GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER VE UYGULAMALARI

1. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLERİN SINIFLANDIRILMASI

1.1 Yarı Sonsuz Aralık Üzerinde Tanımlı Genelleştirilmiş İntegraller

$[a;+\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $f(x)$ fonksiyonunun $\forall\xi \in (a;+\infty)$ için $[a,\xi]$ aralığı üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olduğunu kabul edelim: $f(x) \in R\,[a,\xi]$. Bu durumda $[a;+\infty)$ aralığı üzerinde

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx \tag{1}$$

fonksiyonu tanımlanmış olacaktır. Eğer,

$$\lim_{\xi\to+\infty} F(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int_a^{\xi} f(x)dx\right) \tag{2}$$

sonlu limiti varsa bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $[a;+\infty)$ aralığındaki genelleştirilmiş integrali denir ve $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ile gösterilir. Böylelikle (2) limiti sonlu olduğu taktirde,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int_a^{\xi} f(x)dx\right) \tag{3}$$

dir. Bu durumda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integrali yakınsaktır denir. (2) limiti sonsuz veya yok ise yine $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ gösterimi kullanılır ve bu durumda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integrali ıraksaktır denir. Örneğin,

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int_1^{\xi} e^{-x}dx\right) = \\ &= \lim_{\xi\to+\infty} e^{-x}\,\Big|_1^{\xi} = \lim_{\xi\to+\infty}(1-e^{-\xi}) = 1\end{aligned}$$

olduğundan $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$ integrali yakınsaktır.

(b)

$$\begin{aligned}\int\limits_{1}^{+\infty} x^2dx &= \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int\limits_{1}^{\xi} x^2dx\right) = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{x^3}{3}\Big|_1^{\xi} \\ &= \lim_{\xi\to+\infty}(\frac{1}{3}\xi^2-\frac{1}{3}) = +\infty\end{aligned}$$

olduğundan $\int\limits_{1}^{+\infty} x^2dx$ integrali ıraksaktır.

Tanımdan açıktır ki, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsaklığı $c>0$ olmak üzere yeterince büyük c sayısı için $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsaklığı ile denktir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int\limits_{a}^{\xi} f(x)dx\right) = \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\xi} f(x)dx\right) \\ &= \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int\limits_{a}^{c} f(x)dx\right) + \lim_{\xi\to+\infty}\left(\int\limits_{c}^{\xi} f(x)dx\right) \\ &= \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx\end{aligned}$$

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\xi} f(x)dx \tag{4}$$

olduğundan ve $\int\limits_{a}^{c} f(x)dx$ integrali Riemann İntegrali olarak mevcut olduğundan (4)'e göre $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ve $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ integralleri aynı zamanda yakınsaktırlar ya da ıraksaktırlar.

Geometrik olarak $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integrali $x = a$ doğrusu, apsis ekseni ve $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a; +\infty)$ üzerindeki grafiği ile sınırlı sonsuz bölgenin alanına eşittir.

Serilerde olduğu gibi, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ genelleştirilmiş integralinin karakteri denildiğinde yakınsaklığı veya ıraksaklığı anlaşılacaktır.

Benzer şekilde $(-\infty, b]$ aralığı üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali tanımlanır:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta \to -\infty} \left(\int\limits_{\eta}^{b} f(x)dx \right)$$

”’

1.2. Sonsuz Aralık Üzerinde Tanımlı Genelleştirilmiş İntegraller

$f(x)$, $(-\infty; +\infty)$ üzerinde tanımlı ve $\forall \xi, \eta \in (-\infty, +\infty)$ için $f(x) \in R[\xi, \eta]$ olacak şekilde bir fonksiyon. olsun. f fonksiyonun $(-\infty, +\infty)$ aralığı üzerinde genelleştirilmiş integrali $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ sonlu bir sayı ise $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integrali yakınsaktır denir. Eğer $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ve $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ integrallerinden en az biri sonsuz ise veya mevcut değilse $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integrali ıraksaktır denir.

Örnek 1 $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve bu integrali hesaplayınız.

Çözüm: $F(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0} xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\xi} e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\xi}=\frac{1}{2}\left(e^{-\xi^2}-1\right)$

olduğundan $\lim\limits_{\xi\to+\infty} F(\xi)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{-\xi^2}-1\right)=-\frac{1}{2}$ sonlu limiti var, demek verilen integral yakınsaktır ve $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}$ dir.

Örnek 2: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x+x^2}$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve bu integrali hesaplayınız.

Çözüm: $F(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0}\frac{dx}{1+x+x^2}$ ve $G(\eta)=\int\limits_{0}^{\eta}\frac{dx}{1+x+x^2}$ ise

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int\limits_{\xi}^{0}\frac{dx}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\Big|_{\xi}^{0} \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\xi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ve

$$G(\eta)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\xi}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x+x^2} &= \lim_{\xi\to-\infty}F(\xi)+\lim_{\eta\to+\infty}G(\eta) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3 $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ genelleştirilmiş integrali $\alpha>1$ için yakınsak, $\alpha\le 1$ için ıraksaktır.

1.3 Sonlu Aralık Üzerinde Genelleştirilmiş İntegral

Şimdi $[a,b)$ aralığı sonlu bir aralık, $f(x)$ ise $[a,b)$ üzerinde tanımlı ve $\forall\xi\in[a,b)$ için $f(x)\in R\,[a,\xi]$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Ayrıca $f(x)$ fonksiyonunun b noktasında sınırsız olduğunu kabul edelim. Yani $\exists\delta>0$ sayısı bulunur ki f fonksiyonu $(b-\delta,b)$ aralığı üzerinde sınırsızdır. Bu durumda

f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde Riemann İntegralinden konuşamayız. Çünkü fonksiyon b noktasında sınırsızdır.

Örnek:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

fonksiyonunu $[0,1)$ aralığı üzerinde inceleyelim. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ integrali Riemann integrali olarak mevcut değildir. Çünkü

$$\lim_{\xi\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$$

dur, dolayısıyla fonksiyon $x=1$ noktasında sınırsızdır. Ancak $\forall\xi\in[0,1)$ alırsak

$$\begin{aligned}.\int\limits_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= -2\sqrt{1-x}\mid_0^\xi= \\ & 2-2\sqrt{1-\xi}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{\xi\to 1^-}\int\limits_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\xi\to 1^-}2-2\sqrt{1-\xi}=2$$

sonlu limiti vardır.

$f(x)$ $a,b)$ aralığında tanımlı ve$\forall\xi\in[a,b)$ için $f(x)\in R\,[a,\xi)$ olsun

Eğer $\lim\limits_{\xi\to b^-}\int\limits_a^\xi f(x)dx$ sonlu limiti var ise bu limite f fonksiyonunun$[a,b)$ aralığı üzerindeki genelleştirilmiş integrali denir ve $\int\limits_a^b f(x)dx$ ile gösterilir:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\xi\to b^-}\int\limits_a^\xi f(x)dx \tag{6}$$

Bu tanımdan açıktır ki, eğer $f(x)\in R\,[a,b]$ ise (6) formülünün sağ tarafındaki limit $\int\limits_a^b f(x)dx$ belirli integraline eşit olur. Buna göre de $\int\limits_a^b f(x)dx$

genelleştirilmiş integrali belirli veya Riemann İntegrali'nin bir tür genelleşmesidir. Yukarıdaki örnekten ve tanımdan söyleyebiliriz ki,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2$$

dir.

Sonsuz aralık üzerindeki genelleştirilmiş integralde olduğu gibi, eğer (6) limiti sonlu ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali yakınsaktır. Bu limiti sonsuz veya yoksa $\int_a^b f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali ıraksaktır denir.

Örnek: $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx$ (α reel sayı) integralinin karakterini inceleyelim.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx &= \lim_{\xi \to 1^-} \int_0^\xi (1-x)^{-\alpha}dx \\
&= \lim_{\xi \to 1^-} \begin{cases} \frac{(1-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Big|_0^\xi, \alpha \neq 1 \\ -\ln|x-1|\,\Big|_0^\xi, \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \lim_{\xi \to 1^-} \begin{cases} \frac{(1-\xi)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \alpha \neq 1 \\ -\ln|\xi-1|\,, \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \\ +\infty, \alpha \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

O halde verilen seri $\alpha < 1$ iken yakınsak $\alpha \geq 1$ iken ıraksaktır.Buna göre $\alpha < 1$ için, $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx$ yakınsak $\alpha \geq 1$ için ıraksaktır. $\alpha < 1$ için,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}$$

dir.

Not: $\int\limits_a^b f(x)dx$ genelleştirilmiş integralinde $f(x)$ fonksiyonu $\forall\delta > 0$ sayısı için $(b-\delta, b)$ aralığında sınırsız olmalıdır. Çünkü aksi taktirde, yani $\exists\delta_0 > 0$ için $f(x), (b-\delta_0, b)$ aralığında sınırlı olduğunda $\forall\xi \in [a, b)$ için $f(x) \in R[a, \xi]$ olması nedeniyle, eğer $f(x)$ fonksiyonunu b noktasında da tanımlı yaparak, $f(x)$'i tüm $[a, b]$'ye genişletirsek, bu genişletilmiş $f(x)$ için $f(x) \in R[a, b]$ olur. Dolayısıyla $\int\limits_a^b f(x)dx$ integrali adi belirli integrale dönüşür. Bu integral f fonksiyonunun b noktasındaki değerinden bağımsız olur.

Eğer $\forall\delta > 0$ sayısı için $f(x)$ fonksiyonu $(b-\delta, b)$ aralığında sınırsız ise b noktasına $f(x)$ fonksiyonunun bir **singüler noktası** (ayrık noktası) denir. Benzer şekilde $\forall\delta > 0$ sayısı için $(a, a+\delta)$ aralığında $f(x)$ sınırsız ise a noktasına da $f(x)$ fonksiyonunun bir singüler noktası denir.

Benzer şekilde $(a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve $\forall\eta \in (a, b)$ için $f(x) \in R[\eta, b]$ olacak şekilde f fonksiyonu için $\lim\limits_{\eta\to a^+} \int\limits_\eta^b f(x)dx$ sonlu limiti varsa bu limite f fonksiyonunun $(a, b]$ aralığı üzerinde genelleştirilmiş integrali denir ve $\int\limits_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to a^+} \int\limits_\eta^b f(x)dx \tag{7}$$

Bu durumda da (7) limiti sonlu ise $\int\limits_a^b f(x)dx$ integrali yakınsak, aksi taktirde ıraksaktır. Açıktır ki (7) tipindeki genelleştirilmiş integralden a noktası $f(x)$'in bir singüler noktasıdır.

1.4 Genelleştirilmiş İntegralin Diğer Türleri

(a) $f(x), (a, b)$ aralığında tanımlı ve $\forall\xi, \eta(a < \eta \le \xi < b)$ için $f(x) \in R[\xi, \eta]$ olsun. Bu durumda, $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{8}$$

şeklinde tanımlı $\int\limits_a^b f(x)dx$ integraline $f(x)$'in (a,b) aralığında genelleştirilmiş integrali denir. Burada $f(x)$ hem a ucunda hem b ucunda singüleriteye sahip fonksiyondur.

Örnek: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ belirli integral değil.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\eta\to -1^+} \int\limits_{\eta}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\xi\to 1^-} \int\limits_{0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \lim_{\eta\to -1^+} \arcsin x \mid_{\eta}^{0} + \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin x \mid_{0}^{\xi} \\
&= \lim_{\eta\to -1^+} \arcsin \eta + \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin \xi \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

(b) $f(x)$, $c \in (a,b)$ noktası hariç tüm $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve

$$a \leq \xi < c < \eta \leq b$$

olmak üzere $\forall \xi, \eta$ için $f(x) \in R[a,\xi]$ ve $f(x) \in R[\eta, b]$ olsun.Yani kabul ediyoruz ki, c singüler noktası $[a,b]$ aralığının bir iç noktasıdır.Bu durumda $f(x)$ in $[a,b]$ aralığı üzerindeki $\int\limits_a^b f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to c^-} \int\limits_a^{\xi} f(x)dx + \lim_{\eta\to c^+} \int\limits_{\eta}^{b} f(x)dx \tag{9}$$

şeklinde tanımlanır.Bu tanımdan elde ediyoruz ki $\int\limits_a^b f(x)dx$ integrali ancak ve ancak $\int\limits_a^c f(x)dx$ ve $\int\limits_c^b f(x)dx$ genelleştirilmiş integralleri yakınsak iken yakınsaktır ve

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{10}$$

şeklindedir.

Not: Eğer fonksiyonu $c_1 < c_2$ olmak üzere $c_1, c_2 \in (a,b)$ noktaları hariç $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve $a \leq \xi < c_1 < \zeta < \mu < c_2 < \eta \leq b$ olmak üzere $\forall \xi, \eta, \zeta, \mu$ için $f(x) \in R[a,\xi]$, $f(x) \in R[\zeta,\mu]$ ve $f(x) \in R[\eta,b]$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

Aşağıdaki iki koşul altında $\int\limits_a^b f(x)dx$ genelleştirilmiş intagralini ele alalım:

(a) $f(x)$, $[a,b)$aralığında tanımlı ve $\forall \xi \in [a,b)$ için $f(x) \in R[a,\xi]$ olsun;

(b) b noktası ya sonlu bir nokta ya da $+\infty$ olsun.

Bu durumda biliyoruz ki eğer b sonlu ise

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to b^-} \int_a^\xi f(x)dx,$$

eğer $b = +\infty$ ise

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^\xi f(x)dx$$

dir. Biz bundan sonra bu şekildeki genelleştirilmiş integralleri ele alarak özelliklerini ispatlayacağız.Genelleştirilmiş integrallerin diğer türleri için bu özellikler özellikler tamamen benzer şekilde ifade edilir ve ispatlanır.

2.1 Genelleştirilmiş İntegralin Lineerliği:

$\int\limits_a^b f(x)dx$ ve $\int\limits_a^b g(x)dx$ integralleri yakınsak ise $\forall \alpha, \beta$ reel sayısları için

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx$$

genelleştirilmiş integrali de yakınsak olup

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \tag{11}$$

dir.

İspat:

$\forall \xi \in [a,b)$ için, $f(x), g(x) \in R[a,\xi]$ olduğundan belirli integralin lineerlik özelliğinden dolayı $\forall \alpha, \beta$ reel sayısı için,

$$\int_a^{\xi} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{\xi} f(x)dx + \beta \int_a^{\xi} g(x)dx \tag{12}$$

dir. (12) de $\xi \to b^-$ koşulu ile limite geçersek ve $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ integrallerinin yakınsak olduklarını da göz önünde bulundurursak (11)'i elde ederiz.

Bu özelliğe genelleştirilmiş integralin lineerlik özelliği denir.

2.2 Genelleştirilmiş İntegral İçin Newton-Leibnitz Formülü

$f(x), [a,b)$ aralığı üzerinde sürekli, $F(x)$ ise $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b)$ aralığı üzerindeki ilkel fonksiyonu olsun. Bu durumda $\int_a^b f(x)dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{\xi \to b^-} F(\xi) = F(b^-) \tag{13}$$

sonlu limitinin var olmasıdır. Bu durumda,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a) = F(x) \mid_a^{b^-} \tag{14}$$

genelleşmiş Newton-Leibnitz Formülü sağlanır.

İspat:

$\Longleftarrow$: $f(x), [a,b)$ üzerinde sürekli olduğundan $f(x) \in R[a,\xi]$ dir. Bu durumda belirli integral için olan Newton-Leibnitz Formülü'nden biliyoruz ki,

$$\int_a^{\xi} f(x)dx = F(\xi) - F(a) \tag{15}$$

burada $\xi \to b^-$ koşulu ile limite geçersek ve (13) ü dikkate alırsak (14) elde edilir, yani $\int_a^b f(x)dx$ integrali yakınsak olur.

$\Longrightarrow$: $\int\limits_a^b f(x)dx$ yakınsak ve $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b)$ aralığı üzerindeki ilkel fonksiyonu ise belirli integralin bilinen özelliği gereği $\forall\xi \in [a,b)$ için

$$\int\limits_a^\xi f(x)dx = F(\xi) - F(a) \tag{16}$$

dir. $\int\limits_a^b f(x)dx$ yakınsak olduğundan $\lim\limits_{\xi\to b^-} \int\limits_a^\xi f(x)dx$ limiti var. O zaman (16)'nın sağ tarafının $\xi \to b^-$ iken limiti vardır, yani

$$\lim_{\xi\to b^-} F(\xi) = \int\limits_a^b f(x)dx + F(a)$$

limiti sonludur.

Örnek:

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **(b)** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx, (\alpha > 0)$ integrallerini hesaplayınız.

Çözüm:

(a) (ilkel fonksiyon belirsiz integrale eşittir.)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2, \\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx &= F(x)\mid_0^{+\infty} = F(+\infty) - F(0) = \frac{\pi^2}{8} - 0 = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{-\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha x}(\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x) \\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx &= F(x)\mid_0^{+\infty} = F(+\infty) - F(0) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha x}(\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x) + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{aligned}$$

dir. $\alpha > 0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = 0$ ve

$$|\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x| \le |\beta|\,|\sin\beta x| + |\alpha|\,|\cos\beta x| \le |\beta| + |\alpha|$$

olduğundan $\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x$ fonksiyonu sınırlıdır. Bu nedenle

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x}(\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x) = 0$$

dır. Böylece, $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ buluruz.

2.3 Kısmi İntegrasyon Formülü

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $[a, b)$ üzerinde tanımlı, $\forall \xi \in [a, b)$ için $[a, \xi]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir olsunlar. Eğer

$$\lim_{\xi \to b^-} u(\xi)v(\xi) = u(b^-)v(b^-) \equiv u(x)v(x) \mid_{x=b^-} \tag{17}$$

sonlu limiti varsa ve $\int\limits_{a}^{b} u(x) v'(x) dx$ integrali de yakınsak ise $\int\limits_{a}^{b} u'(x) v(x) dx$ integrali de yakınsak olup

$$\int\limits_{a}^{b} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)] \mid_{a}^{b^-} - \int\limits_{a}^{b} u(x)v'(x)dx \tag{18}$$

formülü sağlanmaktadır. (18) formülüne genelleştirilmiş integraller için kısmi integrasyon formülü denir.

İspat: Koşulumuz gereği $u'(x), v'(x)$ fonksiyonları $[a, \xi]$ aralığı üzerinde sürekli olacaklarından belirli integral için olan kısmi integrasyon formülünden,

$$\int\limits_{a}^{\xi} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)] \mid_{a}^{\xi} - \int\limits_{a}^{\xi} u(x)v'(x)dx$$

yazabiliriz. Burada $\xi \to b^-$ koşulu ile limite geçersek, ve (17) limitinin sonlu olduğunu dikkate alırsak (18) elde edilir.

Örnek: $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$ integralini kısmi integrasyon förmülü ile hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xd(e^{-x}) = -(xe^{-x})\,|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -(xe^{-x}) + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\,|_0^{+\infty}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 1 = 1.$$

2.4 Değişken Değiştirilmesi Formülü:

$f(x), [a,b)$ aralığı üzerinde sürekli , $x = \varphi(t)$ ise $[\alpha,\beta)$ aralığı üzerinde sürekli türevenebilir monoton artan ve

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta^-) = \lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b$$

olsun Bu durumda,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{19}$$

formülü, bu formüldeki integrallerden birinin yakınsak olması durumunda sağlanmaktadır. (19) formülüne genelleştirilmiş integraller için değişken değiştirmesi formülü denir.

İspat: $\tau \in [\alpha,\beta), \varphi(\tau) = \xi$ olsun.Bu durumda $\tau \to \beta^-$ iken $\varphi(\tau) \to b$ olur. $[a,\xi]$ aralığında Riemann İntegrali için değişken değiştirilmesi formülüne göre,

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\alpha^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{20}$$

yazabiliriz. $x = \varphi(t)$ fonksiyonu $[\alpha,\beta)$ aralığında monoton artan ve sürekli olduğundan ters fonksiyonu da $[a,b)$ aralığı üzerinde monoton artan ve sürekli fonksiyondur. Bu sebepten (20)'nin sağ tarafının $\tau \to \beta^-$ iken sonlu limiti varsa sol tarafınında $\xi \to b^-$ iken sonlu limiti olur ve tersine, eğer (20)'nin sol tarafının $\xi \to b^-$ iken limiti varsa sağ tarafının da $\tau \to \beta^-$ iken limiti var. Böylelikle (20)'de $\xi \to b^-$ koşuluyla limite geçersek (19)'u elde ederiz.

Not: Özellik monoton azalan $\varphi(t)$ fonksiyonu için de geçerlidir.

2.5 Genelleştirilmiş İntegraller için İntegral eşitsiliği

$\int\limits_a^b f(x)dx$ ve $\int\limits_a^b g(x)dx$ integralleri yakınsak ve $\forall x \in [a,b)$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$$

dir.

İspat: Riemann integralinin bilinen özelliği gereği $\forall \xi \in [a,b)$ için $\int\limits_a^\xi f(x)dx \leq \int\limits_a^\xi g(x)dx$ olacaktır. Burada $\xi \to b^-$ koşulu ile limite geçersek istenen elde edilir.

ÖRNEKLER

(1) $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ integralini hsaplayınız.

Çözüm:

$$x = \tan t,\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$$

fonksiyonu$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir ve kesin artandır. Bu durumda,

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt, 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}dt$$

ve

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan t = +\infty$$

olduğundan (19) formülüne göre

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dx}{(\frac{1}{\cos^2 t})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \,|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

(2) $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Çözüm: $x - \frac{1}{x} = t$ olsun.O zaman $x \to 0^+$ iken $t \to -\infty$, $x \to +\infty$ iken $t \to +\infty$ dur ve

$$t'_x = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

olduğundan $t = t(x)$ fonksiyonu kesin artandır. Demek ki, bu fonksiyonun $x = \varphi(t)$ tersi de kesin artandır ve (19) formülü uygulanabilir. O zaman,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan t)\mid_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(3) $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm: $x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt,\ x \to 0+ \to t \to +\infty, x \to +\infty \to t \to 0,$$

$$\begin{aligned}
J &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^4}+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}dt - \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}, \\
J &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}dt - J \\
J &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}dt \Longrightarrow J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

3. NEGATİF OLMAYAN FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLERİ İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

Teorem 1:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b) \tag{1}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\int\limits_a^b f(x)dx$ genelleşmiş integralin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\int\limits_a^\xi f(x)dx$ fonksiyonunun $[a,b)$ aralığı üzerinde üstten sınırlı olmasıdır, yani

$$\exists c > 0 : \forall \xi \in [a,b) \rightarrow \left| \int\limits_0^\xi f(x)dx \right| \leq C \tag{2}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: $H(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx$ olsun. Bu durumda $H(\xi)$ artan fonksiyondur, gerçekten $\forall \xi_1, \xi_2 \in [a,b)$ $(\xi_1 > \xi_2)$ için

$$\begin{aligned} H(\xi_1) - H(\xi_2) &= \int\limits_a^{\xi_1} f(x)dx - \int\limits_a^{\xi_2} f(x)dx \\ &= \int\limits_{\xi 2}^{\xi 1} f(x)dx \geq 0, \text{ yani} \\ H(\xi_1) &\geq H(\xi_2) \end{aligned}$$

elde edilir,dolayısıyla $H(\xi)$ artandır. Şimdi, eğer $\int\limits_a^b f(x)dx$ integrali yakınsak ise tanım gereği

$$\lim_{\xi \to b^-} H(\xi) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

sonlu limiti var. Bu durumda monoton fonksiyon limiti teoremine göre

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sup_{\xi \in [a,b)} H(\xi)$$

olur. Bu durumda sup tanımı gereği $\forall\xi \in [a,b)$ için

$$|H(\xi)| \leq \int_a^b f(x)dx$$

olur. Böylelikle $C = \int_a^b f(x)dx$ alırsak;$\forall\xi \in [a,b)$ için,

$$\left|\int_a^\xi f(x)dx\right| \leq C$$

olur. Dolayısıyla (2) sağlanır.

Gereklilik ispatlandı. Şimdi yeterliiliği ispatlayalım.

Farzedelim ki, (2) sağlansın. Gösterelim ki $\int_a^b f(x)dx$ yakınsaktır. (2) sağlandığı için ve

$$H(\xi) = \int_a^b f(x)dx$$

monoton artan olduğu için monoton fonksiyonun limiti teoremi gereği

$$\lim_{\xi\to b^-} H(\xi) = \sup_{a<\xi<b} H(\xi)$$

mevcuttur. Bu ise $\int_a^b f(x)dx$ integralinin yakınsak olması demektir. Çünkü,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to b^-} \int_a^\xi f(x)dx = \lim_{\xi\to b^-} H(\xi)$$

dir. Teorem ispatlandı.

Teorem 2 (Karşılaştırma Teoremi):

$\forall x \in [a,b)$ için

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \tag{3}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

(a) $J_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ yakınsak ise $J_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$ de yakınsaktır;

(b) $J_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$ ıraksak ise $J_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ de ıraksaktır.

İspat:

(a) (3) den ve belirli integralin eşitsizlik özelliğinden $\forall \xi \in [a, b)$ için,

$$\int\limits_a^\xi f(x)dx \leq \int\limits_a^\xi g(x)dx \tag{4}$$

olur. Eğer $J_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ integrali yakınsak ise Teorem1'e göre

$$\exists C > 0 : \forall \xi \in [a, b) \rightarrow \left| \int\limits_a^\xi g(x)dx \right| \leq C$$

elde edilir. Bunu (4) de dikkate alırsak $\forall \xi \in [a, b) \rightarrow \left| \int\limits_a^\xi f(x)dx \right| \leq C$ elde ederiz. Ozaman Teorem1'e göre $J_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$ yakınsaktır.

(b) $J_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$ ıraksak olsun. Bu duruma da J_2 integrali yakınsak olsaydı, (a) durumuna göre J_1 de yakınsak olurdu. Ancak kabulümüze göre J_1 ıraksaktır. Bu çelişki J_2 nin de ıraksak olduğunu göstermektedir.

Örnek: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{1+x^6}}dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Karşılaştırma Teoremi'ni uygulayacağız.

$\forall x \in [1, +\infty)$ için

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{1+x^6}} \leq \frac{1}{x^{\frac{6}{5}}}$$

ve $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{6}{5}}}dx$ integrali yakınsaktır.O zaman karşılaştırma teoremine göre verilen integral de yakınsaktır.

Teorem 3: $\forall x \in [a,b)$ için

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0 \tag{5}$$

eşitsizlikleri sağlansın ve

$$f(x) \backsim g(x),\ x \to b^- \tag{6}$$

olsun. Bu durumda $J_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$ ve $J_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ integralleri aynı zamanda ya yakınsaktır ya da ıraksaktırlar.

İspat: (5) ve (6) dan açıktır ki

$$\lim_{\xi \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

dir.Bu durumda limit tanımı gereği,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in (\delta, b) \to \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \to \exists \delta = \delta(\frac{1}{2}) = c > 0 : \forall x \in (c,b) \to \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

elde ediyoruz. $g(x) > 0$ olduğundan buradan $\forall x \in (c,b)$ için,

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x) \tag{7}$$

bulunur.Böylelikle (7) eşitsizliğinin sağ tarafına göre, $\int\limits_c^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int\limits_c^b f(x)dx$ integrali de yakınsaktır.Sol tarafına göre ise $\int\limits_c^b f(x)dx$ integrali ıraksak ise $\int\limits_c^b g(x)dx$ integrali de ıraksaktır. Böylece, $\int\limits_c^b f(x)dx$ ve $\int\limits_c^b g(x)dx$ integrallerinin yakınsaklık karakterleri aynıdır. Genelleşmiş integralin özelliği gereği biliyoruz ki $\int\limits_a^b f(x)dx$ integralinin yakınsaklığı $a \leq c < b$ olmak üzere $\int\limits_c^b f(x)dx$ integralinin yakınsaklığı ile denktir. Böylelikle $\int\limits_a^b f(x)dx$ ve $\int\limits_a^b g(x)dx$ integrallerinin karakterleri aynıdır. İspat tamamlandı.

Sonuç: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $\forall\xi \geq a$ için $[a, \xi)$ $(a \geq 1)$aralığında Riemann anlamında integrallenebilir ve

$$f(x) \backsim \frac{A}{x^{\alpha}}, \ x \to +\infty (A \neq 0)$$

ise $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integrali $\alpha > 1$ için yakınsak $\alpha \leq 1$ için ıraksaktır.

Örnek: $J = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$ integralinin karakterini iceleyiniz.

Çözüm: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$için ayrı ayrı inceleyelim.

(a) $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda, $\alpha = 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Buna göre

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} = \frac{1}{x^{1+\frac{\delta}{2}}} g(x)$$

ve

$$g(x) = \frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}} \ln^{\beta} x}$$

şeklinde gösterebiliriz. Açıktır ki, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ dır.Buna göre $\exists x_0 \geq 2$ sayısı var ki, $\forall x \geq x_0$ için $0 < g(x) < 1$ dir. (limit tanımı gereği) Bu durumda $\forall x \geq x_0$ için $0 < f(x) < \frac{1}{x^{1+\frac{\delta}{2}}}$ olur. O zaman Karşılaştırma Teoremi'ne göre; $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ yakınsaktır, çünkü $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{\delta}{2}}} dx$ integrali yakınsaktır. $x_0 \geq 2$ olduğundan $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ in yakınsaklığı $\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsaklığı ile denktir.Böylelikle $\alpha > 1$ için verilen seri hep yakınsaktır.

(b) $\alpha = 1$ olsun Bu durumda $J = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x}$ dir.

$$J = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x} \overset{\ln x = t}{=} J = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}} \Longrightarrow$$

verilen integral $\alpha = 1$ için $\beta > 1$ için yakınsak, $\beta \leq 1$ iken ıraksaktır.

(c) $\alpha < 1$ olsun. $\alpha = 1 - \delta (\delta > 0)$ şeklinde yazalım. Bu durumda

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} = \frac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}} g(x), \ g(x) = \frac{1}{x^{-\frac{\delta}{2}} \ln^{\beta} x}$$

şeklinde yazalım.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{\delta}{2}}}{\ln^{\beta} x} = +\infty \left(\lim_{t\to 0^+} t^{\varepsilon} \ln t = 0 \text{ olmasından dolayı} \right)$$

olduğundan $\forall E > 0 \; \exists \delta = \delta_E > 0 : \forall x \geq \delta \to g(x) > E$ dir. Buna göre $E = 1$ $\exists \delta = x_0 \geq 2$ bulunur ki, $\forall x \geq x_0$ için $g(x) > 1$ olur. Böylelikle $\forall x \geq x_0$ için $f(x) > \dfrac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}$ olur. $0 < 1 - \frac{\delta}{2} < 1$ olduğundan $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}} dx$ ıraksaktır .Demek ki, $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ de ıraksaktır. Dolayısıyla, $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)dx$ ıraksaktır.

Sonuç: $J = \displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$ integrali $\alpha > 1$ veya $\alpha = 1, \beta > 1$ için yakınsak $\alpha < 1$ veya $\alpha = 1, \beta \leq 1$ için ıraksaktır.

Örnek: $J_1 = \displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(e^x - x)}{x^{\alpha}} dx$ ve $J_2 = \displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^{\alpha}} dx$ olsun. Biliyoruz ki J integrali ancak ve ancak J_1 ve J_2 integralleri yakınsak olduklarında yakınsaktır.

Çözüm: Önce J_1 integralini inceleyelim. J_1 integralinde $x = 0$ singüler nokta olduğundan

$$f(x) = \frac{\ln(e^x - x)}{x^{\alpha}}$$

fonksiyonunun $x \to 0^+$ iken asimptotik davranımını inceleyelim.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), x \to 0 \\
\ln(1+t) &= t + o(t), t \to 0 \\
\ln(e^x - x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) \\
&= \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0
\end{aligned}$$

Böylelikle,

$$\ln(e^x - x) \backsim \frac{x^2}{2}, x \to 0$$

dir. Buna göre;

$$f(x) = \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} \backsim \frac{1}{2x^{\alpha-2}}, x \to 0^+$$

dir. Böylelikle J_1 integrali $\alpha - 2 < 1$ için, yani $\alpha < 3$ ise J_1 integrali yakınsak, $\alpha \geq 3$ ise J_1 ıraksaktır.

J_2 integralinde singüler nokta $+\infty$ dur. Buna göre $f(x)$'i $x \to +\infty$ iken inceleyelim.

$$e^x - x = e^x(1 - xe^{-x}) = e^x(1 + o(1)), x \to +\infty$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\ln(e^x - x) &= \ln(e^x(1 + o(1))) \\
&= \ln e^x + \ln(1 + o(1)) \\
&= x + o(1),\ x \to +\infty, \\
\ln(e^x - x) &\backsim x,\ x \to +\infty, \\
f(x) &\backsim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}},\ x \to +\infty
\end{aligned}$$

Böylelikle J_2, $\alpha > 2$ için yakınsak $\alpha \leq 2$ için ıraksaktır.

Sonuç: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx = J_1 + J_2$ integrali $\alpha \in (2, 3)$ için yakınsak, diğer durumlarda ise ıraksaktır.

Örnek: $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int\limits_0^1 \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx, \\
J_2 &= \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx
\end{aligned}$$

olsun. Biliyoruz ki J integrali J_1 ve J_2 integralleri yakınsak olursa yakınsaktır.

(a) J_1 integralini inceleyelim.

$$x \to 0^+, \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt{\sqrt{x} + 1}},$$

$$\ln(1+t) \backsim t,\ t \to 0$$
$$\ln(1+u) \backsim \ln u,\ u \to \infty$$

asimptotik eşitliklerini kullanırsak $x \to 0^+$ için

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \backsim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}-\alpha}}, \alpha > 0 \\ \dfrac{\ln 2}{x^{\frac{1}{4}}}, \alpha = 0 \\ \dfrac{\alpha \ln x}{x^{\frac{1}{4}}}, \alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0$ ise $\frac{1}{4} - \alpha < 1$ olduğundan J_1 yakınsak,

$\alpha = 0$ ise , $\frac{1}{4} < 1$ olduğundan J_1 yakınsak,

$\alpha < 0$ ise

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}} dx \overset{\ln x = t}{=} \int_{-\infty}^0 \frac{te^t}{e^{\frac{t}{4}}} dt = \int_{-\infty}^0 te^{\frac{3}{4}t} dt$$

olduğundan iki kez kısmi integrasyon uygularsak

$$J_1 = \frac{4}{3} t.e^{\frac{3}{4}t} \mid_{-\infty}^0 - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{3}{4}t} dt = \frac{-16}{9}.e^{\frac{3}{4}t} \mid_{-\infty}^0 = \frac{-16}{9}$$

elde edilir. Böylelikle bu durumda J_1 integrali yakınsaktır. Sonuç olarak,tüm durumlarda J_1 integrali yakınsaktır.

(b) J_2 integralini inceleyelim.

$x \to +\infty$ için

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$
$$\backsim \sqrt{x}$$

olduğundan,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \backsim \begin{cases} \dfrac{\alpha \ln x}{x^{\frac{1}{2}}}, \alpha > 0 \\ \dfrac{\ln 2}{x^{\frac{1}{2}}}, \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \alpha < 0 \end{cases} \quad , x \to +\infty$$

Böylelikle, $\alpha \geq 0$ için J_2 ıraksak, $\alpha < 0$ ve $\frac{1}{2} - \alpha > 1$ ise yakınsaktır.Ayrıca, $\alpha < 0$ ve $\frac{1}{2} - \alpha \leq 1$ ise J_2 ıraksaktır. Böylelikle, $\alpha < -\frac{1}{2}$ iseJ_2 yakınsaktır. Sonuç olarak, $\alpha < -\frac{1}{2}$ ise J yakınsaktır. Diğer durumlar için ise ıraksaktır.

3.1 Genelleştirilmiş İntegraller İçin Cauchy Kriteri

Bu kesimde de önceki kesimlerde olduğu gibi üst sınırında singüleriteye sahip genelleştirilmiş integralleri ele alacağız. Diğer türden olan genelleştirilmiş integraller için özellikler benzer şekilde ifade edilir ve ispatlanır.

Teorem 4: $\int_a^b f(x)dx$ genelleştirilmiş integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki Cauchy koşulunun sağlanmasıdır:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \in (a,b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \rightarrow \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon \tag{1}$$

İspat: $\xi \in [a,b)$ için

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx \tag{2}$$

olsun. $J = \int_a^b f(x)dx$ integralinin yakınsak olması, tanım olarak $\xi \rightarrow b^-$ iken $F(\xi)$ nin sonlu limitinin var olması demektir. Fonksiyon limitinin varlığı için olan Cauchy Kriteri'ne göre ise, $\xi \rightarrow b^-$ iken $F(\xi)$ nin sonlu limitinin var olması

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (a,b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \rightarrow |F(\xi'') - F(\xi')| < \varepsilon \tag{3}$$

koşulunun sağlanması ile denktir. Böylelikle (3) koşulunun sağlanması J integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşuldur.

$$F(\xi'') - F(\xi') = \int_a^{\xi''} f(x)dx - \int_a^{\xi'} f(x)dx = \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx$$

olduğundan (3) koşulu da (1) koşulu ile denktir. İspat tamamlandı.

Sonuç: $\int\limits_a^b f(x)dx$ integralinin ıraksak olması için gerek ve yeter koşul

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta \in (a,b) \to \exists\xi', \xi'' \in (\delta, b) : \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx\right| \geq \varepsilon_0 \qquad (4)$$

olmasıdır.

Örnek: $J(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\alpha > 1$ ise $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ olduğundan J yakınsaktır. Gösterelim ki $\alpha \leq 1$ için J ıraksaktır.Bunun için (4) koşulu sağlanacak şekilde $\varepsilon_{0,}\xi', \xi''$ sayılarını bulalım.

$$\forall\delta \in (1, +\infty), \xi' = n\pi, \xi'' = 2n\pi (n \in \mathbb{N})$$

olarak seçelim. Açıktır ki δ ne kadar büyük olursa olsun, n 'yi her zaman öyle ayarlayabiliriz ki ($n\pi > \delta$ olacak şekilde alırız)

$$\xi', \xi'' \in (\delta, +\infty)$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx\right| &= \left|\int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx\right| = \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \geq \\
&\geq \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{2n\pi} \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x dx = \\
&= \frac{1}{4n\pi} \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4n\pi}(n\pi - 0) \\
&= \frac{1}{4} = \varepsilon_0
\end{aligned}$$

Dolayısıyla (4) sağlanır. O halde $\alpha \leq 1$ için J integrali ıraksaktır.

Not: $\alpha \leq 1$ için J integralinin ıraksak olmasından çıkıyor ki, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ integrali de $\alpha \leq 1$ için ıraksaktır. Gerçekten

$$|\sin x| \geq \sin^2 x$$