9.6 Fourier Serileri

Bu kesimde matematiğin birçok dallarında ve uygulamalı alanlarında sık sık kullanılan trigonometrik Fourier Serileri tanıtılacak ve bu serilerin yakınsaklığı üzerine belli olan bazı yakınsaklık testleri üzerinde duracağız.

Tanım 9.6.1 : *$a_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $b_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $u_0(x) = \frac{1}{2}a_0$, $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olmak üzere*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{9.54}$$

*biçimindeki fonksiyon seriye **trigonometrik seri** adı verilir.*

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{9.55}$$

*fonksiyonlar sistemine **trigonometrik sistem,** $a_n(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $b_n(n = 1, 2, \ldots)$ sayılarına da (9.55) serilerinin katsayıları denir.*

Lemma 9.6.2 : *(9.55) trigonometrik fonkiyonları*

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, m \neq n, m, n = 0, 1, 2, \ldots;$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, m \neq n, m, n = 1, 2, \ldots;$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, m, n = 0, 1, 2, \ldots;$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, n = 1, 2, \ldots$

özelliklere sahiptir.

İspat: (a), (b), (c) ve (d) eşitliklerinin doğruluğu Örnek 6.4.11 de verilmiştir.
□

Teorem 9.6.3 : *Eğer, (9.54) serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak ve toplamı $f(x)$ ise, yani*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in \mathbb{R} \tag{9.56}$$

ise

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, \ldots \qquad (9.57)$$

dir.

İspat: (9.56) eşitliğinin sağ yanındaki seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğuna göre, Teorem 9.3.23 gereğince bu seri $[-\pi, \pi]$ üzerinde terim terime integrallenebilirdir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)dx \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx [\text{Lemma 9.6.2 den}] \\ &= \pi a_0 \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\end{aligned}$$

bulunur.

(9.56) eşitliğinin her iki yanı $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı $\cos mx$(veya $\sin mx$) fonksiyonu ile çarpıldığında elde edilen eşitliğin sağ yanındaki seri de $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak kalacaktır. Elde edilen bu eşitliğin her iki yanının $[-\pi, \pi]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx\right)dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx$$

$$[\text{Lemma 9.6.2 den}] = \pi a_m \Longrightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$$

bulunur.

Benzer şekilde, $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx$ eşitliğinin doğru olduğu ispatlanabilir. □

Not: Eğer, (9.56) eşitliğinin sağ yanındaki seri $\mathbb{R}$ üzerinde (noktasal) yakınsak ise bu serinin toplamı olan f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyotlu bir fonksiyon olduğu açıktır. •

Tanım 9.6.4 *: Eğer, bir f fonksiyonu için $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$ integralleri mevcut ise, $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $b_n (n = 1, 2, \ldots)$ f nin (9.57) ile tanımlanan Fourier katsayıları olmak üzere $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ biçimindeki trigonometrik seriye f fonksiyonunun* ***Fourier serisi (veya açılımı)*** *denir.*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{9.58}$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 9.6.5 *: Kapalı ve sınırlı $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması verilsin. Eğer,*

(1) Her $[\zeta, \eta] \subset (x_{k-1}, x_k)(k = 1, 2, \ldots, n)$ aralığı için $f \in \mathcal{R}[\zeta, \eta]$;

(2) $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, k = 1, 2, \ldots, n$ integralleri mutlak yakınsaktır

koşulları sağlanıyorsa, f, $[a, b]$ üzerinde ***mutlak integrallenebilirdir*** *denir. Bu durumda, f nin $[a, b]$ üzerindeki integrali*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

tanımı ile verilir.

Not: Eğer, f fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ üzerinde mutlak integrallenebilir ise, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için

$$|f(x)\cos nx| \leq |f(x)|, |f(x)\sin nx| \leq |f(x)|$$

eşitsizliklerinden $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx (n = 1, 2, \ldots)$ integrallerinin de mutlak yakınsak oldukları görülmektedir. Demek ki, $[-\pi, \pi]$ üzerinde mutlak integrallenebilir her $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için (9.57) ile verilen ifadeler anlam taşımaktadır. •

Fourier serileri ile ilgili esas problemler şunlardır:

(a) (9.58) bağıntısının sağ yanındaki seri hangi koşullar altında yakınsaktır?

(b) Hangi koşullar altında bu seri, aynı bağıntının sol yanındaki $f(x)$ fonksiyonuna eşittir.

Bu problemlerin genel cevapları Reel Analizde öğretilen Lebesque integrasyon teorisine dayanmaktadır. Biz burada bu konuya girmeyip Fourier Serilerinin noktasal yakınsaklığını ve bu yakınsamanın karakterini belirleyen basit koşulları inceleyeceğiz.

Tanım 9.6.6 : *$a_k(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $b_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ reel sabit sayılar olmak üzere*

$$\begin{aligned} T(t) &= \tfrac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \\ &= \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt \end{aligned} \tag{9.59}$$

biçimindeki ifadelere tcinsinden trigonometrik polinom veya trigonometrik toplam denir.

$a_n^2 + b_n^2 > 0$ (yani, a_n ve b_n sayılarından hiç değilse bir tanesi sıfırdan farklı) ise $T(t)$ polinomu n. derecedendir denir ve $T_n(t)$ ile gösterilir.

Tanım 9.6.7 : *f, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyotlu herhangi bir fonksiyon olsun. $a_n(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $b_n(n = 1, 2, \ldots)$ sayıları f nin (9.57) ile tanımlanan Fourier katsayıları olmak üzere*

$$S_n(x) = S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{9.60}$$

şeklinde n. dereceden trigonometrik polinoma f nin ***n. dereceden Fourier polinomu*** *veya f nin* ***Fourier serisinin n. dereceden kısmi toplamı*** *denir.*

Lemma 9.6.8 : : *Her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için*

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in Z\} \textit{ ise}, \\ n + \frac{1}{2}\ , \ t \in \{2k\pi : k \in Z\} \textit{ ise} \end{cases} \tag{9.61}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in Z\}$ için

$$\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cos\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

olduğuna göre $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in Z\}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cos\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{n+1}{2}t\cos\frac{n}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $\forall k \in \mathbb{Z}$ için

$$\lim_{t\to 2k\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt\right) = n + \frac{1}{2}$$

olduğu açıktır. □

Lemma 9.6.9 : *f, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyotlu bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f nin Fourier serisinin n. kısmi toplamı için, $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} S_n(f;x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]D_n(t)dt \end{aligned} \tag{9.62}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: (9.57) formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt \cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt \sin kx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt dt \sin kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(t-x) dt \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ olduğuna göre (9.57) dikkate alındığında (9.60) tan

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(t-x) dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t-x)]dt \text{ [(9.61) den]}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt[t-x=u \text{ denirse}]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)D_n(u)du$$

[integrant 2π periyotlu bir fonksiyon olduğundan]

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du[u=t \text{ denirse}]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt[\text{6. Bölüm, Problem (26)(a)dan }]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+t)D_n(t) + f(x-t)D_n(-t)]dt[D_n(-t) = D_n(t) \text{ olduğundan }]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]D_n(t)dt \; \square$$

Not: Teoremdeki $D_n(t)$ fonksiyonuna Dirichlet çekirdeği, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$ integraline de Dirichlet İntegrali adı verilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ olduğu açıktır. •

Teorem 9.6.10 ***(Riemann):*** *Kapalı ve sınırlı $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında mutlak integrallenebilen her $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b g(u)\cos pu du = \lim_{p\to\infty} \int_a^b g(u)\sin pu du = 0$$

dır.

İspat: Önce, teoremi $g \in \mathcal{R}[a,b]$ durumunda ispatlıyalım.

$[a,b]$ aralığının bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması verilsin. $g \in \mathcal{R}[a,b]$ $\Longrightarrow g$ $[a,b]$ aralığında sınırlıdır. $\Longrightarrow m_k(g) = \inf\{g(u) = x_{k-1} \leq u \leq x_k\}$ ve $M_k(g) = \sup\{g(u) = x_{k-1} \leq u \leq x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sayıları sonludur ve $\forall u \in [x_{k-1}, x_k]$ için

$$g(t) - m_k(g) \leq M_k(g) - m_k(g) = \omega_k(g), k = 1, 2, \ldots, n$$

olduğu açıktır. Üstelik $p > 0$ ve $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos pu \; du \right| = \left| \frac{\sin px_k - \sin px_{k-1}}{p} \right| \leq \frac{2}{p}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(u) \cos pu du &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(u) \cos pu \; du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [g(u) - m_k(g)] \cos pu \; du + \sum_{k=1}^{n} m_k(g) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos pu \; du \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$p > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b g(u) \cos pu du \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(u) - m_k(g)| |\cos pu| \; du + \sum_{k=1}^{n} |m_k(g)| \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\cos pu| \; du \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} w_k(g) \triangle x_k + \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{n} |m_k(g)|
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$g \in \mathcal{R}[a,b] \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_0 = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $[a,b]$ nin $\|P\| < \delta$ olacak biçimde her $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(g) \triangle x_i < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Öte yandan, $\lim\limits_{p \to \infty} \frac{1}{p} = 0$ olduğuna göre $\exists p_0 = p(\varepsilon) > 0$ öyleki, $\forall p \geq p_0$ için

$\frac{2}{p}\sum\limits_{k=1}^{n}|m_k(g)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Demek ki, $[a,b]$ nin $\|P\| < \delta_0$ olacak şekilde her $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması ve $\forall p \geq p_0$ için

$$\left|\int_a^b g(u)\cos pu du\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu da, $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^b g(u)\cos pu du = 0$ olması demektir.

Benzer şekilde, $g \in \mathcal{R}[a,b]$ durumunda $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_a^b g(u)\sin pu du = 0$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi, g fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde mutlak integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan, g nin $[a,b]$ aralığında, örneğin, yalnızca bir $x = b$ noktasında sınırsız olduğunu gözönüne alalım.
Her $\eta \in (0, b-a)$ için

$$\int_a^b g(u)\cos pu du = \int_a^{b-\eta} g(u)\cos pu\, du + \int_{b-\eta}^b g(u)\cos pu\, du$$

olduğu açıktır. Her $\eta \in (0, b-a)$ için $\int\limits_{b-\eta}^b |g(u)|du$ integrali yakınsak (Hiç değilse Has olmayan integral anlamında) olduğuna göre $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta_0 \in (0, b-a)$ öyle ki $\forall p > 0$ için

$$\left|\int_{b-\eta_0}^b g(u)\cos pu\, du\right| \leq \int_{b-\eta_0}^b |g(u)|du < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Yukarıda gösterildiği gibi

$g \in \mathcal{R}[a,b] \Longrightarrow \exists p_0 = p(\varepsilon) > 0$ öyle ki $\forall p \geq p_0$ için $\left|\int\limits_a^{b-\eta_0} g(u)\cos pu\, du\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılabilir.

Buna göre, $\forall p \geq p_0$ için

$$|\int_a^b g(u)\cos pu du| \leq |\int_a^{b-\eta_0} g(u)\cos pu\, du| + |\int_{b-\eta_0}^b g(u)\cos pu\, du|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies$$

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^b g(u)\cos pu du = 0$$

dır. Benzer şekilde, $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_a^b g(u)\sin pu du = 0$ olduğu ispatlanabilir. □

Sonuç 9.6.11 *:$[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir bir $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun (9.57) ile verilen Fourier katsayılarının $n\to\infty$ iken limitleri sıfırdır, yani*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = 0$$

dır.

Şimdi, $[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir 2π periyodlu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $(S_n(f;x))$ Fourier kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklık durumunun bu fonksiyonun x noktası çevresinde aldığı değerlere bağlı olduğunu görelim. Şu lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 9.6.12 *: Eğer, f fonksiyonu $[0,a]$ $(0<a<2\pi)$ aralığında mutlak integrallenebilir ise, herhangi $\delta\in(0,a]$ için*

$$\int_0^\delta \frac{|f(t)|}{t}dt \ \text{ve}\ \int_0^\delta \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

integrallerinin karakterleri aynıdır.

İspat: f ,$[0,a]$ aralığında mutlak integrallenebilir olduğuna göre $\exists\delta\in(0,a]$ öyle ki, herhangi $\zeta\in(0,\delta]$ için $f\in\mathcal{R}[\zeta,\delta]$ olur.

$\frac{1}{t},\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\in\mathcal{C}[\zeta,\delta]\Longrightarrow\frac{1}{t},\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\in\mathcal{R}[\zeta,\delta]$ ve $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}=1$ olduğuna göre,

$$t\to0^+ \text{ iken } \frac{|f(t)|}{t}\sim\frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}$$

olur. O halde, Has olmayan integraller için karşılaştırma testinden lemmada adı geçen integrallerin karakterleri aynıdır. □

Teorem 9.6.13 : *2π periyotlu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir ise, onun $(S_n(f;x))$ Fourier kısmi toplamlar dizisinin herhangi bir $x\in\mathbb{R}$ noktasında $n\to+\infty$ iken yakınsak ya da ıraksak olması f nin bu noktanın komşuluğunda aldığı değerlere bağlıdır.*

İspat: (9.62) ile verilen $S_n(f;x)$ fonksiyonu $0<\delta\le\pi$ için

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt$$

şeklinde yazılabilir.

Sabit x için

$$g(t)=\begin{cases}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta\le t\le\pi \text{ ise},\\ 0, & 0<t<\delta \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. O halde,

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$

yazılır. $g(t)\sin\frac{t}{2}$ ve $g(t)\cos\frac{t}{2}$ fonksiyonları $[0,\pi]$ üzerinde mutlak integrallenebilir olacağından Teorem 9.6.11 gereğince $\forall\delta\in(0,\pi]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt=0$$

olur.

Demek ki, $(S_n(f;x))$ dizisinin incelenmesi problemi yeteri kadar küçük $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt$$

integralinin incelenmesine dönüştürülür. Bu integralde f nin yalnızca x noktasının $(x-\delta, x+\delta)$ komşuluğunda aldığı değerler bulunduğundan söylenen teoremin doğru olduğu anlaşılır. □

Sonuç 9.6.14 : *$[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir 2π periyodlu f ve g fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer, f ve g fonksiyonları x noktasının yeteri kadar küçük bir $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ komşuluğunda eşit ise, bu fonksiyonların Fourier serileri x noktasında yakınsak ya da ıraksaktır. Yakınsaklık durumunda bu serilerin x noktasında toplamları aynıdır.*

$[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir bir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun (9.58) ile verilen Fourier serisi bir $x\in[-\pi,\pi]$ noktasında yakınsak ve toplamı $S(x)$ olsun, yani $x\in[-\pi,\pi]$ için

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{9.63}$$

olsun.

$$S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2S(x)D_n(t)dt$$

olduğuna göre $F_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2S(x)$ olmak üzere (9.62) den

$$S_n(f,x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F_x(t)D_n(t)dt \tag{9.64}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 9.6.15 *: $[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir 2π periyodlu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ile ilgili olan (9.58) Fourier serisinin bir $x\in[-\pi,\pi]$ noktasında $S(x)$ 'e yakınsaması için gerek ve yeter koşulun, sabit bir $\delta\in(0,\pi)$ sayısı için*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}F_x(t)D_n(t)dt=0 \tag{9.65}$$

olmasıdır.

İspat: (9.64) den herhangi bir $\delta\in(0,\pi)$ sayısı için

$$S_n(f,x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}F_x(t)D_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F_x(t)D_n(t)dt \tag{9.66}$$

biçiminde yazılabilir.

$$F_x(t)D_n(t)=\frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\sin nt+\frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\cos nt$$

ve sabit bir $\delta\in(0,\pi)$ sayısı için $\frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}$ ve $\frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}$ fonksiyonları $[\delta,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir olduklarından Teorem 9.6.10 gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}F_x(t)D_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{\delta}^{\pi}\frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt+\int_{\delta}^{\pi}\frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt\Big)=0$$

olacaktır. Buna göre, (9.66) dan

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(f,x)-S(x)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}F_x(t)D_n(t)dt$$

olduğu anlaşılır. Buradan da Teoremde istenen sonucun doğru olduğu görülür.□

Teorem 9.6.16 *(Dini Testi): $[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Fourier serisinin bir $x\in[-\pi,\pi]$ noktasında*

$S(x)$ 'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul sabit bir $\delta \in (0,\pi)$ sayısı için $F_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)$ olmak üzere

$$\int_0^\delta \frac{|F_x(t)|}{t} dt \tag{9.67}$$

integralinin yakınsak olmasıdır.

İspat: Lemma 9.6.12 den dolayı sabit bir $\delta \in (0,\pi)$ sayısı için

$$\int_0^\delta \frac{|F_x(t)|}{t} dt \text{ ve } \int_0^\delta \frac{|F_x(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

integrallerinin karakterleri aynıdır, yani

$$\int_0^\delta \frac{|F_x(t)|}{t} dt \text{ yakınsaktır (ıraksaktır)} \Longleftrightarrow$$

$$\int_0^\delta \frac{|F_x(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \text{ yakınsaktır (ıraksaktır).}$$

Buna göre, sabit bir $\delta \in (0,\pi)$ sayısı için (9.67) ile verilen integral yakınsak ise

$$\int_\delta^\delta \frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{t}{2} \cos nt \; dt (n = 1,2,\ldots) \text{ ve } \int_\delta^\delta \frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{t}{2} \sin nt \; dt (n = 1,2,\ldots)$$

integralleri de yakınsaklardır. O halde, Teorem 9.6.10 gereğince

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\delta F_x(t) D_n(t) dt &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\delta^\delta \frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{t}{2} \cos nt \; dt + \int_\delta^\delta \frac{F_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{t}{2} \sin nt \; dt \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan da, Teorem 9.6.15 gereğince Teoremde istenen sonucun doğru olduğu görülür. □

$[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir 2π periyodlu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

(a) x noktası f nin süreklilik noktası olduğu durumda $S(x) = f(x)$,

(b) x noktası f nin 1. çeşit süreksizlik noktası olduğu durumda $S(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$,

(c) f fonksiyonu x noktasında sürekli ve bu noktada sırasıyla sonlu $f\,'(x^+)$ ve $f\,'(x^-)$ sağ ve sol türevleri mevcut olduğu durumda $S(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$,

(d) x noktası f nin 1. çeşit süreksizlik noktası ve bu noktada sonlu

$$\begin{aligned} f\,'_-(x^-) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}, \\ f\,'_+(x^+) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \end{aligned} \tag{9.68}$$

limitleri mavcut olduğu durumda $S(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ olsun.

(a) durumunda $F_x(t) = f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)$, (b),(c) ve (d) durumlarında $S(x) = f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)$ olduğu açıktır. Buna göre, (a) durumunda

$$\int_0^\delta \frac{F_x(t)}{t}dt = \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)|}{t}dt$$

(b),(c) ve (d) durumlarında ise

$$\int_0^\delta \frac{F_x(t)}{t}dt = \int_0^\delta \frac{|f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)|}{t}dt$$

yazılabilir.

Eğer, herhangi bir sabit $\delta \in (0,\pi)$ sayısı için (a) durumunda

$$\int_0^\delta \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t}dt, \quad \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t}dt \tag{9.69}$$

integralleri ve (b),(c) ve (d) durumlarında

$$\int_0^\delta \frac{|f(x-t)-f(x^-)|}{t}dt, \quad \int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x^+)|}{t}dt \tag{9.70}$$

integralleri yakınsak ise (9.67) ile verilen integral yakınsaktır.

Yukarıda söylenenleri dikkate aldığımızda Teorem 9.6.16'nın hipotezleri sağlanmak üzere aşağıdaki sonuçların doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 9.6.17 : *Eğer, x noktası f nin süreklilik noktası ve $\delta \in (0,\pi)$ sayısı için (9.69) integralleri yakınsak ise, f fonksiyonunun Fourier serisi x noktasında yakınsak ve toplamı $f(x)$ dir.*

Sonuç 9.6.18 ***(Lipschitz Testi)***: *$x \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\delta \in (0,\pi)$ herhangi sayı olmak üzere her $t \in (t-\delta, t+\delta)$ için*

$$|f(x+t)-f(x)| \leq M|t|^\alpha \tag{9.71}$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1]$ ve $M > 0$ sabit sayıları mevcut olsun (Lipschitz koşulu). Bu durumda, f fonksiyonunun Fourier serisi x noktasında yakınsak ve toplamı $f(x)$ dir.

Gerçekten, $x \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için (9.70) koşulu sağlandığında $\forall t \in (0,\delta)$ için

$$|f(x-t)-f(x)| \leq M.t^\alpha \text{ ve } |f(x+t)-f(x)| \leq M.t^\alpha$$

eşitsizlikleri sağlandığından ve bu durumda (9.69) integralleri yakınsak olduklarından dolayı ($\int_0^\delta \frac{t^\alpha}{t}dt = \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty$) Sonuç 9.6.17 den istenen sonucun doğru olduğu anlaşılır.

Sonuç 9.6.19 : *Eğer, x noktası f nin 1. çeşit süreksizlik noktası ve herhangi bir $\delta \in (0,\pi)$ sayısı için (9.70) integralleri yakınsak ise, f fonksiyonunun Fourier serisi x noktasında yakınsak ve toplamı $\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$ sayısına eşittir.*

Not: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $-\pi$ noktasında süreksiz ise periyodik olmasının sonucu olarak, π noktasında da süreksizdir. Bu durumda Sonuç 9.6.18 gereğince f fonksiyonunun Fourier serisi $-\pi$ veya π noktalarında yakınsak ve toplamı $\frac{1}{2}(f(\pi^+) + f(\pi^-))$ sayısına eşittir. •

Sonuç 9.6.20 : *f fonksiyonu x noktasında sürekli ve bu noktada sonlu $f\,'(x^+)$ ve $f\,'(x^-)$ türevleri mevcut olsun. Eğer, herhangi bir $\delta \in (0, \pi)$ sayısı için (9.69) integralleri yakınsak ise, f fonksiyonunun Fourier serisi x noktasında yakınsak ve toplamı $f(x)$ dir.*

Sonuç 9.6.21 : *f fonksiyonu x noktasında süreksiz ve bu noktada $f(x^-)$ ve $f(x^+)$ limitleri ve $f'_-(x^-)$ ve $f'_+(x^+)$ türevleri mevcut olsun. Eğer, herhangi bir $\delta \in (0, \pi)$ sayısı için (9.70) integralleri yakınsak ise, f fonksiyonunun Fourier serisi x noktasında yakınsak ve toplamı $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ sayısına eşittir.*

Tanım 9.6.22 : *Kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında tanımlı $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer, $[a, b]$ aralığının*

(1) f fonksiyonu (x_{k-1}, x_k) aralıkları üzerinde türevlenebilir,

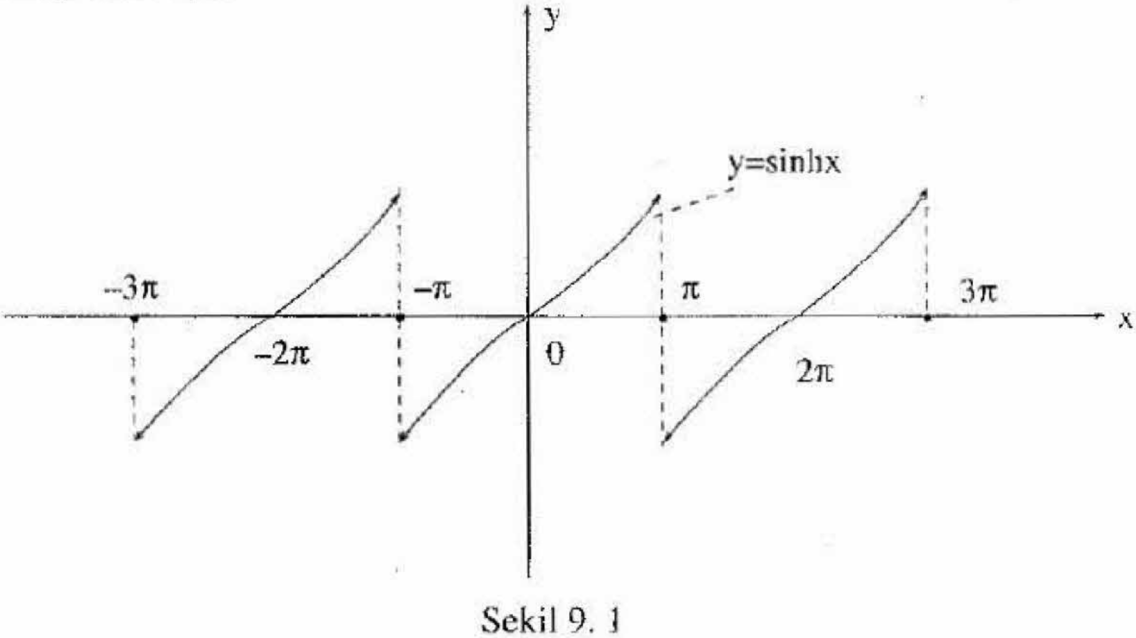
(2) x_{k-1} ve x_k noktalarında sonlu $f(x_{k-1}^+)$, $f(x_k^-)$ limitleri ve (9.68) tanımı ile sonlu $f\,'_+(x_{k-1}^+)$, $f\,'_-(x_k^-)$ türevleri mevcut olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması varsa, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde parçalı türevlenebilirdir denir.

Sonuç 9.6.23 : *$[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı türevlenebilir f fonksiyonun Fourier serisi her $x \in (-\pi, \pi)$ noktasında $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ sayısına, $x = -\pi$ veya $x = \pi$ noktalarında ise $\frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-))$ sayısına yakınsaktır.*

İspat: Gerçekten, f fonksiyonunu $[-\pi, \pi]$ aralığından $\mathbb{R}$ üzerine periyodik (yani, $f(x + 2\pi) = f(x)$ olacak şekilde) olarak genişletirsek elde edilen fonksiyon (bu fonksiyona da f diyelim) için Sonuç 9.6.21'in hipotezleri sağlanacaktır. Dolayısıyla, her $x \in (-\pi, \pi)$ noktasında f fonksiyonun Fourier serisi yakınsak ve toplamı $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ sayısına eşit olacaktır. $x = \pm\pi$ noktalarında ise, örneğin, $x = \pi$ noktasında f nin periyodikliğine göre $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$ olduğundan, f fonksiyonun Fourier serisi $x = \pi$ noktasında yakınsak ve toplamı $\frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-))$ sayısına eşittir. □

Örnek 9.6.24 : : $f(x) = \sinh x$ *fonksiyonunun Fourier serisini yazınız.*

Çözüm: $f(x) = \sinh x$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında sürekli türevlenebilirdir. Buna göre, Sonuç 9.6.23den bu fonksiyonun Fourier serisi her $x \in \mathbb{R}$ noktasında yakınsak ve toplamı olan $S(x)$ fonksiyonu 2π periyodlu bir fonksiyondur. Bir de, $x \in (-\pi, \pi)$ noktasında $S(x) = \sinh x$ ve $x = -\pi$ veya $x = \pi$ noktalarında $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(\sinh(-\pi^+) + \sinh(\pi^-)) = 0$ dır. Şekil 9.1'de $f(x) = \sinh x$ fonksiyonunun Fourier serisinin $S(x)$ toplam fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Sekil 9. 1

Şimdi, $f(x) = \sinh x$ fonksiyonunun Fourier serisini bulalım. Her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\sinh x . \cos nx$ fonksiyonu tek olduğundan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh x . \cos nx \; dx = 0$$

ve her $n = 1, 2, \ldots$ için $\sinh x . \sin nx$ fonksiyonu çift olduğundan dolayı

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh x . \sin nx \; dx = (-1)^n \frac{2n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$$

bulunur. Buna göre, $x \in (-\pi, \pi)$ için

$$\sinh x \sim \frac{2\sinh \pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{1+n^2}\sin nx$$

olduğu elde edilir. Bu seri $[-\pi, \pi]$ aralığında sürekli olmasına rağmen toplamı bu aralığın uç noktalarında süreksizdir. $\diamond$

Örnek 9.6.25 : *$f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.*

Çözüm: Her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $x . \cos nx$ fonksiyonu tek olduğundan

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x . \cos nx \; dx = 0$$

dır. Her $n = 1, 2, \ldots$ için $x . \sin nx$ fonksiyonu çift olduğundan dolayı

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x . \sin nx \; dx = a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x . \sin nx \; dx$$

$$[u = x \;,\; \sin nx \; dx = dv \;\; \text{dersek} \; du = dx, v = -\frac{1}{n}\cos nx$$

olduğuna göre kısmi integrasyondan]

$$= -\frac{2x}{\pi n}\cos nx \,\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi} \cos nx \; dx = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

bulunur. Demek ki, $[-\pi, \pi]$ aralığında

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx \tag{9.72}$$

dır. $f(x) = x$ fonksiyonunu $(-\pi, \pi)$ açık aralığından $\mathbb{R}$ üzerine periyodik olarak geenişletirsek (9.72) serisi bu yeni fonksiyonun Fourier serisi olacaktır.

O halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx = \begin{cases} x, |x| < \pi & \text{ise,} \\ 0, |x| = \pi & \text{ise.} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. Özel olarak, buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. ◦

Örnek 9.6.26 *: $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $|\alpha| < 1$ olsun. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\alpha x$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.*

Buna göre, $|x| < 1$ için

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2})$$

olduğunu gösteriniz (Bkz. Bölüm 8, Problem (60)(a)).

Çözüm: (9.57) ifadelerine göre $\cos\alpha x$ fonksiyonunun Fourier katsayılarını hesaplayalım:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x.\cos nx\ dx = \frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi}.\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x.\sin nx\ dx = 0$$

Demek ki, her $x \in [-\pi, \pi]$ noktasında

$$\cos\alpha x = \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos\alpha x)$$

Buradan $x = \pi$ olduğunda

$$\cot \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \tag{9.73}$$

bulunur.

$$|\alpha| \leq \alpha_0 < 1 \Longrightarrow |\frac{1}{\alpha^2 - n^2}| \leq \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$$

ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$ serisi yakınsak olduğuna göre (9.73) eşitliğinin sağ yanındaki seri α ya göre her $[\alpha_0, \alpha]$ $(0 < \alpha_0 < 1)$ aralığında terim terime integrallenebilir. Buna göre, her $x \in (-1, 1)$ için

$$\int_0^x (\cot \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha}) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2\alpha \, d\alpha}{\alpha^2 - n^2} \Longrightarrow$$

$$\ln \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \ln|\alpha^2 - n^2|\Big|_0^x \Longrightarrow$$

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2}) \Longrightarrow \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$$

elde edilir. $\diamond$

Uyarı 9.6.27 *$2L$ periyotlu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = \frac{\pi x}{L}$ değişken değiştirmesi yardımıyla yeni t değişkenine göre 2π peritodlu $\bar{f}\ (t) = f(\frac{\pi x}{L})$ fonksiyonuna dönüştürülebilir. O halde, $\bar{f}$ fonksiyonunun (9.55) sistemine göre*

$$\frac{a_0(\bar{f}\ )}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\bar{f}\ ) \cos nt + b_n(\bar{f}\ ) \sin nt$$

Fourier serisi

$$a_n(\bar{f}\ ) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) . \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n = 0, 1, \ldots$$

$$b_n(\bar{f}\ ) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) . \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \ldots \tag{9.74}$$

olmak üzere f fonksiyonunun

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}, \ldots$$

sistemine göre

$$\frac{a_0'(\bar{f})}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(\bar{f})\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n'(\bar{f})\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (9.75)$$

Fourier serisine, dolayısıyla, $\bar{f}$ fonksiyonu için $[-\pi,\pi]$ aralığında geçerli olan Dini Testi (Bkz. Teorem 9.6.16) f fonksiyonu için $[-L,L]$ aralığında uygun Dini testine dönüştürülür.

Şimdi, Fourier sinüs ve Fourier kosinüs serileri kavramlarını verelim.

f fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak integrallenebilir 2π periyotlu bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(-x) = f(x)$ olduğuna göre, her $n = 0, 1, \ldots$ için

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx \; dx$$

(her $n = 1, \ldots$ için $f(x).\cos nx$ çift olduğundan) ve her $n = 1, 2, \ldots$ için

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx \; dx = 0$$

(her $n = 1, 2, \ldots$ için $f(x).\sin nx$ tek olduğundan) olur. Dolayısıyla, $f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon ise

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos nx$$

dır. Bu bağıntının sağ yanındaki seriye Fourier kosinüs serisi denir.

f fonksiyonu tek fonksiyon ise $f(-x) = -f(x)$ olduğuna göre, her $n = 0, 1, \ldots$ için

$$a_n(f) = 0 \text{ ve } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\; dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\sin nx\; dx$$

olur. Dolayısıyla, $f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon ise

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin nx$$

dır. Bu bağıntının sağ yanındaki seriye Fourier sinüs serisi adı verilir.

Not: Yukarıda söylenenlerden görüldüğü gibi, çift bir fonksiyonun Fourier açılımında sinüslü terimler ve tek bir fonksiyonun Fourier açılımında kosinüslü terimler (ve sabit terimi) gözükmez. •

Örnek 9.6.28 *: 4 periyotlu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ -2 \le x \le 0 & ise, \\ \frac{1}{2}x, \ 0 < x < 2 & ise \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: : $2L = 4 \Longrightarrow L = 2$ olduğuna göre (9.74) ten

$$a_0(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\; dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} \frac{1}{2}x\; dx = \frac{1}{2},$$

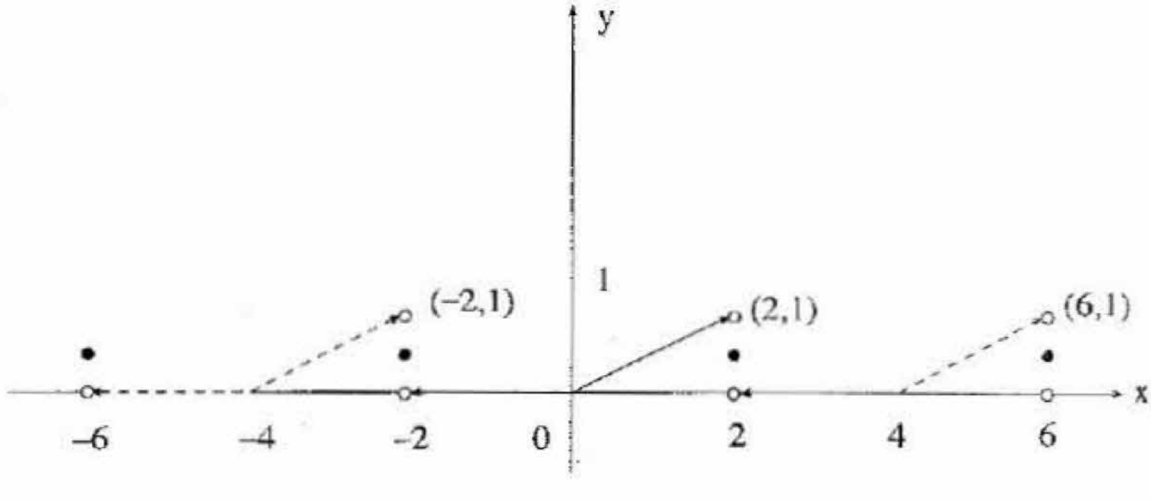
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\cos\frac{n\pi x}{2}\; dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} \frac{1}{2}x.\cos\frac{n\pi x}{2}\; dx \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 n^2}, & n \text{ tek ise}, \\ 0, & n \text{ çift ise}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n'(f) &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x.\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki,

$$\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$
$$= \begin{cases} f(x), & f, x \text{ noktasında sürekli ise,} \\ \frac{1}{2}(f(x-)+f(x+)), & f, x \text{ noktasında süreksiz ise} \end{cases}$$

f fonksiyonunun grafiği şekil 9.2 de verilmiştir. ◇



Şekil 9.2

Örnek 9.6.29 : *$f(x) = x$ fonksiyonunun*

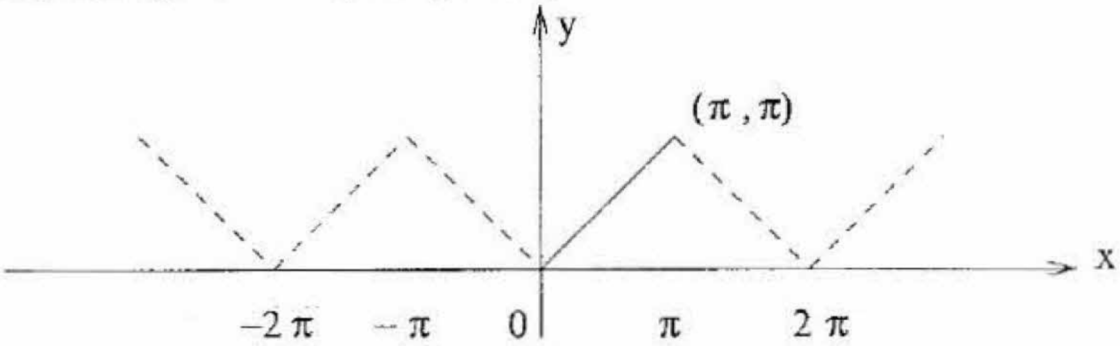
(a) $[0,\pi]$ aralığında Fourier kosinüs serisini;

(b) $[0,\pi]$ aralığında Fourier sinüs serisini bulunuz.

Çözüm: (a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonunu $[-\pi,\pi]$ aralığında çift olarak ve sonra elde edilen fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyodlu

$$\bar{f}\,(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \pi \quad \text{ise,}\\ -x, & -\pi<x<0 \quad \text{ise}\end{cases}$$

fonksiyonuna genişletelim (Bkz. şekil 9.3).



Şekil 9. 3

Bu fonksiyon için $b_n(\bar{f}\,)=0,\ n=1,2,\ldots,\ a_n(\bar{f}\,)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x.\cos nx\ dx=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1],\ n=1,2,\ldots$ ve $a_0(\bar{f}\,)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x.\ dx=\pi$ bulunur. Demek ki, $x\in[0,\pi]$ için

$$x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

dır. $x=0$ özel durumda buradan

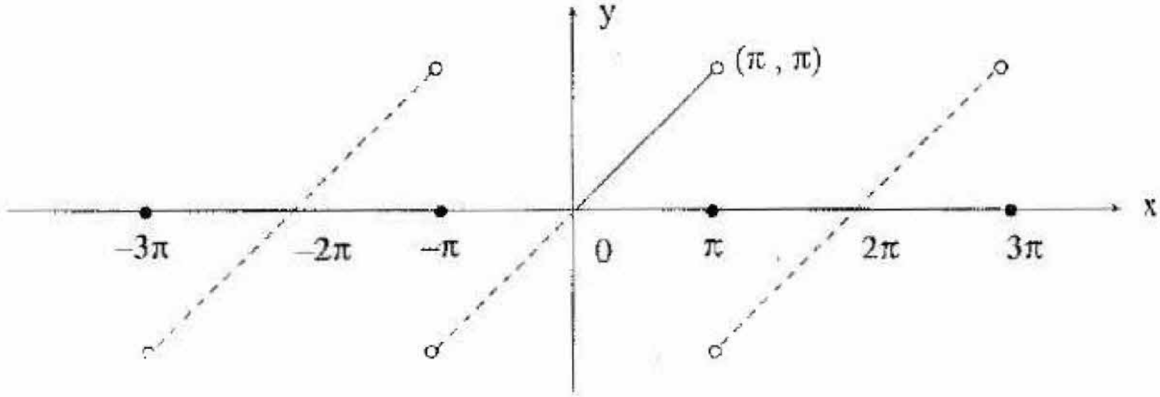
$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}=0\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

olduğu elde edilir.

(b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonunu $[-\pi,\pi]$ aralığında tek olarak ve sonra elde edilen fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyodlu

$$\bar{f}\,(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x\le \pi \quad \text{ise,}\\ 0, & x=k\pi, k\in Z \quad \text{ise}\end{cases}$$

fonksiyonuna genişletelim (Bkz. şekil 9.4).



Sekil 9. 4

Bu fonksiyon için $a_n(\bar{f}) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $b_n(\bar{f}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x . \sin nx \, dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ bulunur. Demek ki, $x \in [0, \pi]$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nx$$

dır. $x = \frac{\pi}{2}$ özel durumda, buradan

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

olduğu elde edilir. ◇

Çözümlü Problemler

Fourier Serileri

(33) $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ olmak üzere $f(x) = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}$, $-\pi \leq x \leq \pi$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: $z = e^{ix}$ olmak üzere $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2zi}$ olduğuna göre

$$f(x) = \frac{a\frac{z^2-1}{2zi}}{1 - 2a\frac{z^2+1}{2z} + a^2} = \frac{a(z^2-1)}{2i(1-az)(z-a)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)$$

yazılabilir. $|az| = |ae^{ix}| = |a| < 1$ ve $|\frac{a}{z}| = |ae^{-ix}| = |a| < 1$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, \ \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

eşitliklerinden

$$f(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n (e^{inx} - e^{-inx})\right)$$

$[\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \sin nx$ olduğundan $] = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$ olduğu, dolayısıyla, $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ ve $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için

$$\frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$$

bulunur.

Sonuncu eşitliği $[0, x]$ aralığında integrallersek, $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ ve $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(34) Sınırsız ve periyodik

(a) $f(x) = \ln \mid 2\cos\frac{x}{2} \mid$, (b) $f(x) = \ln \mid 2\sin\frac{x}{2} \mid$,
(c) $f(x) = \ln \mid 2\tan\frac{x}{2} \mid$,

fonksiyonlarının Fourier serilerini bulunuz.

Çözüm: $\ln \mid 2\cos\frac{x}{2} \mid$ fonksiyonu çift olduğuna göre, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$ olur.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln(2\cos\frac{x}{2})\, dx =$$

[$\frac{x}{2} = t$ değişken değiştirmesi yapıldığında]

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos t)\, dt = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln(2\cos\frac{x}{2})\cos nx\, dx$$

[$u = \ln(2\cos\frac{x}{2})$, $dv = \cos nx dx$ denirse,

$$du = -\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\, dx, v = \frac{\sin nx}{n}$$

olduğundan kısmi integrasyona göre]

$$= \frac{2}{\pi}\ln(2\cos\frac{x}{2})\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, dx$$

[$x = \pi - t$ değişken değiştirmesi yapılırsa]

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \int_0^{\pi} [\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}]\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \int_0^{\pi} [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kx]\, dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

bulunur.

Buna göre ,$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$\ln \mid 2\cos\frac{x}{2} \mid = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{\cos nx}{n}$$

dir.

Benzer şekilde , $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$\ln \mid 2\sin\frac{x}{2} \mid = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

ve $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$\ln \mid 2\tan\frac{x}{2} \mid = \ln 2 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$$

eşitliklerinin doğru oldukları gösterilebilir. ◇

(35) π periyotlu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: $2L = \pi \Rightarrow L = \frac{\pi}{2}$ olur.

$f(x) = x\cos x$ fonksiyonu tek olduğundan (9.74) 'den $a_n'(f) = 0, n = 0, 1, 2, \cdots$ olur.

$$b_n'(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \sin 2nx\, dx == \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x]\, dx$$

[$u = x, dv = [\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x]dv$ denirse, $du = dx, v = -\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} - \frac{\cos(2n-1)}{2n-1}$ olduğuna göre, kısmi integrasyondan]

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\{[-x(\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1})]|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&+ \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)xdx + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n-1)xdx\} \\
&= \frac{2.(-1)^n}{\pi}[\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}] \\
&= \frac{16.(-1)^{n-1}.n}{\pi(4n^2-1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için

$$x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin 2nx$$

eşitliğinin doğru olduğu elde edilir. ◇

(36) $\frac{\pi}{2}$ periyotlu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\sin 2x, x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: $2L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = \frac{\pi}{4}$ olur. $x\sin 2x$ fonksiyonu çift olduğuna göre, $b'_n(f) = 0, n = 1, 2, \cdots$ olur. (9.74) 'ten

$$\begin{aligned}
a'_0(f) &= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx = -\frac{4}{\pi}(x\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx) = \frac{2}{\pi}, \\
a'_n(f) &= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\cos 4nxdx
\end{aligned}$$

[Problem (35)'e benzer olarak]

$$= \frac{(-1)^n 2(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2}, \; n = 1, 2, \cdots$$

bulunur. $f(x) = x\sin 2x, x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ fonksiyonunun $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ aralığından $\mathbb{R}$ üzerine $\frac{\pi}{2}$ periyodik olarak genişletilmesi olan $\bar{f}(x)$

$$(\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } \bar{f}(x + \frac{\pi}{2}) = \bar{f}(x) \text{ ve } \bar{f}_{[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} = f \text{dir})$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olup $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ noktalarında türevli değildir.

$$\begin{aligned} \bar{f}'(x_{k^+}) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\bar{f}(x_k + h) - \bar{f}(x_k)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-\frac{\pi}{4} + h) - f(-\frac{\pi}{4})}{h} \\ &= (x\sin 2x)'|_{x=-\frac{\pi}{4}} = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}'(x_{k^-}) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\bar{f}(x_k + h) - \bar{f}(x_k)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(\frac{\pi}{4} + h) - f(\frac{\pi}{4})}{h} \\ &= (x\sin 2x)'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1 \end{aligned}$$

türevleri mevcut olduklarından Teorem 9.6.16 gereğince her $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ için

$$x\sin 2x = \frac{1}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2 - 1}\cos 4nx$$

eşitliğinin sağlandığı elde edilir. $\diamond$

(37) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ integrali yakınsak (Has olmayan anlamda) olacak şekilde bütün $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar kümesi $\tilde{R}^2(-\pi, \pi)$ olsun. $S_n(f; x)$, $f \in \tilde{R}^2(-\pi, \pi)$ fonksiyonunun n. dereceden Fourier polinomu olmak üzere

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(f, x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)] \quad (9.85)$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Lemma 9.6.2 den yararlanarak (9.60) tan

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(f, x)]^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(f,x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f;x)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)] - 2[\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}(a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx)]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)] - 2\pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)]$$

olduğu, dolayısıyla (9.85) eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır. ◇

(38) $f \in \tilde{R}^2(-\pi,\pi)$ fonksiyonu verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{9.86}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(f;x)]^2dx \geq 0$$

olduğu için (9.85) ten (9.86) eşitsizliği elde edilir. ◇

(39) Problem (38)'in hipotezi sağlandığında Bessel eşitsizliği denilen

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{9.87}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: (9.86) dan $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ pozitif serisinin kısmi toplamlar dizişi üstten sınırlı, dolayısıyla, bu serinin yakınsak olduğu elde edilir. (9.86)'da $n\to\infty$ iken limite geçer sek, (9.87) eşitsizliğinin doğru olduğu anlaşılır. ◇

Not: Yakınsak serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından her $f\in \tilde{R}^2(-\pi,\pi)$ için

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f)=\lim_{n\to\infty} b_n(f)=0$$

olduğu elde edilir. •

(40) $[-\pi,\pi]$ aralığında sürekli ve parçalı türevlenebilir $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(-\pi)=f(\pi)$ koşulunu sağlarsa,bu fonksiyonun Fourier serisinin $[-\pi,\pi]$ aralığında f'ye mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Kısmi integrasyona göre her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}[f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx] \\ &= -\frac{1}{n}b_n(f'), \end{aligned} \tag{9.88}$$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}[-f(x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx] \\ &= -\frac{1}{n}a_n(f'), \end{aligned} \tag{9.89}$$

bulunur, burada, $a_n(f')(n=0,1,2,\cdots)$ ve $b_n(f')(n=1,2,\cdots)$ ile $f'(x)$ türev fonksiyonunun Fourier katsayıları gösterilmiştir. $f(-\pi)=f(\pi)$ olduğuna göre,

$$a_0(f')=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0$$

dır. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için $|\alpha\beta|\le\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$ eşitsizliği sağlandığından $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{1}{n}a_n(f')\right|\le\frac{1}{2}(a_n^2(f')+\frac{1}{n^2}),\ \left|\frac{1}{n}b_n(f')\right|\le\frac{1}{2}(b_n^2(f')+\frac{1}{n^2})$$

yazılır.Buna göre, (9.88) ve (9.89) den $\forall x\in[-\pi,\pi]$ için

$$\begin{aligned}|a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx| &\le |a_n(f)|+|b_n(x)|\\ &\le \frac{1}{n}|b_n(f')|+\frac{1}{n}|a_n(f')|\\ &\le \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(a_n^2(f')+b_n^2(f'))\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $f'(x)$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında parçalı sürekli olduğundan (9.87) Bessel eşitsizliğine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2(f')+b_n^2(f')]\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx$$

dir. Buradan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n^2(f')+b_n^2(f')]$ serisinin yakınsak olduğu anlaşılır. Demek ki, f nin

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx \tag{9.90}$$

Fourier serisi yakınsak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(a_n^2(f')+b_n^2(f'))]$ serisi ile majorantlanabilir. Bu nedenle, Weierstrass testi gereğince (9.90) serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaktır. ◇