51- $y = (x+4)^2$



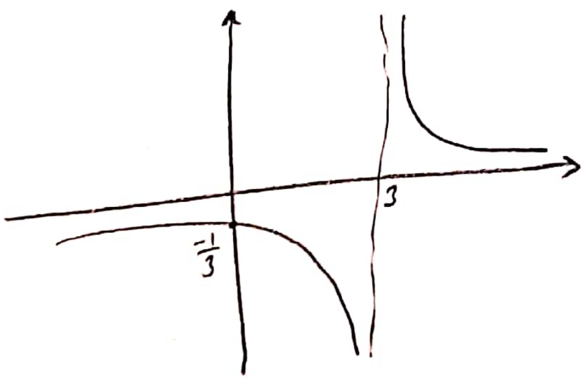
52- $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



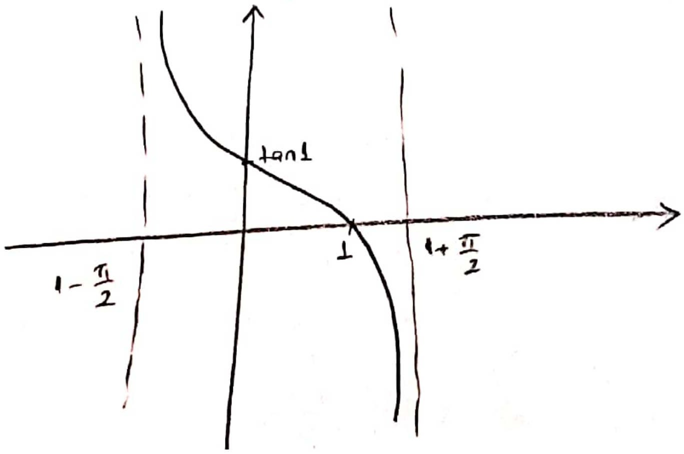
53- $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



54- $y = \frac{1}{x-3}$



55- $y = tg(1-x)$



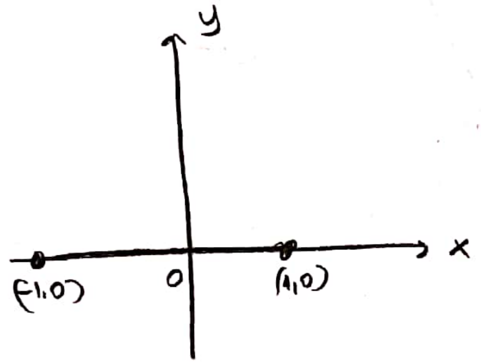
2) $\int_C |z|dz = ?$

a) C; $(-1,0)$ noktasını $(1,0)$ noktasıyla birleştiren doğru parçası ise

b) C; $(-1,0)$ dan $(1,0)$ nok.na yönlenmiş üst yarı çember eğrisi ise;

Çözüm:

a).



$a=-1, \quad b=1$

$z=a+(b-a)t \quad , 0\leq t\leq 1$

$z=-1+2t$

$dz=2dt$

$$\int_C |z|dz = \int_0^1 \sqrt{(-1+2t)^2}\,dt = \int_0^1 |2t-1|\,dt$$

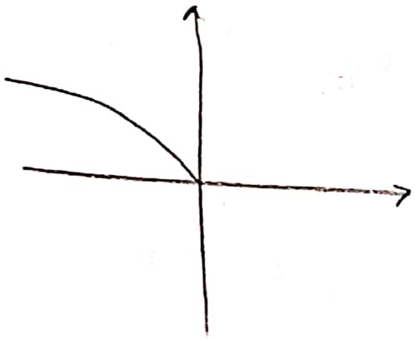
$$= -2\int_0^{1/2}(2t-1)dt + 2\int_{1/2}^{1}(2t-1)dt$$

$$= -2\left[t^2-t\Big|_0^{1/2}\right] + 2(t^2-t)\Big|_{1/2}^{1}$$

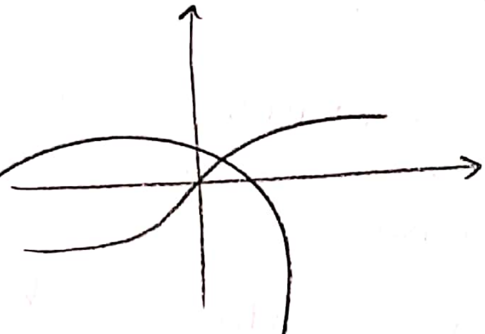
$$= 2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} - 0 + \cancel{1}-\cancel{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2.\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{1/2}\right) = \underline{\underline{1}}$$

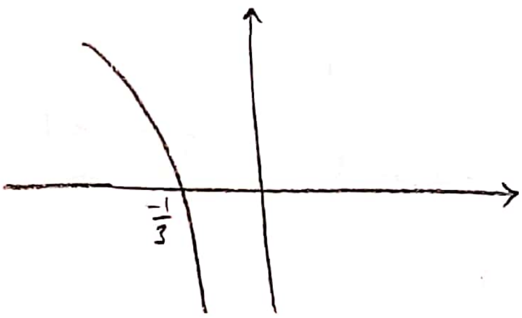
$y = \log\sqrt{-2x}$



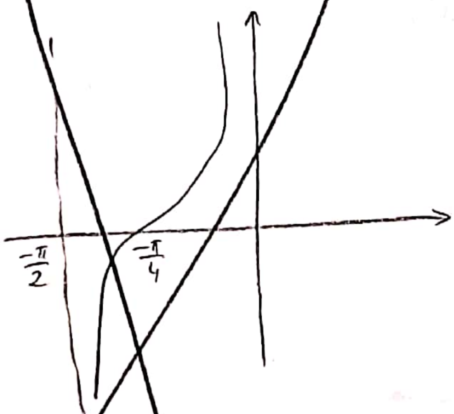
44- $y = \sqrt[3]{4x}$



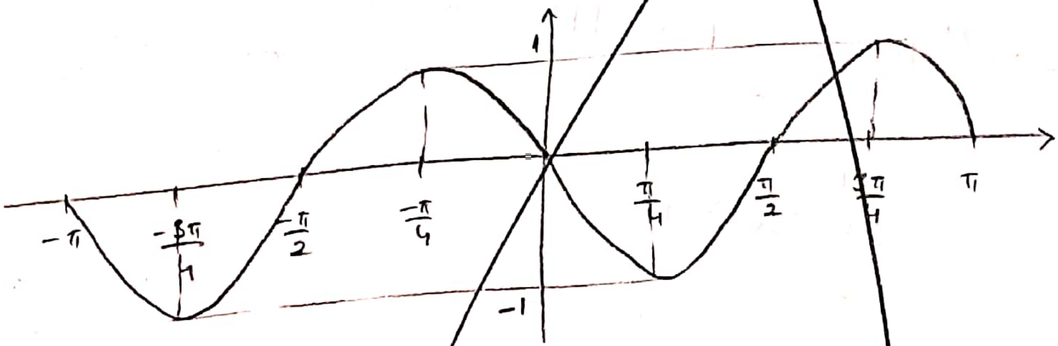
45- $y = \log_3(-3x)$



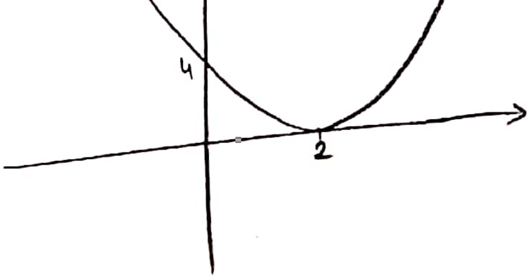
47- $y = ctg(-2x)$



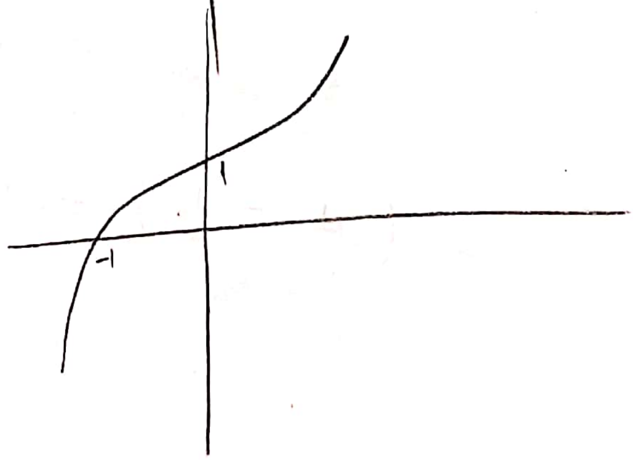
46- $y = \sin(-2x)$



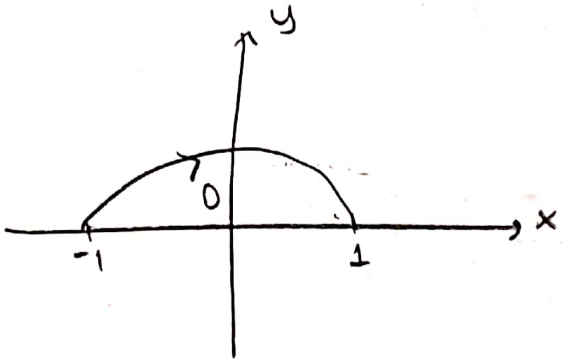
48- $y = (x-2)^2$



49- $y = (x+1)^3$



b)



$C;\ z = e^{it},\quad \pi \le t \le 2\pi.$ ($-\pi \le t \le 0$)

3

$$\int_C |z|\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{|e^{it}|}_{1}\, i e^{it}\,dt$$

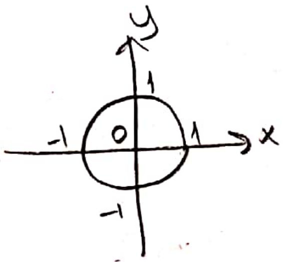
$$\Rightarrow \int_C |z|\,dz = \cancel{i}\cdot \frac{e^{it}}{\cancel{i}}\Big|_{\pi}^{2\pi} = e^{2\pi i} - e^{\pi i} = 1-(-1) = 2.$$

Yollar değişince $\int_C |z|\,dz$ değeri değişti. O halde $|z|$ analitik değildir.

---

(3) $\oint_C \frac{dz}{z} = ?$ C; pozitif yönlü $|z|=1$ çemberidir.

Çözüm:



$z = e^{it},\quad 0 \le t \le 2\pi$

$dz = i e^{it}\,dt$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_0^{2\pi} \frac{i \cancel{e^{it}}\,dt}{\cancel{e^{it}}} = it\Big|_0^{2\pi} = \underline{2\pi i}$$

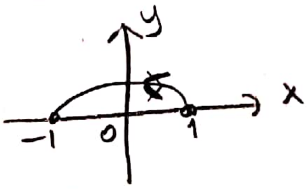
$z = \cos t + i \sin t$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\; e^{\frac{i(\arg z + 2k\pi)}{n}} \qquad k = \overline{0, n-1}$$

---

(4) C; $(1,0)$ nok.dan $(-1,0)$ noktasına giden $|z|=1$ üst yarı çember eğrisi olsun. Buna göre $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ integralini hesaplayınız. Burada $\sqrt{z}$ karekök fonk.nun $k=0$ a karşılık gelen temel branşıdır.

Çözüm:



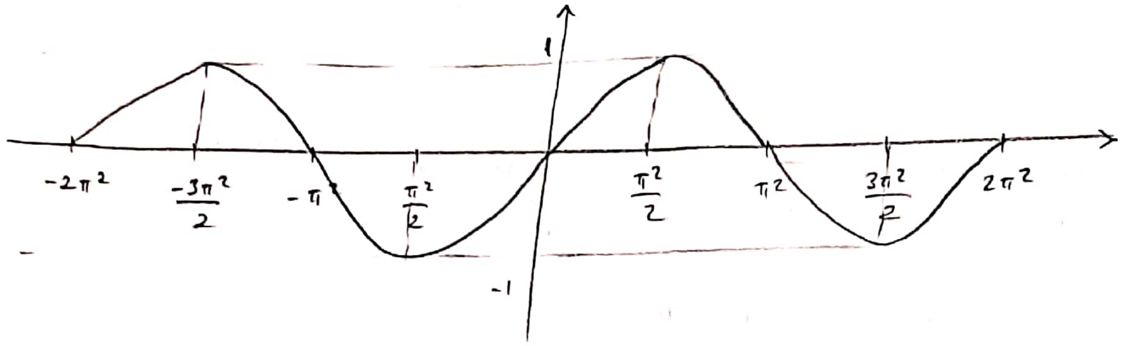
$C;\ z = e^{it},\quad 0 \le t \le \pi$

$dz = i e^{it}\,dt$

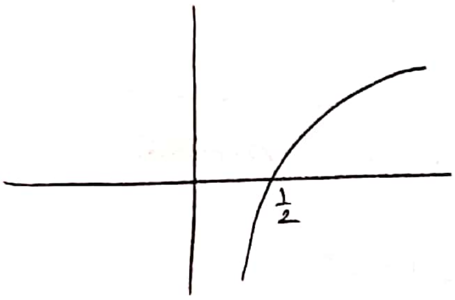
$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{i e^{it}\,dt}{\sqrt{|z|}\cdot e^{\frac{i\arg z}{2}}} = \int_0^{\pi} \frac{i e^{it}\,dt}{\sqrt{1}\cdot e^{it/2}} = i\int_0^{\pi} e^{it/2}\,dt$$

$$= 2\, e^{it/2}\Big|_0^{\pi} = 2\left(e^{\pi i/2} - 1\right) = 2(i-1) = \underline{\underline{-2+2i}}$$

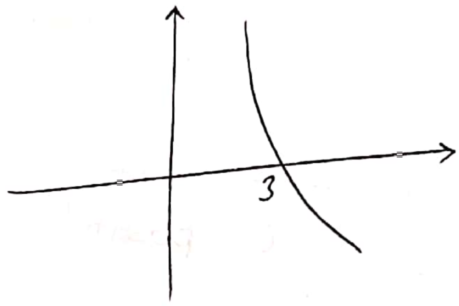
4 36- $y = \sin \frac{1}{\pi} x$



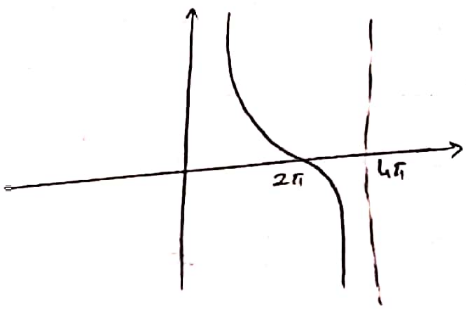
37- $y = \log_2 2x$



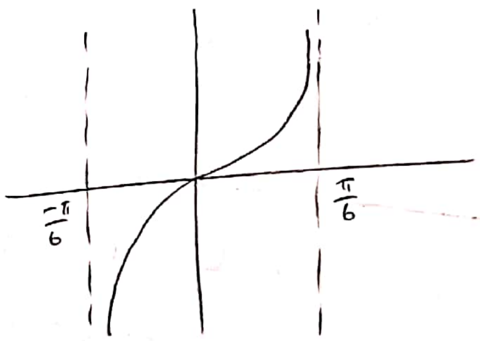
38- $y = \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{3}x)$



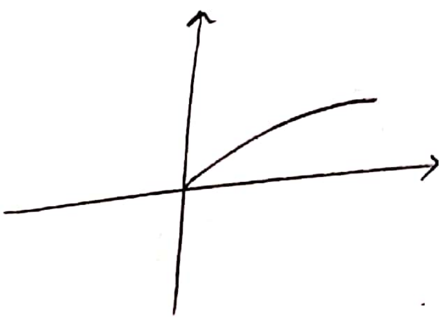
39- $y = ctg \frac{1}{4} x$



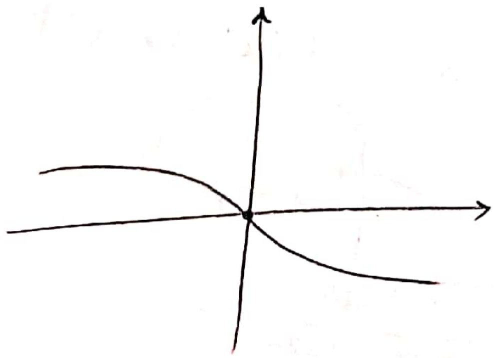
40- $y = tg\, 3x$



41- $y = \sqrt{2x}$

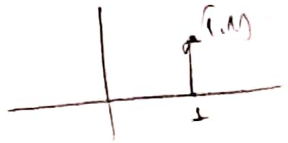


42- $y = \sqrt[3]{-0,5x}$



Sc

⑤ Aşağıdaki integralleri hesaplayınız. ④



a) $\int_{1}^{1+i} z^2 dz$

<u>Çözüm:</u> $[1, 1+i]$

$z = 1 + (1+i-1)t, \quad 0 \le t \le 1$
$z = 1 + it \Rightarrow dz = i\,dt$

$$\int_1^{1+i} z^2 dz = \int_0^1 (1+it)^2 i\,dt = i\int_0^1 (1+2it - t^2)\,dt$$

$$= i\left[t + it^2 - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right] = i\left(1 + i - \frac{1}{3} - 0\right) = -1 + \frac{2}{3}i$$

sinz analitik.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z\, dz = ?$

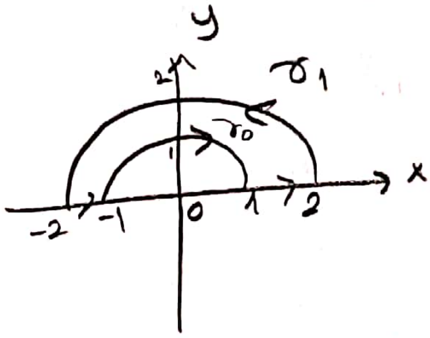
<u>Çözüm:</u> $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z\,dz = -\cos z\Big|_0^{\frac{\pi}{2}+i} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\right) + \cos 0$

$$= -\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cos i + \sin\frac{\pi}{2}\sin i + 1$$

$$= \sin i + 1.$$

⑥ $\oint \frac{\bar{z}}{z} dz = ?$ $\quad C;\ \partial G^+ = \partial\{z:\ 1<|z|<2,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$

<u>Çözüm:</u>



Verilen integral bu bölgenin sınırıdır.

$C = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup [-2,-1] \cup [1,2]$

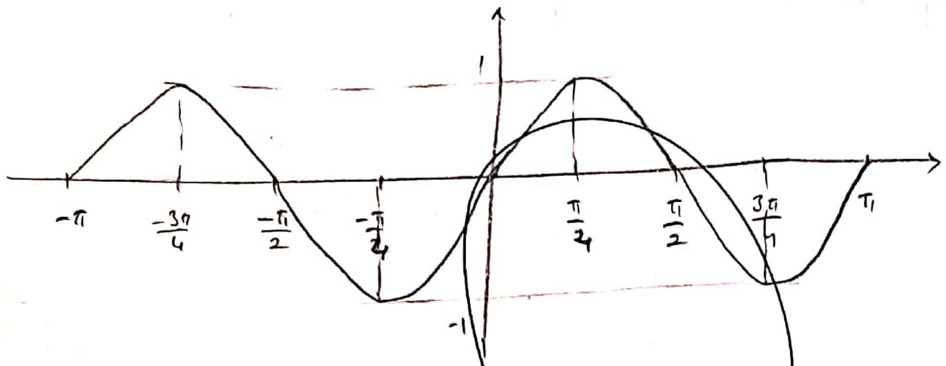
$z = -2+t,\ 0 \le t \le 1$

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\bar{z}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\bar{z}}{z} dz + \int_{[-2,-1]} \frac{\bar{z}}{z} dz + \int_{[1,2]} \frac{\bar{z}}{z} dz$$

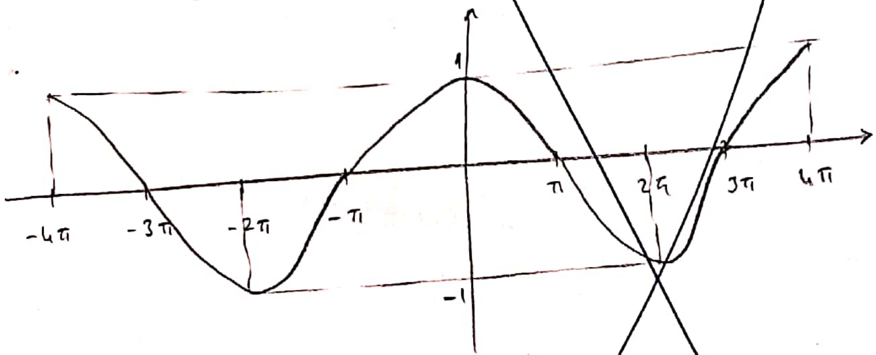
$z = 1+t,\ 0 \le t \le 1$

$z = 2e^{it},\ 0 \le t \le \pi$ $\qquad z = e^{it},\ \pi \le t \le 2\pi$

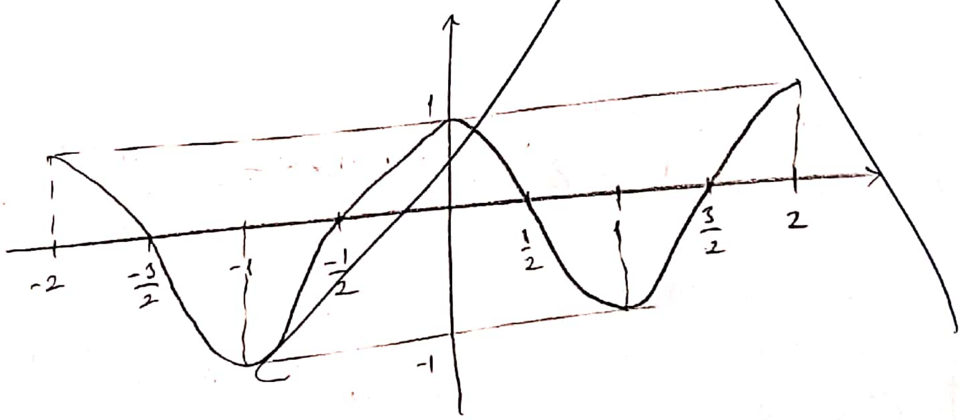
33- $y = \sin 2x$



34- $y = \cos \frac{1}{2} x$



35- $y = \cos \pi x$



$$\oint_C \frac{z}{\bar{z}}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{\cancel{2}e^{it}}{\cancel{2}e^{-it}}\cdot 2ie^{it}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{-it}}\cdot i\,e^{it}\,dt + \qquad (5) \quad z)$$

$$+ \int_0^1 \frac{(-2+t)}{(-2+t)}\cdot dt + \int_0^1 \frac{1+t}{1+t}\cdot dt.$$

$$= 2i\int_0^{\pi} e^{3it}\,dt + i\int_{\pi}^{2\pi} e^{3it}\,dt + (1-0) + (1-0) \qquad it$$

$$= \frac{2\cancel{i}}{3\cancel{i}}\, e^{3it}\Big|_0^{\pi} + \frac{i}{3i}\, e^{3it}\Big|_{\pi}^{2\pi} + 2$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^{3\pi i}-1\right) + \frac{1}{3}\left(e^{6\pi i} - e^{3\pi i}\right) + 2.$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

(7) C; $\{z : |z-a| = \rho\}$ $(\rho>0)$ pozitif yönlü (6)

çember ise $\int_C (z-a)^n dz$ integralini hesaplayınız. $(n\in\mathbb{Z})$

Çözüm: $|z-a|=\rho$ çemberinin parametrik şekli

$0\le t\le 2\pi$

$z=a+\rho e^{it} \Rightarrow dz = i\rho e^{it}dt$.

$$\int_C (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (\rho e^{it})^n \, i\rho e^{it} dt = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \text{ ise} \\ \dfrac{\rho^{n+1}}{n+1} \cdot e^{it(n+1)}\Big|_0^{2\pi}, & n\neq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \text{ ise} \\ 0, & n\neq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

---

(8) (ödev) $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ integralini $z=0$ dan $z=4+2i$ nokta-sına giden $z=z(t)=t^2+it$ yolu boyunca hesaplayınız.

Çözüm: γ üzerinde. $z=0$ ve $z=4+2i$ sırası ile $t=0$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelir. Ohalde.

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^2 \overline{(t^2+it)}\,(2t+i)\,dt$$

$$= 10 - \frac{8i}{3}$$

(ödev)

(9) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_\gamma \frac{dz}{z^3}$, γ; birim çember.

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$, γ; $z(t)=3+e^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$

Çözüm:

a) $$\int_\gamma \frac{dz}{z^3} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{3it}} = i\int_0^{2\pi} e^{-2it}dt = -\frac{1}{2} e^{-2it}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

b) $$\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{(3+e^{it})^2}dt = \int_0^{2\pi}\frac{d(e^{it})}{(3+e^{it})^2} = -\frac{1}{3+e^{it}}\Big|_{t=0}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0$$

(10) γ; 3 ve $3-2i$ noktalarını birleştiren doğru parçası ise. $\int_\gamma \bar{z}^2 dz = ?$

Çözüm: $z(t) = 3 + (3-2i-3)t$, $0\leq t\leq 1$

$z(t) = 3-2it$, $0\leq t\leq 1 \Rightarrow dz = -2i\,dt$

$$\int_\gamma \bar{z}^2 dz = \int_0^1 \overline{(3-2it)}^2 \cdot (-2i)dt = -2i\int_0^1 (3+2it)^2 dt$$

$$= -2i\int_0^1 (9+12it-t^2)dt = 12-\frac{46}{3}i$$

$u(x,y)$ $v(x,y)$

1) $f(z)=(x^2+2y)+i(x^2+y^2)$ olsun. f nin türevinin olduğu noktaları bulunuz. $U_x=2x$ $V_x=2x$ $U_y=2$ $V_y=2y$

Çözüm: $u(x,y)=x^2+2y$ $v(x,y)=x^2+y^2$ $x=y$

$\left.\begin{array}{l} u_x=2x \\ v_y=2y \end{array}\right\}$ $u_x=v_y$ yani $y=x$ olur. $U_x=V_y \rightarrow 2x=2y$

$V_x=-U_y$ $2x=-2$

$\left.\begin{array}{l} v_x=2x \\ u_y=2 \end{array}\right\}$ $v_x=-u_y \Rightarrow x=-1$ $z=-1-i$ $x=-1$ $y=-1$

O halde $y=x$, $x=-1$ ise $y=-1$ olur. Yani $z=-1-i$ noktasında Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. Dolayısıyla f fonksiyonu $z=-1-i$ noktasında dif. bilirdir. (türevi vardır)

2) $f(z)=x^2+axy+by^2$ fonksiyonunun sadece $a=2i$, $b=-1$ değerleri için analitik old. göst. $(a,b\in\mathbb{C})$

$a=2i$ $b=-1$

Çözüm: $a=a_1+i.a_2$, $b=b_1+i.b_2$ olsun

$f(z)=x^2+(a_1+ia_2)xy+(b_1+ib_2)y^2$

$=\underbrace{x^2+a_1xy+b_1y^2}_{u}+i\underbrace{(a_2xy+b_2y^2)}_{v}$

Cauchy Riemann

$\left.\begin{array}{l} u_x=2x+a_1y \\ v_y=a_2x+2b_2y \end{array}\right\}$ $2x+a_1y=a_2x+2b_2y \Rightarrow a_2=2,\ a_1=2b_2$ olmalı

$\left.\begin{array}{l} v_x=a_2y \\ u_y=a_1x+2b_1y \end{array}\right\}$ $a_1x+2b_1y=-a_2y \Rightarrow a_2=2,\ a_1=2b_2$ olduğundan $2b_1=-2$, $a_1=0=b_2$ olmalı

$b_1=-1$

Sonuç: $a=2i$, $b=-1$ olduğunda Cauchy Riemann denk. sağlanır. Analitik olur.

(3) Aşağıdaki fonksiyonların analitik olduğu kümeleri bulun, türevlerini alınız.

(a) $f(z) = e^{1/z}$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{(1-\sin z)^2}$ (c) $f(z) = e^{\frac{1}{1-az}}$, $a \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{Çözüm!}}$ e^z ve $\frac{1}{z}$ bileşke.

(a) $g(z) = e^z$, $h(z) = \frac{1}{z}$ dersek $(g \circ h)(z) = f(z)$ dir.

$g(z)$, $\mathbb{C}$ de tamdır, $h(z)$, $z \neq 0$ için $\mathbb{C}$ de analitiktir. Bileşke fonksiyon ise $z \neq 0$ için analitik olur.

$$f'(z) = \left(\frac{1}{z}\right)' \cdot e^{1/z} = -\frac{1}{z^2} \cdot e^{1/z}$$

olur.

(b) $(1-\sin z)^2 = 0$ yani $1 - \sin z = 0$ için analitiklik yok.

$\sin z = 1 \Rightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = 2i \cdot e^{iz}$

$\Rightarrow (e^{iz})^2 - 2i e^{iz} - 1 = 0$, $e^{iz} = t$ diyelim. $t^2 - 2it - 1 = 0$ denkleminin köklerini bulalım. $\downarrow$ $(t-i)^2 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{2i \mp \sqrt{-4 - 4\cdot(-1)}}{2} = i$$

$e^{iz} = i \Rightarrow e^{iz} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \Rightarrow iz = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ bulunur.

Sonuç: f, $\mathbb{C} - \{z \mid z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinde analitik.

$$f'(z) = \left[(1-\sin z)^{-2}\right]' = -2\cdot(1-\sin z)^{-3} \cdot (-\cos z) \text{ olur.}$$

(c) ilk şıktakine benzer.

(4) $u(x,y)=x^2-y^2$ fonksiyonunun harmonik old. göst. Harmonik eşleniğini bulunuz. $f(z)$ yi z cinsinden yazınız.

$\boxed{\text{Çözüm:}}$

$u_{xx}+u_{yy}=0$ dır. u harmonik olur.

$u_x=2x=v_y \Rightarrow v=\int 2x\,dy+\phi(x) \Rightarrow v=2xy+\phi(x)$

$\Rightarrow v_x=-u_y$ den $\cancel{2y}=\cancel{2y}+\phi'(x) \Rightarrow \phi'(x)=0$

$\Rightarrow \phi(x)=c,\ c\in\mathbb{C}$ olur. O halde $v=2xy+c$ olur.

$f(z)=u+iv=x^2-y^2+i(2xy+c)=(x+iy)^2+ic=z^2+ic$ olur.

(5) $u(x,y)=y^3-3x^2y$ için aynı soru

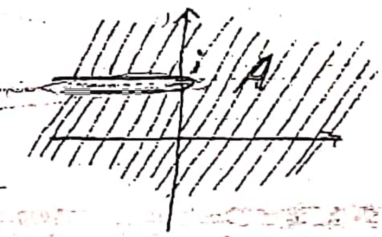
(6) $u(x,y)=2x(1-y)$ için aynı soru

(7) $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ için aynı soru $\qquad \displaystyle\int\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy=?$

(8) $f(z)=Ln(z-i)$ nin analitik olduğu bölge?

$\boxed{\text{Çözüm:}}$

$A=\{z \mid Re(z-i)\leq 0,\ Im(z-i)=0\}$



$z=x+iy$ alınırsa $z-i=x+i(y-1)$

$\Rightarrow x\leq 0;\ y-1=0$ bulunur.

(9) Aşağıdaki fonksiyonların analitikliğini inceleyiniz.

(a) $f(z)=xy+iy$ $\qquad$ (b) $f(z)=e^{y}e^{ix}$

$\boxed{\text{Çözüm}}$

(a) $u(x,y)=xy \qquad v(x,y)=y$

$u_x=y \quad u_y=x \quad v_x=0, \quad v_y=1.$

$u_x=v_y$ eşitliği $y=1$ olması durumunda sağlanır.

$v_x=-u_y$ eşitliği $0=-x$ yani $x=0$ durumunda sağlanır.

Cauchy-Riemann denklemleri sadece $(0,1)$ noktasında sağlanır.

Bu noktanın hiçbir komşuluğunda f diferansiyellenemez. Analitik değildir.

b) $u(x,y) = e^{y}\cos x$ $\quad v(x,y) = e^{y}\sin x$

$u_x = -e^{y}\sin x$ $\quad v_x = e^{y}\cos x$ $\quad u_y = e^{y}\cos x$ $\quad v_y = e^{y}\sin x$

$u_x = v_y$ eşitliği: $-e^{y}\sin x = e^{y}\sin x$, $\sin x = 0$ olan noktalarda sağlanır. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ dir.

$v_x = -u_y$ eşitliği: $e^{y}\cos x = -e^{y}\cos x$, $\cos x = 0$ olan noktalarda sağlanır. ~~x=k~~ $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ olur.

Cauchy-Rieman eşitlikleri hiçbir $z = x+iy$ noktası için sağlanmaz (ikisini birlikte gerçekleyen x yok). f analitik değil.

10) Aşağıdaki fonksiyonların singüler noktalarını bulunuz. ve bu noktalar dışında kalan her yerde bu fonksiyonların neden analitik olduğunu açıklayınız.

a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ $\quad$ b) $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ pol 1. dereceden $\quad$ c) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$ pol 1. k

Çözüm:

a) Rasyonel fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan noktalar singüler noktalardır.

$z = 0$, $z = \mp i$ noktaları singüler noktalar olur.

Bu noktaların her komşuluğundaki bazı noktalarda fonksiyon analitiktir. (Singüler nokta tanımı)

Çünkü polinom fonksiyonları $\mathbb{C}$ de tanımlı. Polinom fonksiyonlarının bölümünden oluşan fonksiyon, paydayı sıfır yapan noktalar dışında tüm $\mathbb{C}$ de analitiktir.

(b) ve (c) benzer ödev

9) $f(z)=\dfrac{Ln(z+4)}{z^2+i}$ analitik olduğu bölge?

Çözüm:

$Ln(z+4)$ ün analitik olduğu bölge

$\mathbb{C}-\{z \mid x+4\leq 0,\ y=0\}=\mathbb{C}-\{z=x+iy \mid x\leq -4,\ y=0\}$

$z^2+i=0 \Rightarrow z^2=-i=e^{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)i},\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow z=re^{i\theta} \Rightarrow r^2e^{2\theta i}=e^{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)i}$

$\Rightarrow 2\theta=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4},\ \theta=\frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow z=e^{\frac{3\pi}{4}i},\ z=e^{\frac{7\pi}{4}i}$ için $z^2=-i$ olur.

$A=\mathbb{C}-\left(\{z=x+iy \mid x\leq -4,\ y=0\}\cup\{e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}\}\right)$ olur.

10) $f(z)=2z^2-3-z.e^{z}-e^{-z}$ fonksiyonunun neden bir tam fonksiyon olduğunu açıklayınız.

Çözüm

polinom fonksiyonları, e^z fonksiyonu $\mathbb{C}$ de tamdır. analitik fonksiyonların çarpımları, bileşkeleri de tamdır. O halde e^{-z} bileşke fonksiyonu, $z.e^{z}$ fonksiyonu tamdır. Tam fonksiyonların toplamları da tamdır. $f(z)$ tam fonksiyon olur.

11) $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ fonks. verilsin. Varsayalım ki $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)=0$ ve

$\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)=0$ olsun. Eğer z_0 da f_1' ve f_2' türevleri var ve

$f_2'(z_0)\neq 0$ ise

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{f_1'(z)}{f_2'(z)}$$

dir. Gösteriniz. (L'Hospital Kuralı)

İspat

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)-f_1(z_0)}{f_2(z)-f_2(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f_1(z)-f_1(z_0)}{z-z_0}}{\frac{f_2(z)-f_2(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{f_1'(z)}{f_2'(z)}$$

olur.

12) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}$ b) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin|z|}{z}$ $\dfrac{1.\cos|z|}{1}=1$

Çözüm:

a) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z}{1}=e^0=1$ (L'Hosp. ile)

b) $z=x$, $x\geq 0$ alalım. (pozitif reel eksen tarafından $z=0$ noktasına yaklaşalım.) $|z|=|x|=x$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin|z|}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$z=x$, $x<0$ alalım. (Negatif reel eksen tarafından) $|z|=|x|=-x$

olur.

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin|z|}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{x}=-1$$

Sonuç Limit yok.

13) Aşağıdaki fonksiyonların herbiri için öyle kümeler bulunuz ki fonksiyon bu kümede dif. bilir olsun.

a) $f(z)=Ln(z+i)$ b) $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+1}$ c) $f(z)=\sqrt{z-1}$

d) $f(z)=x^2-2ixy$ e) $f(z)=\cos\sqrt{z}$

a) $A=\{z \mid Re(z+i)\leq 0,\ Im(z+i)=0\}$

$z+i=x+i(y+1)$ dır. $x\leq 0,\ y+1=0$ dur.

o halde fonksiyon

$\mathbb{C}-\{z=x+iy \mid x\leq 0,\ y=-1\}$ kümesinde dif. bilir.

b) $e^{-z}+1=0$ $e^{-z}=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$

$\Rightarrow z=-i(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$ olur.

$\mathbb{C}-\{z \mid z=-i(\pi+2k\pi), k\in\mathbb{Z}\}$ kümesinde dif. bilir.

c) $f(z)=\sqrt{z-1}=e^{\frac{1}{2}Ln(z-1)}$ olduğundan $Ln(z-1)$ in dif. bilir olduğu yerlerde f dif. bilirdir. Çözüm (a) daki gibi.

d) $U=x^2,\ V=-2xy$

$U_x=2x$ $U_y=0,\ V_x=-2y\ ;\ V_y=-2x$

$U_x=V_y$ eşitliği $x=0$ için sağlanır.

$V_x=-U_y$ eşitliği $y=0$ için sağlanır.

o halde C-R. denklemleri $(0,0)$ noktasında sağlanır. Bu nokta dışında sağlanmaz. Fonksiyon $\{(0,0)\}$ kümesinde

~~dif. bilir~~

~~e) $\sqrt{z}=e^{\frac{1}{2}Ln z}$ olup $Ln z$ nin dif. bilir olduğu kümede dif. bilir.~~

14) $f(z) = y - ix$ fonksiyonunun dif. bilir olduğu kümeyi ve $f'(z)$ yi bulunuz.

$\boxed{\text{Çözüm:}}$ $u = y$, $V = -x$

$u_x = 0$, $u_y = 1$, $V_x = -1$, $V_y = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} u_x = V_y \\ V_x = -u_y \end{matrix}\right\}$ her (x,y) için sağlanır. Kısmi türevler de sürekliditr. O halde f, $\mathbb{C}$ de dif. bilir.

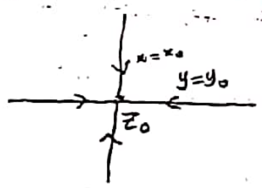
$$f'(z) = u_x + iV_x = 0 + i\cdot(-1) = -i \quad \text{olur.}$$

15) Aşağıdaki fonksiyonların hiç bir noktada diferansiyellenemediğini gösteriniz.

a) $f(z) = x$ b) $f(z) = 3ix$

$\boxed{\text{Çözüm:}}$

a) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x - x_0}{z - z_0}$$



$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad (y = y_0 \text{ doğrusu boyunca yaklaşım.})$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{x_0 - x_0}{i(y - y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{x_0 - x_0}{i(y - y_0)} = 0 \quad (x = x_0 \text{ doğ. boy. yakl.})$$

Sonuç: Hiç bir $z_0 \in \mathbb{C}$ de f dif. bilemez.

b) benzer. $u_x + iV_x = x + iy$

16) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$ b) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$, $z \neq -\frac{1}{2}$

c) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$ d) $f(z) = \dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}$, $z \neq 0$.

Çözüm:

a) $f'(z) = 6z - 2$ b) $f'(z) = \dfrac{1\cdot(2z+1) - 2\cdot(z-1)}{(2z+1)^2} = \dfrac{2}{(2z+1)^2}$

c) $f'(z) = 3(1-4z^2)^2\cdot(-8z)$ d) bölümün türevi ile

17) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini türev tanımı yardımı ile gösteriniz.

a) $f(z)=iz+2$ b) $f(z)=z^3$ c) $f(z)=e^{-x}\cdot e^{-iy}$

$\boxed{\text{Çözüm:}}$

$\boxed{a)}$ $f'(z)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{i(z+h)+2-iz-2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ih}{h}=i$

$\boxed{c)}$ $f(z)=e^{-x}\cdot e^{-iy}=e^{-(x+iy)}=e^{-z}$

$f'(z)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{-z-h}-e^{-z}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{-z}(e^{-h}-1)}{h}=e^{-z}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{-h}-1}{h}\ \left(\frac{0}{0}\right)$, L'Hosp. ile

$=e^{-z}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-e^{-h}}{1}=-e^{-z}$

18) Aşağıdaki fonksiyonların herbiri için öyle kümeler bulunuz ki fonksiyonlar bu kümede dif. bilir olsunlar. Fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(z)=\ln(e^z+1)$ b) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ c) $f(z)=\sin\sqrt{z}$

d) $f(z)=\sqrt{z^2-2}$

Çözüm:

a) $\operatorname{Re}(e^z+1)\leq 0$, $\operatorname{Im}(e^z+1)=0$

$e^z+1=e^x\cos y+1+i(e^x\sin y)$

$\operatorname{Im}(e^z+1)=0\Rightarrow e^x\sin y=0$ dan $e^x\neq 0$ olduğundan $\sin y=0$ dan $\Rightarrow y=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ bulunur.

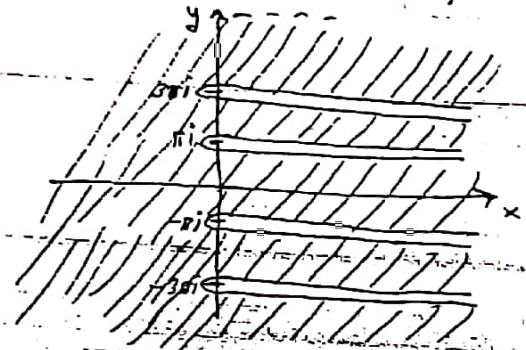
$e^x \cos y + 1 \leq 0$, $y = k\pi$ ise $e^x \cdot \cos k\pi \leq -1$ dır.

k tek ise $e^x \cdot (-1) \leq -1 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$ bulunur.

k çift ise $e^x \cdot 1 \leq -1$ olamaz.

Sonuç: $\mathbb{C} - \{ z = x+iy \mid x \geq 0, \ y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

~~kümesinde f analitiktir.~~ $f'(z) = \dfrac{e^z}{e^z+1}$ olur.



b) $e^z - 1 = 0$ yani $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ noktalarında f dif. bilemez. $f'(z) = \dfrac{0.(e^z-1) - e^z}{(e^z-1)^2} = \dfrac{-e^z}{(e^z-1)^2}$

c) $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} Ln z}$ olduğundan $Ln z$ nin dif. bilir olduğu yerlerde $\sin\sqrt{z}$ dif. bilirdir. $f'(z) = \cos\sqrt{z} \cdot \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{z^2-2} = e^{\frac{1}{2} Ln(z^2-2)}$ dir. $Ln(z^2-2)$ nin dif. bilir olduğu kümede dif. bilirdir.

$\Rightarrow x^2 - 2 \leq 0 \ (x^2 \leq 2)$

$z^2 - 2 = x^2 - y^2 - 2 + 2xyi$, $Re(z^2-2) = x^2 - y^2 - 2$, $Im(z^2-2) = 2xy$

$2xy = 0$

$2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ dır.

$x = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2 = -y^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow \cancel{y^2 \geq -2}$ $\forall y$ için doğrudur.

$(y \geq 0 \ y \leq 0)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2 = x^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$ olur.

$\boxed{\text{Sonuç}}$: $\mathbb{C} - \{ z = x+iy \mid y = 0, |x| \leq \sqrt{2} \} \cup \{ z \mid Re(z) = 0 \}$

$x = 0$

kümesinde dif. bilirdir. $f'(z) = \frac{1}{2}(z^2-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z$

Not: 2. öğretimde son derste eksik çözüldü lütfen düzeltin

19) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(z)=\frac{z}{1+z}$ b) $f(z)=e^{z^2+3z}$ c) $f(z)=\tan z$

d) $f(z)=\arcsin z$ e) $f(z)=\arctan z$ f) $f(z)=Ln(\cos^2 z)$

$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

Çözüm: R dekine benzer.

20) Aşağıdaki fonksiyonların dif bilecekleri kümeleri ve türevlerini bulunuz.

a) $f(z)=\sin(e^z)$ c) $f(z)=\cos(\bar{z})$

b) $f(z)=\sqrt{e^z+1}$

Çözüm:

a) e^z, $\sin z$ $\mathbb{C}$ de tam. Bileşkeleri de $\mathbb{C}$ de tam.

$f'(z)=\cos(e^z).e^z$

b) $Ln(e^z+1)$ in dif bileceği kümede dif bilir. Daha önce örnekleri yapıldı.

c) $h(z)=\bar{z}=x-iy$

$u=x$, $v=-y$ $u_x=1$, $v_y=-1$

her x,y için $u_x\neq v_y$ dir. $\mathbb{C}$ de türevi yok.

o halde $\cos(\bar{z})$ fonks. $\mathbb{C}$ de türevlenemez.

21) Aşağıdaki fonksiyonların reel ve sanal kısımlarının Cauchy Riemann denklemlerini gerçekleyip gerçeklemediğini göst.

a) $f(z)=z+\bar{z}$ b) $f(z)=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$

c) $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$ (ödev)

1

22) Aynı soru

a) $f(z) = 2x - 3y + i(3x + 2y)$ X

b) $f(z) = r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta$ X

c) $f(z) = -\dfrac{x}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{y}{x^2+y^2}$

d) $f(z) = -\dfrac{\cos\theta}{r} + i\,\dfrac{\sin\theta}{r}$ X

Çözüm

b) $u(r,\theta) = r^n \cos n\theta$, $v(r,\theta) = r^n \sin n\theta$

$u_r = n \cdot r^{n-1} \cos n\theta$, $v_\theta = n \cdot r^n \cos n\theta \Rightarrow u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ dır.

$v_r = n \cdot r^{n-1} \sin n\theta$, $u_\theta = -n \cdot r^n \sin n\theta \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$ dır.

digerleri ödev.

integralleri hesaplayınız.

Soru: $f(z)=1$ ve γ kompleks düzlemin a ve b noktalarını ①
birleştiren herhangi bir eğri olsun. $\int_\gamma f(z)dz=?$

Çözüm: integralin tanımına göre

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{l\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k-z_{k-1})$$

$\left[l=\max_{1\le k\le n} |\Delta z_k|, \ l_k \text{ ise } \gamma_k \text{ yaylarının uzunluğudur}. \ (\gamma_k = z_k - z_{k-1}) \right]$

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k-z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1}) = \cancel{z_1}-z_0+\cancel{z_2}-\cancel{z_1}+\dots+z_n-\cancel{z_{n-1}}$$
$$= z_n - z_0 = b-a.$$

$$\lim_{l\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k-z_{k-1}) = b-a.$$

olur. Dolayısıyla $\int_\gamma f(z)dz = b-a.$ dır.

Soru: $f(z)=z$ ve γ baş. nok. a ve bitim nok. b olan herhangi bir komp düzlem eğrisi olsun.

Çöz: $f(z)=z$ sürekli olduğundan $\int_\gamma f(z)dz$ integrali mevcuttur.
Ayrıca bu integral γ eğrisinin $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ parçalanmasından $\gamma_k = z_k - z_{k-1}$ yayları üzerinden seçilen c_k noktadan bağımsızdır.

$$\int_\gamma z dz = \lim_{l\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k-z_{k-1}) = S$$

diyelim.

İntegralin bu değeri c_k noktanın seçiminden bağımsız olduğundan öncelikle $\boxed{c_k = z_{k-1}}$ seçelim. Bu durumda

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} z_{k-1} \cdot (z_k - z_{k-1})$$

olur. Benzer şekilde. $\boxed{c_k = z_k}$ seçersek,

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} z_k (z_k - z_{k-1}).$$

dır.

$$\int_\gamma z\,dz = \lim_{\lambda \to 0} S_1 \quad \text{ve} \quad \int_\gamma z\,dz = \lim_{\lambda \to 0} S_2.$$

olduğundan.

$$\int_\gamma z\,dz = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} [S_1 + S_2].$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - z_{k-1}^2).$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \left(\cancel{z_1^2} - z_0^2 + z_2^2 - \cancel{z_1^2} + \cdots + z_n^2 - \cancel{z_{n-1}^2} \right)$$

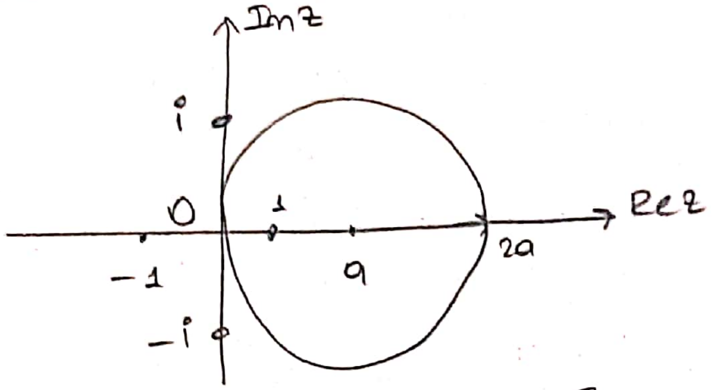
$$= \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

elde edilir.

c) $a>1,\ a\in\mathbb{R}$ a ü

$$\int_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz = ?$$

Çözüm: $z^4-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$



$$\int_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1} = \int_{|z-a|=a} \frac{\frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)}}{(z-1)}\,dz$$

$$\overset{\text{C.i.f.}}{=} \cancel{2}\pi i\,\frac{1}{\cancel{2}(1-i)(1+i)} = \frac{\pi i}{2}$$

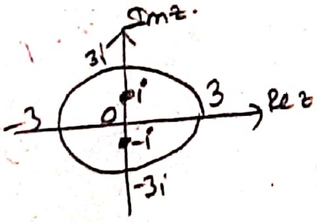
---

d) $\gamma: |z|=3$ çemberi ve $t>0$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

Çözüm:



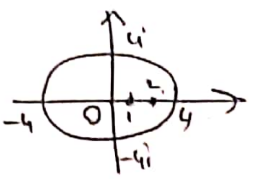
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = -\frac{1}{\cancel{2\pi i}}\cdot\frac{\cancel{2\pi i}}{2i}\int_\gamma \frac{e^{zt}}{z+i}\,dz + \frac{\cancel{2\pi i}}{\cancel{2\pi i}}\cdot\frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{e^{zt}}{z-i}\,dz$$

$$\overset{\text{C.i.f.}}{=} -\frac{1}{2i}\cdot e^{-it} + \frac{1}{2i}\cdot e^{it}$$

$$= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \underline{\underline{\sin t}}$$

e) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}\,dz$

Çözüm:



$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = -\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$

olduğundan.

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}\,dz = \oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{z-2}\,dz - \oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{z-1}\,dz$$

dir. $f(z)=\sin\pi(z+1)+\cos\pi z$ fonksiyonu $|z|=4$ çemberi içinde ve üzerinde analitik ve $z_1=1$, $z_2=2$ bu çemberin içinde olduğundan Cauchy integral formülü gereği

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}\,dz = 2\pi i.\left(f(1)+f(2)\right)$$

$$= 2\pi i\left[\left(\overset{0}{\sin 2\pi} + \cos\pi\right) + \left(\sin 3\pi + \cos 2\pi\right)\right]$$

$$= 2\pi i\,(+1+1) = \underline{\underline{4\pi i}}$$

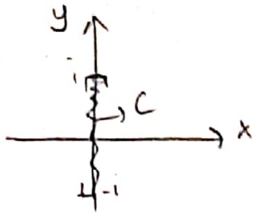
Soru: a) $C=[-i,i]$

b) $C=\{|z|\leq 1,\ Re\,z\geq 0\}$ ters saat yönünde yönlendirilmiş yarı çember olmak üzere.

$$\int_C |z|dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: a)

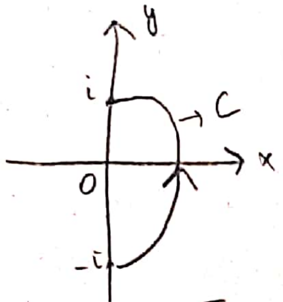


$z=it,\ -1\leq t\leq 1.$

$|z|=|t|$

$$\int_C |z|dz=\int_{-1}^{1}|t|dt=-\int_{-1}^{0}t\,dt+\int_0^1 t\,dt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=0$$

b)



$z=e^{it},\ -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}.$

$dz=ie^{it}dt$

$$\int_C |z|dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|e^{it}|\,ie^{it}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}i\,e^{it}dt=e^{it}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=i-(-i)=2i$$

SORU: $\displaystyle\int_{|z|=1}|z-1||dz|=?$

$\sin\frac{t}{2}$ olduğundan $0\leq\frac{t}{2}<\pi$ olur. Böylece $|\sin\frac{t}{2}|=\sin\frac{t}{2}$ dir.

Çözüm: $z=e^{it},\ 0\leq t\leq 2\pi$ $(+7,0)$

$dz=ie^{it}dt\ \Rightarrow\ |dz|=|dt|.$

$$\int_{|z|=1}|z-1|\,|dz|=\int_0^{2\pi}|e^{it}-1|\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos t-1)^2+\sin^2 t}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}|\sin\tfrac{t}{2}|dt=2\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{t}{2}dt=-4\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4.(\cos\pi-1)$$

$$=8$$

Soru! $C=[0,i]$ olsun. $\int_C z\sin z\,dz = ?$

Çözüm! $z=it \quad , \quad 0\le t\le 1$

$$\int_C z\sin z\,dz = \int_0^1 it\sin(it)\,i\,dt = -i\int_0^1 t\,\mathrm{sh}t\,dt$$

$$= -i\int_0^1 t\,d(-\mathrm{ch}t) = -i\left[-t\,\mathrm{ch}t\Big|_0^1 + \int_0^1 \mathrm{ch}t\,dt\right]$$

$$= -i\left[-1\cdot \mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}t\Big|_0^1\right] = -i\left[-\mathrm{ch}1+\mathrm{sh}1\right]$$

$$= i\left[\mathrm{sh}1-\mathrm{ch}1\right] = i\left[\frac{e^1-e^{-1}}{2} - \frac{e^1+e^{-1}}{2}\right]$$

$$= \underline{\underline{-ie^{-1}}}$$

Soru! $f(z)$, $z=z_0$ noktasının bir komşuluğunda sürekli bir fonksiyon olsun. $C^+=\{z : |z-z_0|=\rho\}$ poz. yönlü çember olu.

$$\lim_{\rho\to 0}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(z)$, $z=z_0$ nok.nın bir komşuluğunda sürekli olduğundan $\forall \varepsilon>0$, $\exists K(z_0,\delta)=\{z : |z-z_0|<\delta\}$ $(\delta<\rho)$ var $\exists$ $\forall z\in K(z_0,\delta)$ için $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ dur. Buradan.

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_C \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \underbrace{\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{J_1} + \underbrace{\int_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{J_2}$$

$$|J_1| = \left| \int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \int_C \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} |dz|$$

$$< \varepsilon . \int_C \frac{|dz|}{\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho} . 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Böylece $\boxed{|J_1| < 2\pi\varepsilon}$ dur.

$$\int \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$$

Şimdi de J_2 ifadesini inceleyelim.

$$J_2 = \int_C \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \int_C \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0).2\pi i$$

Böylece $\rho \to \infty$ $\rho > \delta$ iken $\lim_{\rho \to \infty} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = J_1 + 2\pi i f(z_0)$

bulduk.

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = |J_1| < 2\pi\varepsilon.$$

Yani $\lim_{\rho \to \infty} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$

dır.

Soru: $C_a = [a, a+1]$ olsun. $f(z)$ tüm genişletilmiş kompleks düzlemde sürekli fonk ise $\lim_{a \to \infty} \int_{C_a} f(z) dz = f(\infty)$ olduğunu gösteriniz.

$z \in C_a$, $z = a + (a+1-a).t$, $0 \leq t \leq 1$
$= a + t$, $0 \leq t \leq 1$

$dz = dt$

Çözüm: I. YOL