Seval KARACAN

Nümerik Analiz (Sayısal Çözümleme)

İÇERİK

1. BÖLÜM

03.03.06

HATA ANALİZİ

Mühendislik ve uygulamalı fen alanlarında karşılaşılan problemlerin çözümleri her zaman analitik olarak bulunmayabilir. Karşılaşılan problemin çözümü için analitik yöntemlerin bulunamaması sayısal yöntemler kullanmaya yönlendirmiştir. Analitik çözüme uygun problemlerde bile işlem kolaylığı bakımından sayısal yöntemler tercih edilmektedir. Uygulamalı birimlerde genel olarak hesaplamalar deney sonuçlarına dayanır. Ancak en hassas ölçümlerde bile elde edilen sonuçların belirli bir hata payı vardır. Hatalar üç sınıfta incelenebilir.

1 Veri Hataları : Ölçümlerden elde edilen verilerde bulunan hatalardır. Sonsuz ondalıklı sayıların sonlu olarak kullanılması durumunda ortaya çıkarlar. π, e, $\sqrt{2}$ gibi sayıların kullanımı sonlu ondalıklıdır. Fakat kendileri sonsuz ondalıklıdır. Bu sayıların kullanımından kaynaklanan hatalara veri hataları denir.

2. Kesme Hataları : Sonsuz terimli bir serinin veya sayının uygun bir yerden kesilmesiyle ihmal edilerek sadece belirli sayıdaki terimlerinin kullanılması ile oluşan hatalardır

$$\int_{-0,8}^{0,8} Ln(1+x^2)\,dx = 0,29047754 \quad \text{Gerçek değer}$$

$Ln(1+x^2)$ -nin $x_0=0$ 'noktası komşuluğunda Maclaurent serisi

$$Ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 \Big| + \underbrace{\ldots\ldots}$$

$$\int_{-0,8}^{0,8} Ln(1+x^2) \cong \int_{-0,8}^{0,8} x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8\,dx = 0,288313669$$

Yaklaşık Değer

Hata = Gerçek Değer − Yaklaşık Değer.

$\pi = 3,14\,15|92,654$ — $\underbrace{92,654}_{\text{Kesme hatası}}$

Kesme hatası

3. Yuvarlama Hataları : Bilgisayarlarda, hesap makinelerinde kullanılan sonsuz ondalıklı bir sayının yuvarlatma işlemi yapılarak sonlu ondalıkta kullanılması sonucu yuvarlatma hatası düşer.

$\underbrace{3,283542}_{\text{Gerçek Sayı}} \xrightarrow[\text{yuvarlatma}]{\text{3 ondalığa}} \underbrace{3,284}_{\text{Yuvarlanmış Sayı}}$

| Gerçek sayı − yaklaşık sayı | = yuvarlama hatası

Hata Birikimi, Kararlılık, Kararsızlık

Bir önceki değeri kullanarak bir sonraki değeri bulma işlemi olan iterasyon sayısal yönlerin çoğunda kullanılır. Tüm işlemler değişik türden sayısal hatalara sebep olduğundan son işlemlerden sonra elde edilen ~~hatalar~~ değer ~~birikmiş hata~~ birikmiş hata olur. Birikmiş hataların önemli birikim hızlarına bağlıdır. Birikim hızı toplam hatanın sınırlı kalmasını sağlayacak şekilde azalıyorsa işlemler dizisine kararlıdır denir. Hız sürekli artarsa birikmiş hatalar sonucun anlamsız olmasına neden olursa bu işlemler dizisine kararsızdır denir.

ÖRNEK− x_0 sayısı ilk yaklaşık veri olarak seçilir.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$k=0; \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$k=1; \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$\vdots$

x_0'ın yanlış seçiminden dolayı ardışık işlemler dizisi (iterasyon) gerçek köke yaklaşabilir veya uzaklaşabilir.

Mutlak Hata

Yaklaşık değeri a olan, gerçek değeri A olan bir sayısal verinin yaklaşık hatası $A-a$ ile gösterilir. A sayısının kesin değeri bilinmemesine rağmen a sayısının yaklaşık hatası tahmin edilebilir.

$$|A-a| \leq \Delta(a)$$

olacak şekildeki $\Delta(a)$ sayısına a yaklaşık değerinin mutlak hatası denir.

$$-\Delta(a) \leq A-a \leq \Delta(a)$$

$$a-\Delta(a) \leq A \leq a+\Delta(a)$$

biçiminde yazılır.

a sayısı A sayısına $\Delta(a)$ kadar bir mutlak hata ile eşitse bu:

$$A \cong a\ [\Delta(a)]$$

biçiminde gösterilir.

Mutlak hata a sayısı için sayısal bir hata ifadesi olmasına rağmen hatanın hassaslığı açısından fikir vermez.

Örneğin; $A \cong 250 \quad [0{,}05]$

$B \cong 0{,}15 \quad [0{,}05]$

şeklinde verilen A ve B sayılarının hataları aynı olmasına rağmen. A sayısı çok büyük olduğundan 0,05 hata B sayısına göre önemsiz kalır. Bir ölçümün hassaslığı mutlak hatanın dışında ölçülen değerin büyüklüğüne de bağlıdır. Ölçülen büyüklüğe göre hatanın hassasiyetini ifade etmek için göreceli hata kullanılır.

Göreceli (Bağıl, relative, izafi) (rölatif) Hata

A gerçek değerinin yaklaşık değeri $\Delta(a)$ mutlak hatası ile a olsun:

$$\varepsilon(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

biçiminde tanımlanan $\varepsilon(a)$ sayısına a yaklaşık değerinin göreceli hatası denir.

ÖRNEK: $A \cong 25 \; [0{,}05] \Rightarrow \varepsilon(a) = \frac{0{,}05}{25}$ göreceli hata

Bütün hata hesaplamalarında gerçek değer yerine yaklaşık değer kullanılır. Bunun nedenleri şöyle sıralanabilir:

1- Bazı sayılar (π, e, $\sqrt{5}$, $\ln 2$, $\frac{2}{3}$ gibi) hiçbir şekilde tam olarak yazılamaz. Gerçek değerleri belli değildir.

2 Bir ölçüm sonucu bulunan değer çoğu zaman gerçek değer olamaz.

3- Bütün (Bazı demek) 10 tabanlı sayıların 2 tabanlı karşılığı yoktur. Hesap makinaları sayıyı yaklaşık olarak bize verir.

Bazı durumlarda göreceli hata çok küçük olduğundan bunun 100 katı alınır. Buna da yüzde hata veya hata yüzdesi denir.

Toplama İşleminde Hatalar

10.03.06.

Yaklaşık sayılarla toplama işlemi yapılırken hataların ortması kaçınılmaz olur. Herbir yaklaşık sayının mutlak hatasının bilinmesi durumunda göreceli hata ve işlem sonucunda yapılacak hatalar bulunabilir.

$A \cong a \; [\Delta(a)]$ ve $B \cong b \; [\Delta(b)]$

olsun.

$$|A-a| \le \Delta(a) \Rightarrow -\Delta(a) \le A-a \le \Delta(a)$$

$$\underline{a-\Delta(a)} \le A \le a+\Delta(a)$$

dır. B içinde

$$b-\Delta(b) \le B \le b+\Delta(b)$$

dır. Son iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak.

$$a+b-(\Delta(a)+\Delta(b)) \le A+B \le a+b+(\Delta(a)+\Delta(b))$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten.

$$\underline{A+B \cong a+b} \qquad [\Delta(a)+\Delta(b)]$$

bulunur. Buradan;

$$\boxed{\Delta(a+b) = \Delta(a)+\Delta(b)}$$

olur.

Göreceli hata: $\boxed{\varepsilon(x) = \dfrac{\Delta(x)}{|x|}}$

eşitliğinden bulunabilir. Yani;

$$\varepsilon(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{|a+b|} = \frac{\Delta(a)+\Delta(b)}{|a+b|}$$

bulunur. Birden fazla yaklaşık sayının toplamındaki mutlak hata

$$\Delta(a_1+a_2+\dots+a_n) = \Delta(a_1)+\Delta(a_2)+\dots+\Delta(a_n)$$

olur.

Çıkarma İşleminde Hatalar

$A \cong a \quad [\Delta(a)]$ ise; $a-\Delta(a) \le A \le a+\Delta(a)$ dır.

$B \cong b \quad [\Delta(b)]$ ise; $b-\Delta(b) \le B \le b+\Delta(b)$ dır.

İkinci eşitsizliği (-1) ile çarpalım:

$$-b-\Delta(b) \le -B \le -b+\Delta(b)$$

olur. Birinci ve üçüncü eşitsizlikleri toplarsak;

$$a-b-(\Delta(a)+\Delta(b)) \le A-B \le a-b+(\Delta(a)+\Delta(b))$$

elde edilir. Buradan;

$$A-B \cong a-b \quad [\Delta(a)+\Delta(b)]$$

dır. Yani

$$\boxed{\Delta(a-b) = \Delta(a) + \Delta(b)}$$

elde edilir.

Göreceli hata da;

$$\boxed{\varepsilon(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|}}$$

eşitliğinden bulunur.

Örnek: $A \cong 26,83 \quad [0,1]$; $B \cong 18,75 \quad [0,3]$, $C \cong 12,61 \quad [0,2]$ ise $a+b-c$ nin hesaplanmasındaki hataları bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}
\Delta(a+b-c) &= \Delta((a+b)-c) \\
&= \Delta(a+b) + \Delta(c) \\
&= \Delta(a)+\Delta(b) + \Delta(c) \\
&= 0,1 + 0,3 + 0,2 \\
&= 0,6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(a+b-c) &= \frac{\Delta(a+b-c)}{|a+b-c|} \\
&= \frac{0,6}{|26,83+18,75-12,61|} \\
&= 0,018198 \\
&\underset{\text{dört ondalık yuvarlatma}}{\cong} 0,0182
\end{aligned}$$

Çarpma İşleminde Hatalar

$A \cong a \quad [\Delta(a)]$ ve $B \cong b \quad [\Delta(b)]$ olsun.

$$\Rightarrow a-\Delta(a) \leq A \leq a+\Delta(a)$$

ve

$$b-\Delta(b) \leq B \leq b+\Delta(b)$$

$\Delta(a) = |a|.\varepsilon(a)$ ve $\Delta(b) = |b|.\varepsilon(b)$ olduğundan bu eşitsizlikler;

$$a - |a|.\varepsilon(a) \leq A \leq a + |a|.\varepsilon(a)$$
$$b - |b|.\varepsilon(b) \leq B \leq b + |b|.\varepsilon(b)$$

biçimini alır.

$a>0$, $b>0$ kabul edelim. (Diğer durumlarda benzer işlemler yapılabilir)

$$a(1-\varepsilon(a)) \leq A \leq a.(1+\varepsilon(a))$$
$$b(1-\varepsilon(b)) \leq B \leq b.(1+\varepsilon(b))$$

yazılabilir. Taraf tarafa çarpılırsa;

(*) $$a.b.\underbrace{(1-\varepsilon(a)).(1-\varepsilon(b))} \leq A.B \leq a.b.(1+\varepsilon(a))(1+\varepsilon(b))$$

$$(1-\varepsilon(a))(1-\varepsilon(b)) = 1 - \varepsilon(b) - \varepsilon(a) + \varepsilon(a).\varepsilon(b)$$

dır. $\varepsilon(a)$ ve $\varepsilon(b)$ sayıları sıfıra yakın sayılardır. Çarpımları sıfıra daha da yaklaşır. O halde $\varepsilon(a).\varepsilon(b) \cong 0$ alabiliriz.

Buna göre.

$$(1-\varepsilon(a)).(1-\varepsilon(b)) \cong 1-\varepsilon(a)-\varepsilon(b)$$

alınabilir. Benzer şekilde;

$$(1+\varepsilon(a))(1+\varepsilon(b)) \cong 1+\varepsilon(a)+\varepsilon(b)$$

yazılabilir. Buna göre (*) eşitsizliği

$$a.b(1-(\varepsilon(a)+\varepsilon(b))) \leq A.B \leq ab.(1+(\varepsilon(a)+(\varepsilon(b)))$$

yazılabilir. Buradan ab-nin göreceli hatası:

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)+\varepsilon(b)$$

olur.

$\varepsilon(a.b)$ biliniyorsa $\Delta(a.b)$ de

$$\varepsilon(a.b) = \frac{\Delta(a.b)}{|a.b|}$$

eşitliğinden bulunabilir.

!! ! iki yaklaşık sayının çarpımının hataları bulunurken önce göreceli (→ öreceli) hatayı bulmak işlem kolaylığı sağlar.

$\varepsilon(a),\varepsilon(b)$ 0-a yakın sayılar oldğ. dan $1-\varepsilon(a)>0$

-7-

$$\mathcal{E}(a.b) = \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b)$$

$\Delta(a)$ ve $\Delta(b)$ cinsinden $\Delta(ab)$ yi şöyle bulabiliriz.

$$\mathcal{E}(a.b) = \frac{\Delta(a.b)}{|a.b|}$$

$$\Rightarrow \Delta(a.b) = |a.b| \,.\, \mathcal{E}(a.b)$$

$$\Rightarrow \Delta(a.b) = |a|.|b|.(\mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b))$$

$$\Rightarrow \Delta(a.b) = |a|.|b|\,\mathcal{E}(a) + |a|.|b|.\mathcal{E}(b)$$

$$\Rightarrow \Delta(a.b) = |a|.|b|.\frac{\Delta(a)}{|b|} + |a|.|b|.\frac{\Delta(b)}{|b|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(a.b) = |b|\,\Delta(a) + |a|.\,\Delta(b)}$$

elde edilir.

Bu sonuçlar ikiden fazla yaklaşık sayının çarpımına genelleştirilirse;

$$\mathcal{E}(a_1.a_2.\dots.a_n) = \mathcal{E}(a_1) + \mathcal{E}(a_2) + \dots + \mathcal{E}(a_n)$$

ve

$$\Delta(a_1.a_2.\dots.a_n) = \Delta(a_1)\,.|a_2.a_3.\dots.a_n| + \Delta(a_2)\,|a_1.a_3.\dots.a_n| + \dots + \Delta(a_n).|a_1.a_2.\dots.a_{n-1}|$$

yazılır.

Örnek: Bir dikdörtgenin kenarları $\Delta(a) = 0{,}01$ m. ve $\Delta(b) = 0{,}01$ m hata ile $a = 4{,}02$ m ve $b = 4{,}96$m bulunmuştur. Alan hesabında yapılan hataları bulunuz.

Çözüm:

$$\text{Alan} \cong a.b.$$

$$\mathcal{E}(a.b) = \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b)$$

$$= \frac{\Delta(a)}{|a|} + \frac{\Delta(b)}{|b|}$$

$$= \frac{0{,}01}{4{,}02} + \frac{0{,}01}{4{,}96}$$

$$= 0{,}00451$$

$$\Delta(ab) = |a \cdot b|\, \varepsilon(ab)$$
$$= (4{,}02)(4{,}96) \cdot (0{,}00451)$$
$$= 0{,}08993$$

Bir Sayının Tersinin Hataları

a yaklaşık sayısının çarpımsal tersi $\frac{1}{a}$ dır. $\varepsilon\left(\frac{1}{a}\right)$ ve $\Delta\left(\frac{1}{a}\right)$ yı bulalım.

$A \cong a \; [\Delta(a)]$ ise $|A-a| \leq \Delta(a)$ idi.

$\left|\frac{1}{X} - \frac{1}{x}\right| \leq \Delta\left(\frac{1}{x}\right)$ dır.

$\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{X}\right|$ alınabilir. Ayrıca

$X \cong x \; [\Delta(x)]$ olduğundan $-X + x \cong \Delta(x)$ alırsak

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{X}\right|$$
$$\cong \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x-\Delta(x)}\right|$$
$$= \left|\frac{\Delta(x)}{x \cdot (x-\Delta(x))}\right|$$
$$= \frac{|\Delta(x)|}{|x| \cdot |x-\Delta(x)|}$$
$$= \frac{|\Delta(x)|}{|x|^2 \left|1-\frac{\Delta(x)}{x}\right|}$$
$$= \frac{\Delta(x)}{|x|^2 \, |1-\varepsilon(x)|}, \quad \varepsilon(x) \cong 0$$
$$1-\varepsilon(x) \cong 1$$

O halde $\boxed{\Delta\left(\frac{1}{x}\right) \cong \frac{\Delta(x)}{|x|^2}}$ elde edilir.

$\frac{\Delta(x)}{|x|} = \varepsilon(x)$ olduğundan $\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Delta(x)}{|x|^2} = \frac{\varepsilon(x)}{|x|}$

dır.

$$\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{1}{x}\right)}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \frac{\frac{\Delta(x)}{|x|^2}}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \frac{\Delta(x)}{|x|} = \varepsilon(x)$$

Sonuç olarak;

$$\boxed{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)} \quad \text{ve} \quad \boxed{\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Delta(x)}{|x|^2}}$$

elde edilir.

Bölme İşleminde Hatalar

Bölme işleminde çarpmada olduğu gibi önce göreceli hatayı bulmak işlem kolaylığı sağlar:

$$\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) = \varepsilon\left(a \cdot \frac{1}{b}\right)$$

$$= \varepsilon(a) + \varepsilon\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$= \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$$

$$\boxed{\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)}$$

$\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right)$ bulunduktan sonra $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot \varepsilon\left(\frac{a}{b}\right)$ den bulunabilir. Veya

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{|a|}{|b|}\left(\varepsilon(a) + \varepsilon(b)\right)$$

$$= \frac{|a|}{|b|} \cdot \varepsilon(a) + \frac{|a|}{|b|} \cdot \varepsilon(b)$$

$$= \frac{|a|}{|b|} \frac{\Delta(a)}{|a|} + \frac{|a|}{|b|} \cdot \frac{\Delta(b)}{|b|}$$

$$\boxed{\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Delta(a)}{|b|} + \frac{|a| \cdot \Delta(b)}{|b|^2}}$$

ÖRNEK : $X = \frac{A^3.B}{C^2}$ formülünde A, B, C sayıları 0.01, 0.02, 0.03 mutlak hata ile 7.45, 50.46, 15.4 olarak ölçülmüştür. X'in hesabındaki hataları bulunuz.

Çözüm : $\varepsilon(x) = ?$, $\Delta(x) = ?$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\frac{a^3 b}{c^2}\right) = \varepsilon\left(a^3 . b . \frac{1}{c^2}\right) = \varepsilon(a^3) + \varepsilon(b) + \varepsilon\left(\frac{1}{c^2}\right) =$$

$$= \varepsilon(a.a.a) + \varepsilon(b) + \varepsilon(c^2)$$

$$= \varepsilon(a) + \varepsilon(a) + \varepsilon(a) + \varepsilon(b) + \varepsilon(c) + \varepsilon(c)$$

$$= 3\varepsilon(a) + \varepsilon(b) + 2\varepsilon(c)$$

$$= 3\frac{\Delta(a)}{|a|} + \frac{\Delta(b)}{|b|} + 2\frac{\Delta(c)}{|c|}$$

$$= 3 . \frac{0{,}01}{7{,}45} + \frac{0.02}{50.46} + 2 . \frac{0.03}{15.4}$$

$$\cong 0.004027 + 0.000396 + 0.00039$$

$$\cong 0.004813$$

$$\Delta(x) = |x| . \varepsilon(x) = \left|\frac{a^3 . b}{c^2}\right| . (0.004813)$$

$$= \frac{(7.45)^3 . (50.46)}{(15.4)^2} . (0.004813)$$

$$= 0.729$$

ÜS VE KÖKÜN HATALARI

a^n ve $\sqrt[n]{a}$ sayılarının hatalarını bulalım: $(n \in \mathbb{Z} - \{0\})$

$$\varepsilon(a^n) = \varepsilon(\underbrace{a.a \ldots a}_{n\text{-tane}}) = \underbrace{\varepsilon(a) + \varepsilon(a) + \ldots + \varepsilon(a)}_{n\text{-tane}} = n . \varepsilon(a)$$

Yani;

$$\boxed{\varepsilon(a^n) = n . \varepsilon(a)}$$

dır.

$$= \frac{|a^2b| \cdot \varepsilon(a^2b) + \left|\frac{\sqrt{c}}{b}\right| \cdot \varepsilon\left(\frac{\sqrt{c}}{b}\right)}{|y|}$$

$$= \frac{|a^2b| \left[2\varepsilon(a) + \varepsilon(b) \right] + \left|\frac{\sqrt{c}}{b}\right| \left[\frac{1}{2} \cdot \varepsilon(c) + \varepsilon(b) \right]}{|y|}$$

$$\varepsilon(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}, \quad \varepsilon(b) = \frac{\Delta(b)}{|b|}, \quad \varepsilon(c) = \frac{\Delta(c)}{|c|}$$

hesaplanır, yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(y) \cong 0,01637$ // bulunur.

$\Delta(y) = |y| \cdot \varepsilon(y) = \left|a^2b - \frac{\sqrt{c}}{b}\right| \cdot 0,01637 \cong 3,99428$ //

Δ-dan başlarsak;

$$\Delta(y) = \Delta\left(a^2b - \frac{\sqrt{c}}{b}\right) = \Delta(a^2b) + \Delta\left(\frac{\sqrt{c}}{b}\right) =$$

("." olduğundan göreceliye geç.)

$$= \varepsilon(a^2b) \cdot |a^2b| + \left|\frac{\sqrt{c}}{b}\right| \cdot \varepsilon\left(\frac{\sqrt{c}}{b}\right)$$

bulunur. Buradan da $\varepsilon(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|}$ den göreceli hata elde edil

ÖRNEK: $X = (A^3 - \sqrt[5]{c})B^2$ işleminde $a = 3$, $b = 8$, $c = 32$
- Ödev -
$\Delta(a) = 0,02$, $\Delta(b) = 0,05$, $\Delta(c) = 0,08$ ise $\varepsilon(x)$, $\Delta(x) = ?$

ÖRNEK: Bir cismin yoğunluğu. H havadaki ve S de sudaki
- Ödev -
ağırlığı göstermek üzere

$$\rho = \frac{H}{H-S}$$

ile bulunuyor. $H \cong 9$ $[0,01]$, $S \cong 5$ $[0,02]$ ise $\varepsilon(\rho)$ ve $\Delta(\rho)$ nedir?

$$\Delta(a^n) = |a^n| . \varepsilon(a^n)$$

eşitliğinden bulunabilir veya

$$\Delta(a^n) = |a^n| . n . \varepsilon(a)$$

$$= |a^n| \; n . \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

$$= |a^{n-1}| . n . \Delta(a)$$

eşitliğinden de bulunabilir.

$\sqrt[n]{a} = b$ dersek.

$a = b^n$ olur.

$$\Rightarrow \varepsilon(a) = \varepsilon(b^n) = n . \varepsilon(b) = n . \varepsilon(\sqrt[n]{a})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} . \varepsilon(a).}$$

olur.

$\Delta(\sqrt[n]{a})$ yı $\varepsilon(\sqrt[n]{a})$ yı kullanarak bulabiliriz.

Örnek: $y = A^2 B - \frac{\sqrt{C}}{B}$ işleminde

$\Delta(a) = 0.05$, $\Delta(b) = 0.01$, $\Delta(c) = 0.02$

$a = 7$, $b = 5$, $c = 25$ ise $\Delta(y) = ?$ $\varepsilon(y) = ?$

Çözüm:

$\varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$ diye bir şey öğrenmedik Buraya dikkat.

$$\varepsilon(y) = \varepsilon\left(a^2 b - \frac{\sqrt{c}}{b}\right)$$

$$= \frac{\Delta\left(a^2 b - \frac{\sqrt{c}}{b}\right)}{\left|a^2 b - \frac{\sqrt{c}}{b}\right|}$$

$$= \frac{\Delta(a^2 b) + \Delta\left(\frac{\sqrt{c}}{b}\right)}{\left|a^2 b - \frac{\sqrt{c}}{b}\right|}$$

2. BÖLÜM

Lineer Olmayan Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Lineer olmayan cebirsel denklemler değişkenin kuvvetlerini içeren veya transandant fonksiyonları içeren denklemler olarak tanımlanabilir. Bu tip denklemler uygulamada sıklıkla karşılaşılır. Bu bölümün amacı

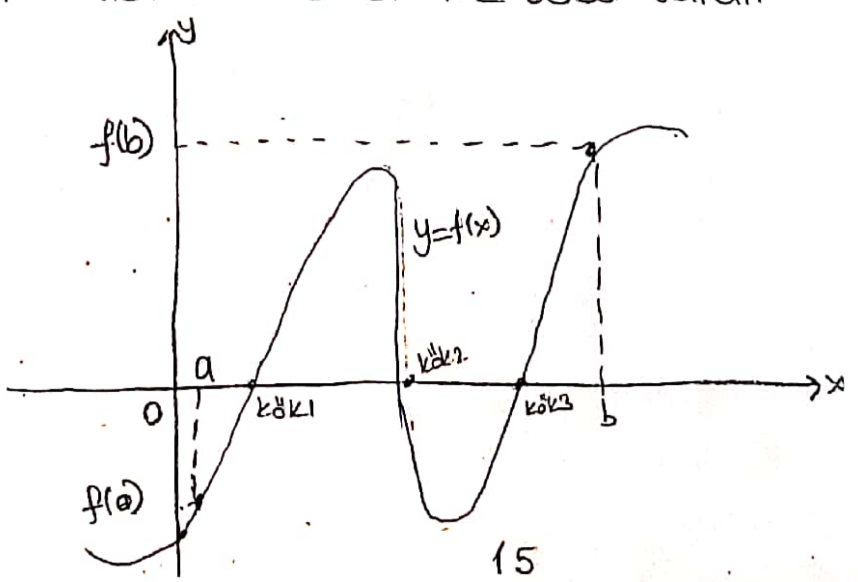
$$f(x) = 0$$

biçimindeki bir denklemin kökünü (veya köklerini) veya

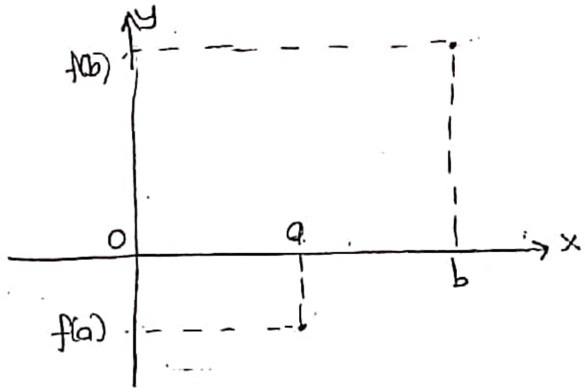
$$y = f(x)$$

biçimindeki denklemin eğrisinin x-eksenini kestiği noktaları (sıfır yerlerini) bulmaktır. Bu kökleri bulmak için kökün bulunduğu aralıklar belirlenerek bu aralıklarda köke adım adım yaklaşan sayısal yöntemler kullanılır. Bir fonksiyonun köklerinin bulunabilmesi için fonksiyonun grafiğini kullanırken aşağıdaki özellikten yararlanılabilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a).f(b) < 0$ ise bu aralıkta $f(x) = 0$ denkleminin en az bir kökü vardır. Eğer fonksiyon bu aralıkta monoton ise bir tek kökü vardır.

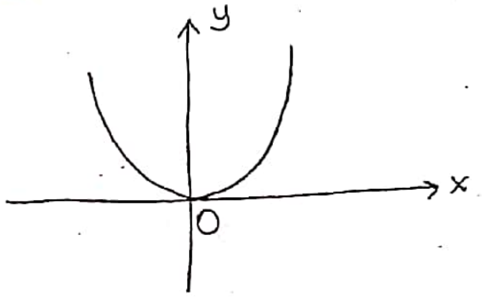


$f(a)\cdot f(b) < 0$
$f(x)=0$ üç köke sahip } => (Bu fonk. mon. değil)

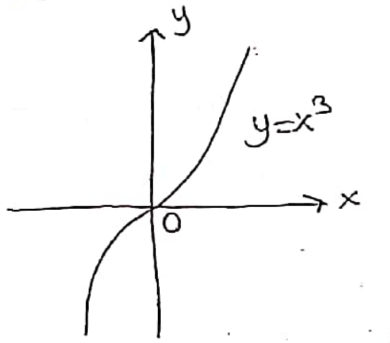


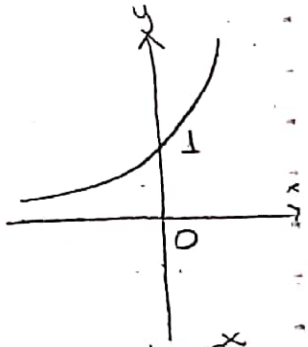
f monoton ve
$f(a)\cdot f(b) < 0$
f tek köke sahip.

Bazı Pratik Eğri Çizimleri

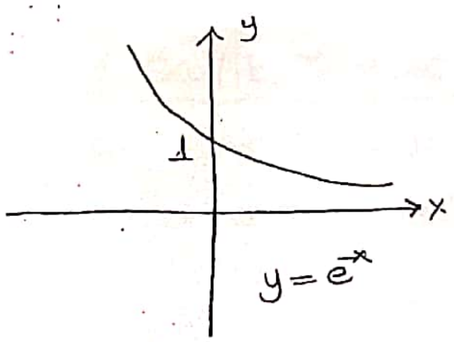


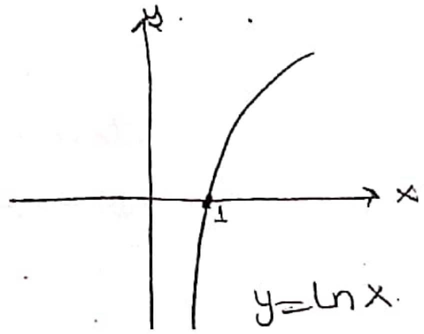
$y=x^2$



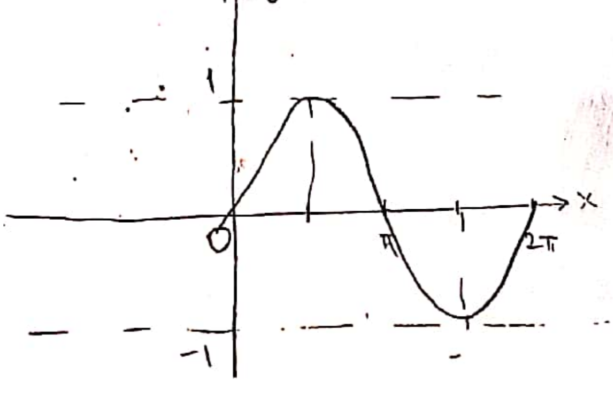


$y=e^x$

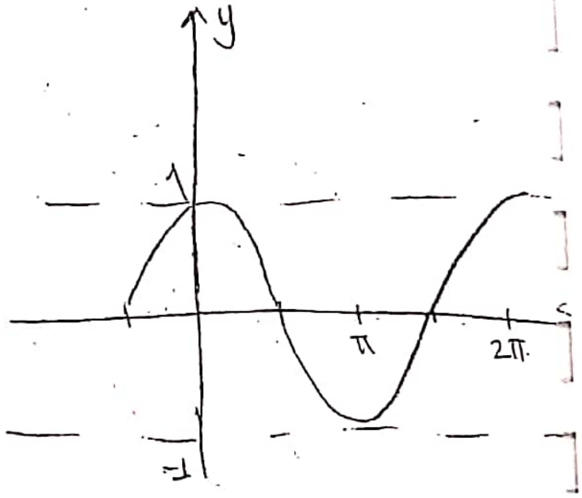




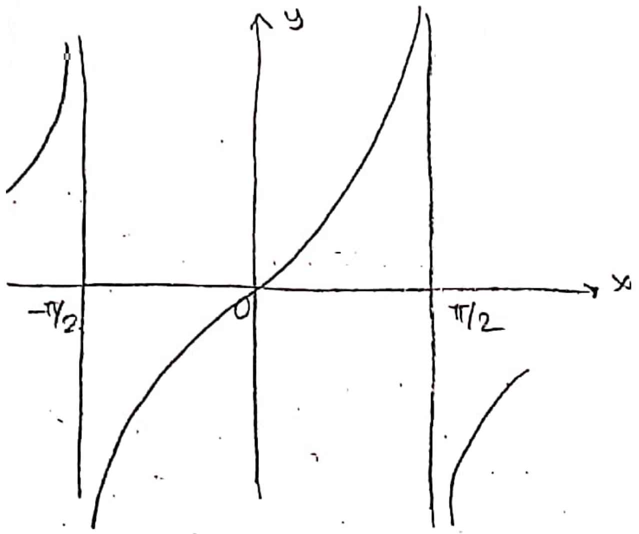
$y=\ln x$



$y=\sin x$



$y=\cos x$



$y = \tan x$

$y = f(x)$ bilinirken;

$y = f(x-a)$ x-ekseni üzerindeki kayma.

$y = f(x) + b$ y-ekseni üzerinde kayma.

$y = f(x-a) + b$ hem x hem de y üzerinde kayma

($y = \ln(x-6)$ geçen yıl sınavda soruda vermiş)

17.03.06.

1. Grafik Yöntemi :

Bu yöntemde $f(x) = 0$ biçimindeki bir denklemin köklerinin bulunduğu bir aralık bulunabilir. Bunun için $f(x) = 0$ denklemi

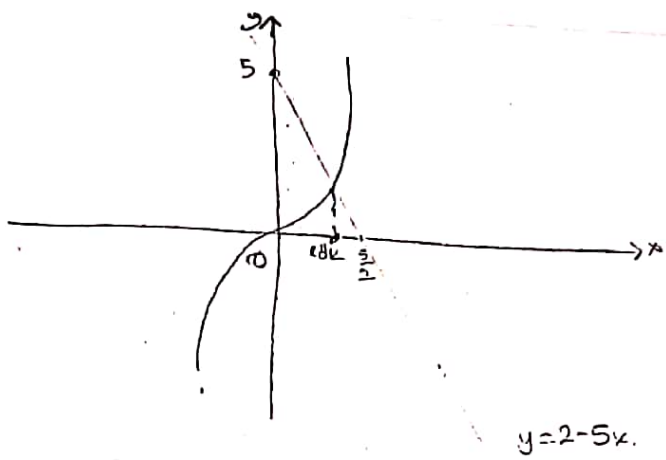
$$f_1(x) = f_2(x)$$

biçiminde ayrılır. $y = f_1(x)$ ve $y = f_2(x)$ eğrileri çizilir. bu eğrilerin kesim noktalarının apsisleri aranan köklerdir.

Örnek: $x^3 + 2x - 5 = 0$ denkleminin köklerini içeren aralık bulunuz.

Çözüm: $x^3 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x^3 = 5 - 2x$ yazalım

$y = x^3$ ve $y = 5 - 2x$ eğrilerini çizelim



$f(x) = x^3 + 2x - 5$

$f(0) = -5$

$f(1) = -2$

$f(2) = 7$

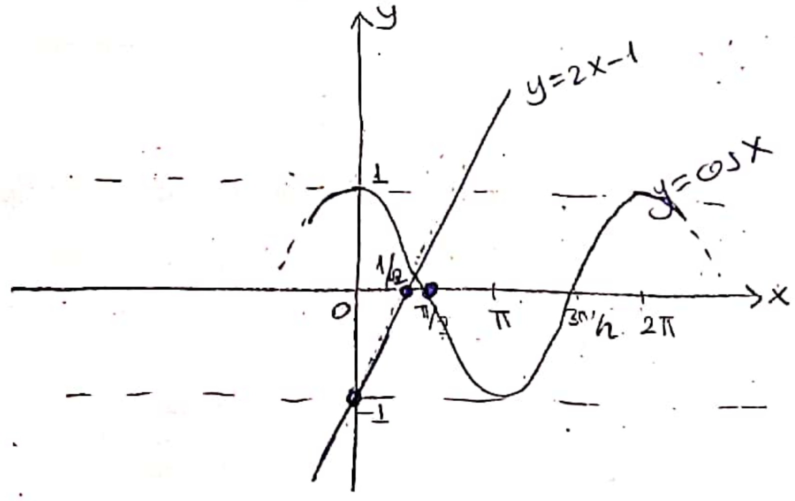
$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

Ohalde $(1,2)$ aralığında kök var. //

Örnek – $2x - \cos x - 1 = 0$ denkleminin kökünün bulunduğu aralığı belirleyiniz.

Çözüm – $2x - \cos x - 1 = 0 \implies 2x - 1 = \cos x$

$y = 2x-1$, $y = \cos x$ eğrilerini çizelim.



$f(x) = 2x - \cos x - 1$

$f(0) = -2$

$f(1) = 2 - \cos 1 - 1 = 1 - \cos 1 = 1 - 0{,}54 > 0$

$f(0) \cdot f(1) < 0$ dır. Dolayısıyla $(0,1)$ de kök var

(Aralığı daraltabilirsin.)

hesaplarken hesap makineni radyana al. $\cos 1 = 0{,}54$, $\cos 1° = 0{,}999$ derece ve radyan farklı dikkat!

+ Örnek. $x e^x - 2 = 0$

+ Örnek $x - \sin x - 1 = 0$

denklemlerinin köklerini içeren aralığı bulunuz

(2) Basit İterasyon Yöntemi :

Bu yöntemle $f(x) = 0$ denkleminin yaklaşık kökünü bulabilmek için bu denklem

$$* \boxed{x = g(x)} *$$

biçiminde yazılır.

[$2x - \cos x - 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$x = \arccos(2x-1)$$]

Grafik yönteminden kökün bulunduğu aralık bulunarak bu aralıktan bir x_0 başlangıç yaklaşık kökü seçilir. Daha sonra $x = g(x)$ eşitliği

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$$

biçiminde iterasyon formülüne dönüştürülür. x_0 kullanılarak $x_1 = g(x_0)$, x_1 kullanılarak $x_2 = g(x_1), \ldots$ bulunur. Bulunan $x_1, x_2, \ldots$ sayıları $f(x) = 0$ denkleminin gerçek köküne yaklaşılır.

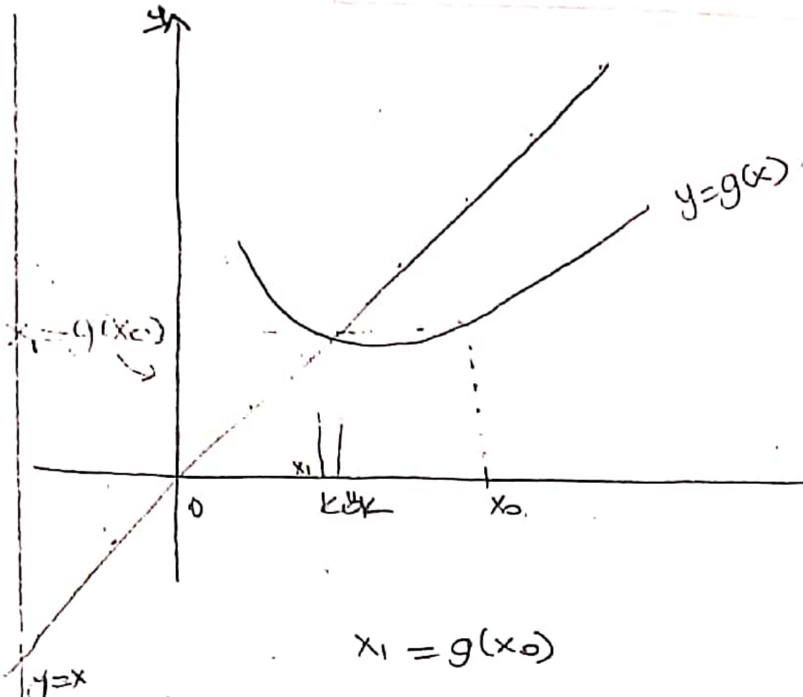
Bu yöntemde x_0 ve $g(x)$ seçilen ifadelerdir. Her seçim gerçek çözüme yaklaştırmayabilir. Bu nedenle ortalama değer teoreminin kullanılması ile

tek taraflı sınırlama

$$\boxed{|g'(x_0)| < 1}$$

olduğunda bulunacak $x_1, x_2, \ldots$ sayılarının köke yaklaştığı garantilenmiş olur.

Geometrisi ; $f(x) = 0$ denklem $x = g(x)$ biçiminde yazılmıştı. $y = x$ ve $y = g(x)$ eğrileri çizilir. Bunların kesim noktalarının apsisi bulunmaya çalışılır.



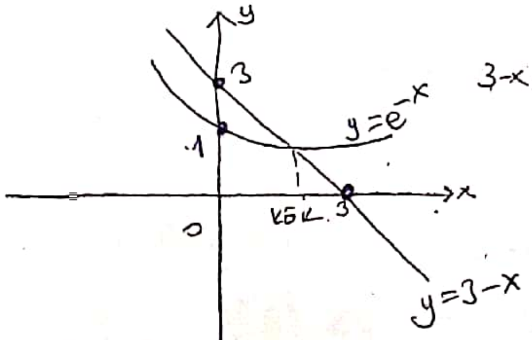
$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$
$x_3 = g(x_2)$
⋮

Bu yöntem sadece ikisi bulmaya yarıyor

$x_1 = g(x_0)$

Örnek $3 - x - e^{-x} = 0$ denkleminin bir kökünü yaklaşık olarak buluruz.

Çözüm: $3 - x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = \underbrace{3 - e^{-x}}_{g(x)}$



$3 - x = e^{-x}$

$y = 3 - x$
$y = e^{-x}$

$f(x) = 3 - x - e^{-x}$

$f(3) = -e^{-3} = -0.04$

$f(2) = 1 - e^{-2} = 0.86$

$\rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0$; (2,3) aralığında kök var.

$x_0 = 3$ seçelim.

$g'(x) = e^{-x}$, $|g'(\underset{3}{x_0})| = e^{-3} = \frac{1}{e^3} < 1$ (ort. değ. sağlandı)

Seçimler doğru

$x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (iterasyon formülü)

$x_{k+1} = 3 - e^{-x_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$x_1 = g(x_0) = g(3) = 3 - e^{-3} \cong 2.95$

19. $x_2 = g(x_1) = g(2.95) = 3 - e^{-2.95} \cong 2.948$

$x_3 = g(x_2) = g(2.948) = 3 - e^{-2.948} \cong 2.9475$

O halde 3 iterasyonda bulunan yaklaşık kök

$x_3 = 2.9475$

tir. Köke yakın mı?

$f(x) = 3 - x - e^{-x}$

$f(kök) = 0$

$f(2.9475) = 2.9 \times 10^{-5}$

$= 0,000029$

Örnek $x - \sin 2x = 0$ denkleminin pozitif kökünü yaklaşık olarak bulunuz. (3'üncü iterasyon)

Çözüm– $f(x) = x - \sin 2x$ olsun. $x - \sin 2x = 0 \Rightarrow$

$x = \underbrace{\sin 2x}_{g(x)}$ olsun.

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 - \sin 2 = 0.09$ (sıfıra yakın)

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \sin 1 = 0.15$ (sıfırdan uzak)

$f(0.7) = 0.7 - \sin 1.4 = -0,28$ (negatif)

$f(0.7) \cdot f(1) < 0$ dır. O halde bu arada kök var.

$x_0 = 1$ seçelim.

$g(x) = \sin 2x$, $g'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow |g'(x_0)| = |g'(1)| = 2\cos 2$

$\Rightarrow |g'(x_0)| = 0.83 < 1$

dolayısıyla seçimler sonuca yaklaştırır

$$\boxed{x_{k+1} = \sin 2x_k \quad , k = 0,1,2,\ldots}$$

$x_1 = \sin 2x_0 = \sin 2 = 0.909$

$x_2 = \sin 2x_1 = \sin(1.818) = 0.969$

$x_3 = \sin 2x_2 = \sin(2 \times 0.969) = 0.933$

3'üncü iterasyondaki yaklaşık sonuç

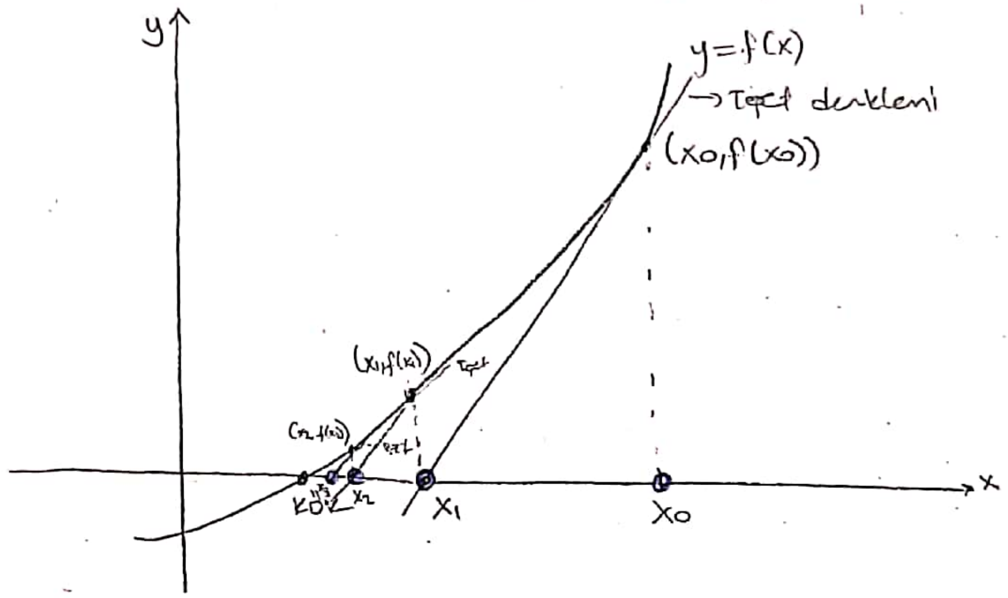
ÖRNEK — $\tan x = e^x$, $x_0 = 1$ olarak üç iterasyonda çözümü bulunuz

ÖDEV — $x^3 + x - 1 = 0$, $x_0 = 1$ olarak üç iterasyonda çözümü bulunuz

3) Newton - Raphson Yöntemi (Teğet Yöntemi):

$f(x) = 0$ denkleminin bir kökünün bulunmasında kullanılan sayısal yöntemlerden en çok bilinenidir.

— Geometrik olarak aşağıdaki gibi formül çıkartılabilir



$f(x) = 0$ denkleminin kökü $y = f(x)$ eğrisinin x-eksenini kestiği noktadır. Bu noktayı bulmak için bir x_0 başlangıç yaklaşık kökü seçilir. $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğet denklemi bulunur.

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)}$$ teğet denklemidir.

Teğetin x-eksenini kestiği noktada $y = 0$ dır

$$0 - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

$$\Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

bulunur. Bu nokta ilk yaklaşık kök x_1 olarak alınır.

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

olur. İkinci adımda $(x_1, f(x_1))$ noktasındaki teğet ve bu teğetin x-eksenini kestiği nokta bulunursa bu noktaya x_2 - denilirse ikinci yaklaşık kök;

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

olarak bulunur. Benzer işlemlerle iterasyon formülü

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \quad , \; k = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir. Bu yöntemde de bulunan $x_1, x_2, \ldots$ yaklaşık köklerinin gerçek köke yaklaşması için:

$$\boxed{\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| < 1}$$

olması gerekir.

* Örnek: $e^x - 3x = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığındaki kökünü Newton-Raphson yöntemi ile üç iterasyonda bulunuz.

Çözüm: $f(x) = e^x - 3x$, $x_0 = 0$ seçelim.

$f'(x) = e^x - 3$

$f''(x) = e^x$

$$\left| \frac{f(0) \cdot f''(0)}{[f'(0)]^2} \right| = \left| \frac{1 \cdot 1}{(-2)^2} \right| = \frac{1}{4} = 0.25 < 1$$

Dolayısıyla $x_0 = 0$ seçimi uygun.

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \quad , \; k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$f'(x_0) = f'(0) = 1 - 3 = -2$

$f(x_0) = f(0) = e^0 - 3.0 = 1$

$$x_1 = 0 - \frac{1}{(-2)} = 0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 - \frac{0,1087}{-1,3513} = 0,61$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.61 - \frac{f(0.61)}{f'(0.61)} = 0.619$$

Köke nekadar yaklaştık?

$$f(0.619) = 0.00007$$

$$\text{Hata} = |f(\text{KÖK}) - f(\text{YAKLAŞIK KÖK})|$$
$$= |0 - 0.00007|$$
$$= 0.00007$$

* **Örnek** – $f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 3$ denkleminin $(-1,0)$ aralığındaki kökünü yaklaşık olarak bulunuz

Çözelim – $x_0 = 0$ seçelim.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 6$$
$$f''(x) = 6x + 4$$

$$\left|\frac{f(0) \cdot f''(0)}{[f'(0)]^2}\right| = \left|\frac{3 \cdot 4}{36}\right| < 1$$

O halde $x_0 = 0$ seçimi uygun.

1. Iterasyon :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{3}{6}$$
$$x_1 = -0.5$$

2. iterasyon :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$= -0.5 - \frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}$$
$$= -0.586$$

3. Iterasyon :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$= -0.580$$

14) İkiye Bölme (Yarılama) Yöntemi :

Bu yöntemde $f(x)=0$ denkleminin köküne yaklaşmak için bir (a,b) aralığı gereklidir.

$$\boxed{f(a)\,f(b) < 0}$$

olacak şekilde bu aralık belirlenir. Birinci iterasyonda bu aralığın orta noktası ilk yaklaşık kök alınır.

$$\boxed{x_1 = \frac{a+b}{2}}$$

olur. $f(x_1)$ bulunur.

$$\boxed{f(a)\cdot f(x_1) < 0}$$

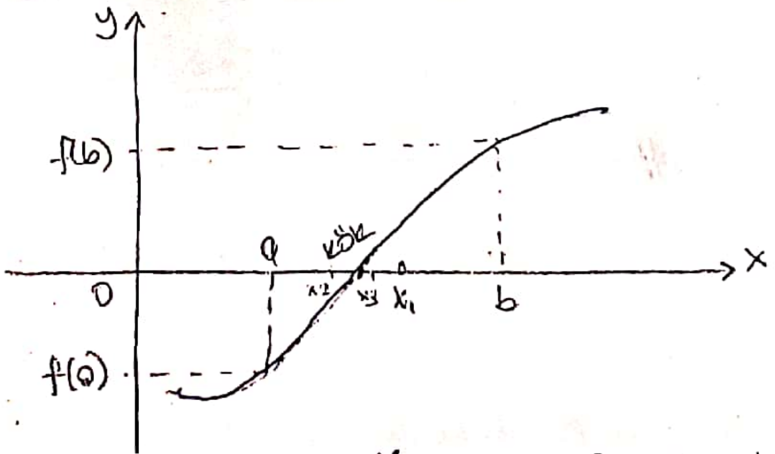
veya

$$\boxed{f(x_1)\cdot f(b) < 0}$$

dır. Diyelimki; $f(a)\cdot f(x_1) < 0$ olsun. Bu durumda (a,x_1) aralığında kök vardır. O halde 2. iterasyondaki yaklaşık kök bu aralığın orta noktasıdır.

$$x_2 = \frac{a+x_1}{2}$$

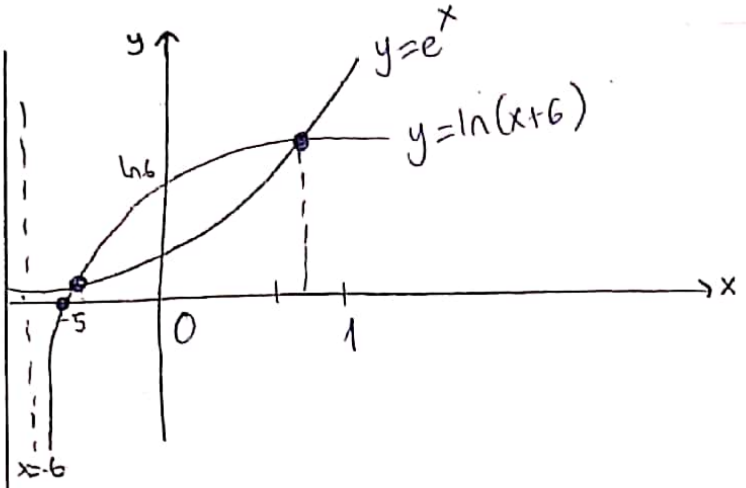
dır. İşlemlere bu şekilde devam edilerek $x_3, x_4, \ldots$ biçiminde yaklaşık kökler elde edilir.



Örnek $f(x) = e^x - \ln(x+6)$ fonksiyonunun pozitif kökünü (x-eksenini kestiği noktayı) bulunuz.

Çözüm

$e^x = \ln(x+6)$



$f(3) = 1.7$

$f(2) = 5.3$

$f(0) = -0.7$

$f(1) = 0.7$

$(0,1)$ aralığında kök vardır. Çünkü $f(0).f(1) < 0$ dır.

$x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$

$f(0.5) = -0.2 \Rightarrow f(0.5).f(1) < 0$

$(0.5, 1)$ aralığında kök var.

$x_2 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$

$f(0.75) = 0.207 \Rightarrow f(0.5).f(0.75) < 0$

$(0.5, 0.75)$ aralığında kök var.

$x_3 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$

$f(0.625) = -0.02 \Rightarrow f(0.625) f(0.75) < 0.$

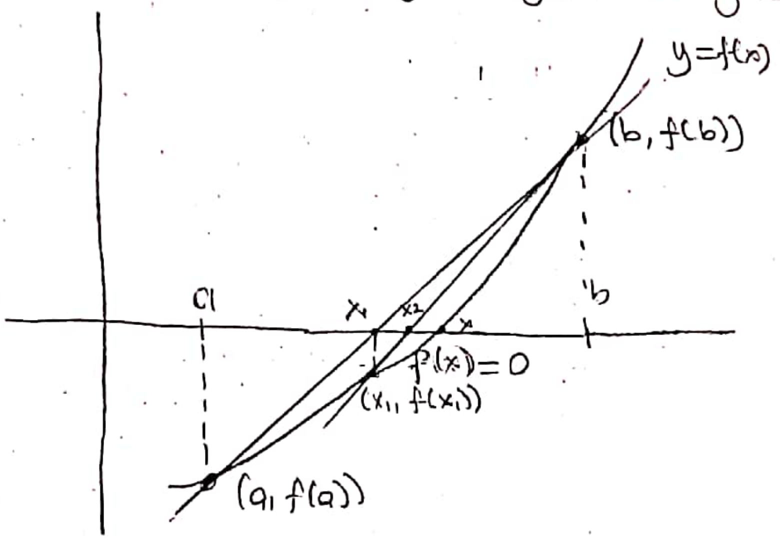
$(0.625, 0.75)$ aralığında kök var.

$x_4 = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.688$ //

Dört iterasyondaki yaklaşık sonuç $x_4 = 0.688$ dir

(5) Regula Falsi Yöntemi (Kiriş Yöntemi) 24.03.06

Bu yöntemde köke araştırmak için başlangıçta kökün içinde bulunduğu bir (a,b) aralığı gereklidir. Bu yöntemde köke yakınsama yavaş olsa da mutlaka gerçekleşir. Eğrinin kirişleri yardımıyla köke yaklaşılır.



$(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğru, $y=f(x)$ eğrisinin kirişidir. Bunun denklemi:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

dır. Bu doğrunun x-eksenini kestiği noktada $y=0$ olur. Bu noktayı da x_1 ile gösterirsek

$$\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$\Rightarrow x_1 = a - f(a)\cdot\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a f(b) - \cancel{a f(a)} - f(a) b + \cancel{f(a) a}}{f(b)-f(a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b)-f(a)}}$$

[Bu ilk yaklaşık kök olur.] elde edilir.

$f(x_1)$ hesaplanarak kökün bulunduğu aralık yeniden ~~[illegible]~~ belirlenir. (a, x_1) veya (x_1, b) kökün olabileceği aralıklardır. Şekle göre (x_1, b) aralığında kök var olsun. Bu aralık için yeniden aynı işlemler uygulanarak x_2 yaklaşık kökü ve $x_3, x_4, \ldots$ kökleri elde edilir. İşlem kolaylığı bakımından kökü içinde bulunduran aralıklar her seferinde yeniden (a,b) aralığı olarak belirlenirse tüm yaklaşık kökler için

$$\boxed{x_n = \frac{a.f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

eşitliği kullanılabilir.

ÖRNEK - $1 - x - e^{-2x} = 0$ denkleminin $(0.5, 1)$ aralığındaki kökünü kiriş yöntemi ile 3 iterasyonda üç ondalıklı yaklaşımla bulunuz.

Çözüm - $f(x) = 1 - x - e^{-2x}$, $(\underset{a}{0.5}, \underset{b}{1})$

$$f(a) = f(0.5) = 1 - 0.5 - e^{-2(0.5)} = 0.132$$
$$f(b) = f(1) = 1 - 1 - e^{-2.1} = -0.135$$

1. İterasyon :

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_1 = \frac{0.5(-0.135) - 1(0.132)}{-0.135 - 0.132}$$

$$x_1 = 0.747$$

$$f(x_1) = f(0.747) = 0.029$$

$(\underset{a}{0.747}, \underset{b}{1})$ aralığında kök var.

2. Iterasyon.

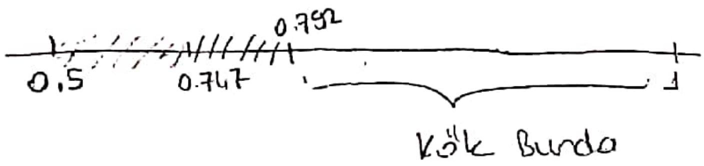
$$x_2 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_2 = \frac{(0.747)(-0.135) - 1(0.029)}{-0.135 - 0.029}$$

$$x_2 = 0.792$$

bulunur

$$f(x_2) = f(0.792) = 0.0028$$



$(0.792, 1)$ aralığında kök var.

$$\underset{x_2}{0.792}, \underset{b}{1}$$

3. Iterasyon

$$x_3 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_3 = \frac{(0.792).(-0.135) - 1(0.0028)}{-0.135 - 0.0028}$$

$$x_3 = 0.796$$

3 iterasyon ve 3 ondalıklı yaklaşık kök:

$$x_3 = 0.796$$

dır.

$$f(0.796) = 4.8 \cdot 10^{-4}$$