$(H_1 \cap H_2, o)$ bir alt gruptur. (Teoremden)

3 − $\forall a,b \in XHX^{-1} \Rightarrow (a = X o h_1 o X^{-1}, X \in G \wedge h_1 \in H) \wedge (b = X o h_2 o X^{-1}, X \in G, h_2 \in H)$

$$\Rightarrow a o b^{-1} = [X o h_1 o X^{-1}] o [X o h_2 o X^{-1}]^{-1}$$

$$= [X o h_1 o X^{-1}] o [(X^{-1})^{-1} o (X o h_2)^{-1}]$$

$$= [X o h_1 o X^{-1}] o [X o h_2^{-1} o X^{-1}]$$

$$= [(X o h_1) o (X^{-1} o X) o (h_2^{-1} o X^{-1})]$$

$$= (X o h_1) o e o (h_2^{-1} o X^{-1})$$

$$= X o (h_1 o h_2^{-1}) o X^{-1}$$

$$a o b^{-1} = X o (h_1 o h_2^{-1}) o X^{-1}, \; X \in G \wedge h_1 o h_2^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow a o b^{-1} \in XHX^{-1} \Rightarrow (XHX^{-1}, o) \text{ normal alt gruptur.}$$

− HALKA −

H boş olmayan bir küme olsun. ve bu kümede toplama ve çarpma diye adlandırılan iki (+) ve (·) işlemleri tanımlansın. Eğer,

H_1) (H, +) bir abel grubudur

H_2) H kümesi (·) işlemine göre kapalıdır.

H_3) H kümesinde (·) işleminin birleşme özelliği vardır.

H_4) (·) işleminin (+) işlemine göre dağılma özelliği vardır.

önermeleri doğru ise (H, +, ·) yapısı bir halkadır denir.

Örnek// $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkasıdır.

Tanım: (H, +, ·) bir halka olsun. H kümesinin (+) işlemine göre birim elemanına halkanın sıfırı denir. ve 0 veya e ile gösterilir.

Tanım: Halkanın (+) işlemine göre bir X elemanının ters elemanı −X sembolü ile gösterilir.

Teorem: (H, +, ·) bir halka olsun. Halkanın sıfırı 0 olmak üzere $\forall X \in H$ için $X.0 = 0.X = 0$ dır.

İspat// $0+0=0 \overset{\forall X \in H,}{\Rightarrow} X.(0+0) = X.0$ (her iki tarafı X ile çarparak)

$\Rightarrow X0 + X0 = X0$ ((·)nın (+) üzerine dağ. öz.)

$\Rightarrow (-X.0) + (X0 + X0) = (-X.0) + (X.0)$

$\Rightarrow [(-X.0) + X.0] + X.0 = 0 \Rightarrow 0 + X.0 = 0 \Rightarrow X.0 = 0$

Ödev// $0.x=0$ olduğunu gösteriniz.

Teorem: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.

1- $\forall x\in H,\ -(-x)=x$

2- $\forall x,y\in H,\ -(x+y)=(-x)+(-y)$

3- $\forall x,y\in H,\ x\cdot(-y)=(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$

4- $\forall x,y\in H,\ (-x)\cdot(-y)=xy$

İspat// 1- $\forall x\in H,\ (-x)+x=0$

$\Rightarrow [-(-x)]+(-x)=0$

$\Rightarrow -x+x=0 \land (-x)+(-(-x))=0$

$\Rightarrow -(-x)=x$

2- $\forall x,y\in H,\ (-x)+(x)=0 \land (-y)+y=0$

$\Rightarrow [(-x)+x]+[(-y)+y]=0+0$

$\Rightarrow (-x)+[x+(-y)]+y=0$

$\Rightarrow [(-x)+(-y)]+(x+y)=0$

$\Rightarrow -(x+y)=(-x)+(-y)$

3- $\forall x,y\in H,\ y+(-y)=0$

$\Rightarrow x.[y+(-y)]=x.0$

$\Rightarrow xy+x(-y)=0$

$\Rightarrow -(xy)=x(-y)=(-x)y$

4- $\forall x,y\in H,\ -(-xy)=(-x)(-y)$

$=x[-(-y)]=[-(-x)]=(-x)(-y)$

$(-x)(-y)=xy$

Tanım: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.

1- $(\cdot)$ işlemine göre birim eleman varsa halkaya birim elemanlı halka denir.

2- $(\cdot)$ " " değişme (komütatif) özelliği varsa, halkaya değişmeli (komütatif) halka denir.

3- $(\cdot)$ işlemine göre hem birim eleman hem de değişme özelliği varsa halkaya birim elemanlı değişmeli halka denir.

4- $(\cdot)$ işlemine göre bir $x \in H$ nin tersi varsa x^{-1} ile gösterilir.

Tanım: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.

1- Halkanın sıfırı 0 olmak üzere,

$(\exists a,b \in H,\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a.b = 0)$ önermesi doğru ise a'ya sıfırın sol böleni, b'ye sıfırın sağ böleni denir.

2- Bir a elemanı sıfırın hem sağ hem de sol böleni ise bu a elemanına sıfırın bir böleni denir.

3- Değişmeli ve birimli bir halkada sıfırın bölenleri yoksa, halkaya tamlık bölgesi denir.

H'nin tamlık bölgesi olması için :

$[\forall x,y \in H,\ x.y = 0 \iff (x = 0 \vee y = 0)]$

Tanım: $(H,+,\cdot)$ ve $(T,\oplus,\odot)$ iki halka olsunlar. Ve $f: H \to T$ bir fonksiyon olsun.

1- $\forall x,y \in H,\ f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$ ve $f(x.y) = f(x) \odot f(y)$ özellikleri sağlanıyorsa, f'ye halka homomorfizmi denir.

2- f birebir ve örten ise halka homomorfizmine, halka izomorfizmi denir.

3- $H = T$ ise halka izomorfizmine halka otomorfizmi denir.

Problemler :

1- $x,y \in Z$, $x o y = x+y-1$ $x * y = x+y-xy$ ise $(Z, o, *)$ yapısının bir halka olup olmadığını araştırın.

2- $(A,+)$ yapısı değişmeli bir grup olsun. $\forall x,y \in A$ için $x o y = x$ olduğuna göre, $(A,+,o)$ yapısı bir halka mıdır?

3- $H = \{x : x = a + b\sqrt{2},\ a,b \in Z\}$ olduğuna göre $\mathbb{R}$'de tanımlı $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine göre $(H,+,\cdot)$ yapısı bir halka mıdır?

4- $(H,+,\cdot)$ değişmeli bir halka olsun. $\forall x,y \in H$ için $x o y = x.y + y.x$ ise $(H,+,o)$ yapısının da değişmeli halka olduğunu ispat edin.

5- $(x,y),(u,v) \in Z^2 = Z \times Z$ olmak üzere $(x,y) o (u,v) = (x+u, y+v)$ ve $(x,y) * (u,v) = (xu - yv, xv + yu)$ ise $(Z^2, o, *)$ yapısının bir halka olduğunu gösterin.

6- $H=\left\{A : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ olduğuna göre matrisler kümesinde tanımlanan (+) ve (·) işlemlerine göre $(H,+,\cdot)$ yapısının bir halka olduğunu ispat edin. Matrisler halkasının bir tamlık bölgesi olmadığını ispatlayı

7- $(H_1,+,\cdot), (H_2,+,\cdot), (H_3,+,\cdot)$ üç halka olsun. Eğer $f : H_1 \longrightarrow H_2$ ve $g : H_2 \longrightarrow H_3$ halka homomorfizmi (izo) iseler $gof : H_1 \longrightarrow H_3$ 'de halka homomorfizmi (izo) midir?

Çözümler :

1- (Z,o) bir abel grubudur ?

$x,y \in Z \quad xoy = x+y-1$

- $x,y \in Z,\ xoy \in H$ kapalılık öz. vardır.
- $\forall x,y,z \in Z, (xoy)oz = (x+y-1)oz$

$$= (x+y-1)+z-1 = x+y+z-2$$

$$xo(yoz) = x+y+z-2$$

$$\Rightarrow (xoy)oz = xo(yoz)$$ değişme öz. vardır.

- $\forall x \in Z,\ xoe = eox = x \quad e=1 \in Z$ birim eleman.
- $\forall x \in Z,\ xoy = yox = e = 1 \quad y=-x$

$xoy = 1 \Rightarrow x+y-1=1 \Rightarrow y = \underline{2-x} = -x$ ters eleman.

- $\forall x,y \in Z,\ xoy = yox$

H_2) $\forall x,y \in Z,\ x * y = x+y-xy \in Z$ kapalılık öz. vardır.

H_3) $\forall x,y,z \in Z,\ (x*y)*z = (x+y-xy)*z$

$$= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)\cdot z$$

$$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$x*(y*z) = x*(y+z-yz)$$

$$= x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)$$

$$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$(x*y)*z = x*(y*z)$ (birl. öz. vardır)

H_4) $\forall x,y,z \in H,\ x*(yoz) \stackrel{?}{=} (x*y)o(x*z)$

$$(xoy)*z \stackrel{?}{=} (x*z)o(y*z)$$

6- $H=\{A: A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ $(H,+,\cdot)$

$H_1)$ $(H,+)$ bir abel grubudur.

1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{pmatrix} \in H$

2) $A+B=B+A$

3) $(A+B)+C=A+(B+C)$

4) $e=?$ $\forall A\in H \wedge \exists e\in H$ $e+H=H+e=A$

$$e=0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$$

5) $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$H_2)$ $\forall A,B\in H$, $A.B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1 \\ ca_1+dc_1 & cb_1+dd_1 \end{pmatrix} \in H$

$H_3)$ $\forall A,B,C\in H$, $(A.B).C=A(B.C)$

$H_4)$ $\forall A,B,C\in H$, $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

$\forall A\in H$, $\exists e\in H$, $A.e=e.A=1$

7- $(H_1,+,\cdot)$, $(H_2,+,\cdot)$, $(H_3,+,\cdot)$ üç halka,

$f: H_1\rightarrow H_2$ $g: H_2\rightarrow H_3$ halka izomorfizmi iseler

$g\circ f: H_1\rightarrow H_3$ de halka izomorfizmidir ?

İspat 1// $\forall x,y\in H_1$ $(g\circ f)(x+y)=g[f(x+y)]$ bileşke tanımı

$=g[f(x)+f(y)]$

$=g(f(x))+g(f(y))$

$=(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y)$

iki özellikten. gof bir halka homomorfizmidir.

2// $(g\circ f)(x.y)=g[f(x.y)]$ bileşke tanımı

$=g[f(x).f(y)]$ f halka izom. old. için

$=g(f(x)).g(f(y))$ g " "

$=(g\circ f)(x).(g\circ f)y$ bileşke tanımı

3// gof, 1:1 ve örtendir. gof bir halka izomorfizmidir.

Tanım: (cisim)

Birimli ve değişimli bir $(F,+,\cdot)$ halkasında halkanın sıfırı hariç F nin her elemanının çarpma işlemine göre tersi varsa halkaya cisim denir.

Buna göre $(F,+,\cdot)$ yapısının cisim olabilmesi için :

c_1) $(F,+)$ Abel grubu olmalıdır.

c_2) $(F\setminus\{0\},\cdot)$ Abel grubudur.

c_3) $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek // $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ yapısı bir cisimdir. Bu cisme rasyonel sayılar cismi denir.

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ " " " . " " reel " " " .

Tanım : (Vektör Uzayı) :

$(V,\oplus)$ yapısı bir abel grubu, $(F,+,\cdot)$ yapısı bir cisim olsun.

$$\left.\begin{aligned} \odot : F\times V &\longrightarrow V \\ (a,\alpha) &\longrightarrow (a\odot\alpha) \end{aligned}\right\}\ \text{Dış işlemi veriliyor.}$$

$$\left.\begin{aligned} \oplus : V\times V &\longrightarrow V \\ (x,y) &\longrightarrow (x\oplus y) \end{aligned}\right\}\ \text{iç işlem}$$

Eger,

V_1) $\forall a\in F \wedge \forall\alpha\in V,\ a\odot\alpha\in V$ (kapalılık)

V_2) $\forall a\in F \wedge \forall\alpha,\beta\in V,\ a\odot(\alpha\oplus\beta)=(a\odot\alpha)\oplus(a\odot\beta)$ (soldan dağılma)

V_3) $\forall a,b\in F \wedge \forall\alpha\in V,\ (a+b)\odot\alpha=(a\odot\alpha)\oplus(b\odot\alpha)$ (sağdan dağılma)

V_4) $\forall a,b\in F \wedge \forall\alpha\in V,\ (a.b)\odot\alpha = a\odot(b\odot\alpha)=b\odot(a\odot\alpha)$ (birleşme)

V_5) $\forall\alpha\in V \wedge 1\in F,\ 1\odot\alpha=\alpha$ (birim eleman)

önermeleri doğru ise $(V,\oplus)$ yapısı $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir.

[$((V,\oplus),(F,+,\cdot),\odot)$ yapısı bir vektör uzayıdır.]

Tanım : (Cebir) :

$((V,\oplus),(F,+,\cdot),\odot)$ bir vektör uzayı olsun. V kümesinde ,

$\otimes : V\times V \longrightarrow V$

$(u,v)\longrightarrow(u\otimes v)$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V kümesi $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde bir cebirdir denir.

C_{e_1}) $\forall a\in F \wedge \forall u,v\in V,\ (a\odot u)\otimes v = a\odot(u\otimes v)$

$Ce_2)$ $\forall u, v, w \in V,\ (u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$

$Ce_3)$ $\forall u, v, w \in V,\ u \otimes (v \oplus w) = u$

$((V, \oplus)\ (F, +, \cdot), \odot, \otimes)$ yapısı bir cebirdir.

Doğal Sayılar :

Teorem : Bir kümeler ailesinde tanımlanan "eşit güçlü" olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat // $\mathcal{A}$ kümeler ailesi verilsin. β $\mathcal{A}$ da bir bağıntı ; eşit güçlü olma bağıntısı

$A, B \in \mathcal{A}$ $\quad (A,B) \in \beta \Rightarrow$ A kümesi B kümesi ile eşit güçlüdür.

1- $\forall A \in \mathcal{A}, I_A : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A$

$$x \longrightarrow I_A(x) = x \quad \Rightarrow (A,A) \in \beta \quad \text{(yansıma)}$$

2- $A, B \in \mathcal{A}, \ (A,B) \in \beta \Rightarrow \exists f, \ f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \quad \Rightarrow (B,A) \in \beta$ (simetriktir.)

3- $A, B, C \in \mathcal{A}, \left[(A,B) \in \beta \wedge (B,C) \in \beta\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\left(\exists f, f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B\right) \wedge \left(\exists g ; g : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C\right)\right]$

$\Rightarrow \left(g o f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C\right) \Rightarrow (A,C) \in \beta$ (geçişme özelliği)

Problemler :

1- $A = \{a, b\}$ $\quad B = \{x, y, z\}$ olsun. B kümesinin A kümesine eşit güçlü olan tüm alt kümelerini bulun.

2- A boş olmayan bir küme olsun. A ile $A \times \{a\}$ kümesinin eşit güçlü olduğunu ispat edin.

3- A, B, C, D kümeler olsun. $A \cap C = \emptyset$ ve $B \cap D = \emptyset$ olmak üzere $A \underset{\text{eşit güçlü}}{\sim} B$ ve $C \sim D$ ise $(A \cup C) \sim (B \cup D)$ olduğunu ispat edin.

4- A, B, C, D kümeler olsun. $A \sim B \wedge C \sim D$ ise $(A \times C) \sim (B \times D)$ olduğunu ispat edin.

Çözümler :

1- $\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}$

2- $f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B$

$$x \longrightarrow f(x) = (x, a)$$

i) $\forall x_1, x_2 \in A, \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \overset{?}{=} x_2$

$\forall x_1, x_2 \in A, \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1, a) = (x_2, a) \Rightarrow x_1 = x_2$ dir.

$\Rightarrow f, \ 1:1$ dir.

ii) $\forall y \in A \times \{a\} \Rightarrow (x_1, a) \in A \times \{a\}$ $f(x) = y$, $x \in A$ f, örtendir.

3- $(A \cap C) = \emptyset \wedge B \cap D = \emptyset$, $(A \sim B \wedge C \sim D) \Rightarrow [(A \cup C) \sim (B \cup D)]$

$$(A \sim B \wedge C \sim D) \Rightarrow \left[\left(\exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B\right) \wedge \left(\exists g : C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} D\right)\right]$$

$x \longrightarrow f(x)$ $\quad$ $x \longrightarrow g(x)$

$F : A \cup C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \cup D$

$$x \longrightarrow F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise} \\ g(x), & x \in C \text{ ise} \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x, & x > -1 \\ x^2, & x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \in (-1, \infty) \\ x^2, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

4- $(A \sim B \wedge C \sim D) \Rightarrow \left[\left(\exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B\right) \wedge \left(\exists g : C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} D\right)\right]$

$(A \times C) \sim (B \times D)$ $\quad$ $x \longrightarrow f(x)$ $\quad$ $x \longrightarrow g(x)$

$F : A \times C \longrightarrow B \times D$

$(x, y) \longrightarrow F(x, y)$

i) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times C$, $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$

$\Rightarrow (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(x_2))$

$\Rightarrow [f(x_1) = f(x_2) \wedge g(y_1) = g(y_2)]$ (sıralı ikili eşitliği tanımından)

$\Rightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$ f, 1:1 dir.

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ikililerin eşitliğinden.

$\Rightarrow F$ 1:1 dir.

ii) (F örtendir ?)

Tanım: (sonlu küme, sonsuz küme)

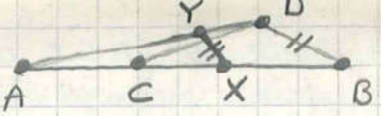
En az bir öz alt kümesine eşit güçlü olan kümeye sonsuz küme denir. Sonsuz olmayan kümeye de sonlu küme denir.

$f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A_1 \subset A$ $\quad$ A sonsuz kümedir.

$f : A \xrightarrow{1:1} A$

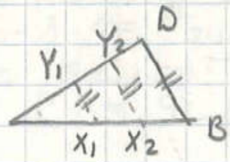
Örnek// Bir $\overline{AB}$ doğru parçasının belirttiği (bu doğru parçası üzerindeki noktaların) kümesi sonsuz kümedir.

İspat// $C \in \overleftrightarrow{AB} \wedge D \notin \overleftrightarrow{AB}$



$f : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \overleftrightarrow{AD}$

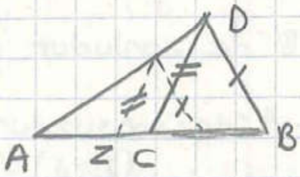
$X \longrightarrow f(X) = y \ , \ \overline{XY} \parallel BD$



$\forall X_1, X_2 \in \overline{AB}, \ X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2)$

$\Rightarrow Y_1 \neq Y_2$ 1:1 dir. ve örtendir.

$g : \overleftrightarrow{AD} \longrightarrow \overleftrightarrow{AC}$



$Y \longrightarrow g(Y) = Z \ , \ \overline{YZ} \parallel \overline{CD}$

$gof : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \overleftrightarrow{CD}$

$X \longrightarrow (gof)(x) = Z \qquad \overleftrightarrow{CD} \subset \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB}$ sonsuz kümedir.

Teorem: Boş küme sonlu kümedir.

İspat// Boş kümenin hiçbir özalt kümesi yoktur, sonludur.

Teorem: $\{a\} = A$ kümesi sonludur.

İspat// A'nın boş kümeden farklı bir özalt kümesi yoktur. A bir özalt kümesine esit güçlü olamaz. A sonludur.

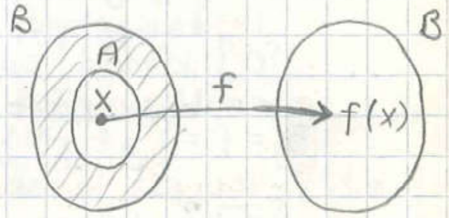
Teorem: A ve B iki küme ve $A \subseteq B$ olsun. A sonsuz küme ise B'de sonsuzdur.

İspat// A sonsuz küme $\Rightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A_1 \subset A \Rightarrow f : A \longrightarrow \underbrace{f(A)}_{A_1} \subset A$

$A \subseteq B$ B de sonsuzdur.

$\exists g : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B_1 \subset B \qquad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise} \\ x, & x \in B \setminus A \text{ ise} \end{cases} \Rightarrow$ 1:1 ve örtendir.

$f(A) = g(A)$ ve $g(A) \subseteq g(B)$



$f(A) = g(A) \neq \emptyset$

$g(B) = g(A \cup (B \setminus A)) \qquad g(A) \cup g(B \setminus A) = f(A) \cup B \setminus A$

$x \in B \setminus A \ , \ g(x) = x \qquad I B \setminus A \quad g(B \setminus A) = ?$

$Ic : C \longrightarrow C$

$x \longrightarrow Ic(x) = x \rightarrow Ic(C) = C$

$g(B) = f(A) \cup (B \setminus A) \subseteq g(B) \cup (B \setminus A) \ , \ g(B) \subset B$

Sonuç olarak, $g : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} g(B) \subseteq C$ o halde B sonsuzdur.

Teorem: A ve B iki küme ve $A \subseteq B$ olsun. B sonlu ise A'da sonludur.

İspat// $A \subseteq B$ olsun.

A $\underbrace{\text{sonsuz}}_{p}$ $\Rightarrow$ B $\underbrace{\text{de sonsuzdur.}}_{q}$ $(p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p')$

$p \Rightarrow q$ (B sonlu ise A da sonludur.)

Sonuç: A ve B iki küme ve $A \subseteq B$ olsun.

1- A sonlu ise B'de sonludur. (Doğru olmayabilir.)

2- B sonsuz ise A'da sonsuzdur. (Doğru olmayabilir.)

Teorem: En az biri sonlu olan iki kümenin kesişimi de sonludur.

İspat// A ve B iki küme ve A sonlu olsun. $A \cap B$ de sonludur.

$A \cap B \subseteq A$ ve A sonlu olduğundan $A \cap B$ de sonludur.

Teorem: A ve B iki küme ve A sonlu ise $A \setminus B$ de sonludur.

İspat// $A \setminus B \equiv A \cap B' \subseteq A$ ve A sonlu olduğuna göre,

$A \cap B'$ de, yani $A \setminus B$ de sonludur.

Teorem: A bir küme ve $a \in A$ ise, A sonsuz küme ise $A \setminus \{a\}$ da sonsuzdur.

(Sonsuz bir kümeden sonlu sayıda elemanın atılmasıyla elde edilen kümeye de sonsuzdur denir.)

Doğal Sayılar Kümesi

$\mathcal{A}$ kümeler ailesinde eşit güçlü olma bağıntısına göre elde edilen denklik sınıflarını düşünelim. $X \in \mathcal{A}$ nın denklik sınıfı ;

$\overline{X} = \{ y : y \sim X \}$, $\emptyset$ denklik sınıfı ; $\overline{\emptyset} = 0 = \{ y : y \sim \emptyset \}$ $\quad \emptyset = 0$

$\{0\}$ kümesi sonludur. (Çünkü tek elemanı olan kümeler eşit güçlüdür.)

$\overline{\{0\}} = 1 = \{ y : y \sim \{0\} \}$

$\overline{\{0,1\}}$ kümesi sonludur.

$\Rightarrow \overline{\{0,1\}} = 2 = \{ y : y \sim \{0,1\} \}$

$\overline{\{0,1,2\}}$ kümesi sonludur.

$\Rightarrow \overline{\{0,1,2\}} = 3 = \{ y : y \sim \{0,1,2\} \}$

(Devamı, S: 195'te)

Tamsayılar :

$a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x+a=b$ denkleminin doğal sayılar kümesinde her zaman çözümü olmayabilir. $a \leq b$ ise $\mathbb{N}$ de çözümü vardır.

Tanım: $(a,b),(c,d) \in N \times N$ olsun. Eğer $a+d=b+c$ ise bu ikililere denktirler denir ve $(a,b) \sim (c,d)$ yazılır.

$$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a+d=b+c$$

Örnek // 1) $(3,2), (4,3)$ ikilileri denk midir ?

$$3+3 \overset{?}{=} 2+4 \Rightarrow 6=6 \quad (3,2) \sim (4,3)$$

2) $(3,2), (4,5)$

$$3+5=8 \quad 2+4=6 \quad 8 \neq 6 \quad (3,2) \not\sim (4,5)$$

Teorem: $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de tanımlı

$$\boxed{(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat // i- $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$a+b=b+a \Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$ yansıma öz. var. //

ii- $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow b+c=a+d \Rightarrow c+b=d+a$

$\Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$ simetri öz. var. //

iii- $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$[(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)] \Rightarrow [a+d=b+c \wedge c+f=d+e]$ bağıntı tanım

$\Rightarrow (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e)$ taraf tarafa toplayarak

$\Rightarrow (a+f)+(c+d)=(b+e)+(c+d)$ (+) işleminin değiş. ve birl. öz.

$\Rightarrow (a+f)=(b+e)$ (+) işl. $\mathbb{N}$ de sadel. öz.

$\Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$ geçişme öz. var. //

Bu bağıntı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de denklik bağıntısıdır.

"$\sim$" denklik bağıntısına göre (a,b) elemanının denklik sınıfını $\overline{(a,b)}$ ile gösterelim.

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (a,b)\}$$

Örnek// ① $(\overline{0,0}) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (0,0)\}$

$(x,y) \sim (0,0) \Rightarrow x+0 = y+0 \Rightarrow x = y$

$(\overline{0,0}) = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots,(a,a),\ldots\}$

② $(\overline{1,0}) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (1,0)\}$

$(x,y) \sim (1,0) \Rightarrow x+0 = y+1 \Rightarrow x = y+1$

$(\overline{1,0}) = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots,(a+1,a),\ldots\}$

③ $(\overline{2,4}) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (2,4)\}$

$(x,y) \sim (2,4) \Rightarrow x+4 = y+2 \Rightarrow x+2 = y$

$(\overline{2,4}) = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots,(a,a+2),\ldots\}$

Tanım: $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de tanımlanan "$\sim$" denklik bağıntısına göre elde edilen $(\overline{a,b})$ denklik sınıflarından herbirine bir tamsayı denir. Bu sayıların kümesine de tamsayılar kümesi denir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

Örnek// $(\overline{0,0}), (\overline{3,2}), (\overline{0,4}), (\overline{4,3}), (\overline{1,0})$ denklik sınıflarının herbiri bir tamsayı göstermektedir.

Eşitlik:

$(\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

$\Leftrightarrow a+d = b+c$

Örnek// $(\overline{1,2}), (\overline{3,4})$ tamsayıları eşitmidirler?

$1+4 = 2+3 \Rightarrow (\overline{1,2}) = (\overline{3,4})$

Tanım: (Toplama İşlemi):

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$[(\overline{a,b}),(\overline{c,d})] \longrightarrow (\overline{a,b}) + (\overline{c,d}) = (\overline{a+c, b+d})$

Tanım: (Çarpma İşlemi):

$\bullet : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$[(\overline{a,b}),(\overline{c,d})] \longrightarrow (\overline{a,b})(\overline{c,d}) = (\overline{ac+bd, ad+bc})$

Teorem: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ matematik yapısı birimli ve değişimli bir halkadır.

İspat// 1) a) $(\mathbb{Z},+)$ yapısı bir abel grubudur.

$\forall (\overline{a,b}) \in Z$ için $(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{x,y}) + (\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$, $\exists (\overline{x,y}) \in Z$

$(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{a+x, b+y}) = (\overline{a,b})$ + işl. tanımı

$\Rightarrow (a+x, b+y) \sim (a,b)$ eşitlik tanımı

$\Rightarrow (a+x)+b = (b+y)+a$ denklik tanımı

$\Rightarrow x=y$ değ, bir, sad öz.

$\Rightarrow e = (\overline{x,x}) \in Z$ birim eleman vardır.

(b) Ters eleman :

$\forall (\overline{a,b}) \in Z$, $\exists (\overline{u,v}) \in Z$, $(\overline{a,b}) + (\overline{u,v}) = (\overline{u,v}) + (\overline{a,b}) = (\overline{x,x})$

$(\overline{a,b}) + (\overline{u,v}) = (\overline{x,x}) \Rightarrow (\overline{a+u, b+v}) = (\overline{x,x})$

$\Rightarrow (a+u, b+v) \sim (x,x)$

$\Rightarrow (a+u)+x = (b+v)+x$

$\Rightarrow (u+a) = (v+b)$

$\Rightarrow (u,v) \sim (b,a)$

$\Rightarrow (\overline{u,v}) = (\overline{b,a})$

$\Rightarrow (\overline{u,v}) = -(\overline{a,b}) = (\overline{b,a})$

2) Çarpma işlemi : birim eleman

$\forall (a,b) \in Z$, $(\overline{a,b}) \cdot (\overline{x,y}) = (\overline{x,y}) \cdot (\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$ olacak şekilde $(\overline{x,y}) \in Z$ var mıdır?

$(\overline{a,b}) \neq (\overline{x,x})$ olsun. $\Rightarrow (a,b) \not\sim (x,x) \Rightarrow a+x \neq b+x \Rightarrow a \neq b$

$\Rightarrow (a<b \lor b<a)$

i- $b<a$ olsun. $\Rightarrow (\overline{a,b}) \cdot (\overline{x,y}) = (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (\overline{ax+by, ay+bx}) = (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (ax+by, ay+bx) \sim (a,b)$

$\Rightarrow (ax+by)+b = (ay+bx)+a$

$\Rightarrow ax - bx = ay - by + a - b$

$\Rightarrow (a-b)x = (a-b)(y+1)$

$\Rightarrow x = y+1$

$\Rightarrow e = (\overline{x,y}) = (\overline{y+1,y})$

ii- $a<b \Rightarrow e = (\overline{y+1,y})$ dir.

3) $\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}), (\overline{e,f}) \in Z$

$(\overline{a,b})\left[(\overline{c,d}) + (\overline{e,f})\right] \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{c,d}) + (\overline{a,b})(\overline{e,f})$ • nın + üz. sol. değ. öz.

$\left[(\overline{a,b}) + (\overline{c,d})\right].(\overline{e,f}) \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{e,f}) + (\overline{c,d}) + (\overline{e,f})$ • nın + üz sağ. değ. öz.

Teorem : $\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}), (\overline{x,y}) \in Z$

i- $(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{c,d}) + (\overline{x,y}) \Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$ Z de + işl. sad. öz.

ii- $x \neq y$ için $(\overline{a,b}).(\overline{x,y}) = (\overline{c,d}).(\overline{x,y}) \Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$

iii- $(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Rightarrow (\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{c,d})(\overline{x,y})$

İspat 1// $(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{c,d}) + (\overline{x,y})$

$\Leftrightarrow (\overline{a+x, b+y}) = (\overline{c+x, d+y})$ eşitlik tanımı

$\Leftrightarrow (a+x, b+y) \sim (c+x, d+y)$ denklik tanımı

$\Leftrightarrow (a+x) + (d+y) = (b+y) + (c+x)$ denklik tanımı

$\Leftrightarrow (a+d) + (x+y) = (b+c) + (x+y)$ + işl. birl. değ. öz.

$\Leftrightarrow a+d = b+c$ (+) işl. sadeleşt. öz.

$\Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$ ~~eşitlik~~ denklik tanımı.

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$ eşitlik tanım.

2// $x \neq y \Rightarrow$ i- $x > y$ V ii- $y > x$ ödev

i- $x > y$ olsun.

$\Leftrightarrow \exists k \in N,\ x = y + k$ IN de eşitsizlik tanımı.

$\Leftrightarrow (\overline{x,y}) = (\overline{y+k, y})$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}).(\overline{x,y}) = (\overline{c,d}).(\overline{x,y})$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}).(\overline{y+k,y}) = (\overline{c,d}).(\overline{y+k,y})$

$\Leftrightarrow \left[\overline{a(y+k) + by,\ ay + b(y+k)}\right] = \left[\overline{c(y+k) + dy,\ cy + d(y+k)}\right]$

$\Leftrightarrow \left[a(y+k) + by,\ ay + b(y+k)\right] \sim \left[c(y+k) + dy,\ cy + d(y+k)\right]$ eşitlik tanımı

$\Leftrightarrow \left[\cancel{ay} + ak + \cancel{by}\right] + \left[\cancel{cy} + \cancel{dy} + dk\right] = \left[\cancel{ay} + \cancel{by} + bk\right] + \left[\cancel{cy} + ck + \cancel{dy}\right]$

$\Leftrightarrow (a+d)k = (b+c)k$

$\Leftrightarrow a+d = b+c$

$\Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$

Teorem: $(Z,+,\cdot)$ halkası bir tamlık bölgesidir.

ispat// $\forall (\overline{x,y}) \in Z,\ (\overline{x,y}).(\overline{a,a}) = (\overline{xa+ya,\ xa+ya}) = (\overline{a,a})$

$\Rightarrow (\overline{x,y})(\overline{a,a}) = (\overline{a,a}) \qquad (x.0=0)$

$\forall (\overline{x,y}),(\overline{u,v}) \in Z,\ (\overline{x,y}).(\overline{u,v}) = (\overline{a,a}) \overset{?}{\Rightarrow} [(\overline{x,y}) = (\overline{a,a})] \vee [\underbrace{(\overline{u,v}) = (\overline{a,a})}_{\text{ödev}}]$

Kabul edelim ki, $(\overline{x,y}) \neq (\overline{a,a})$ olsun. (ödev)

Problemler:

$(\overline{a,b}) + (\overline{b,a}) \underset{=(\overline{0,0})}{=} ?$ $\quad (\overline{a,a-1}) + (\overline{a,a-2}) = ?$ önermelerinin doğru olması için ? yerine ne yazılmalı?

$a,b,x,r \in N,\ (\overline{a+x,x}) = (\overline{a+1,1}),\ (\overline{a,b}) + (\overline{r,r}) = (\overline{a,b})$

$(\overline{a,b})(\overline{r,r}) = (\overline{r,r})$

Teorem: $(\overline{a,b}) \in Z$ olsun $\forall x \in N$ ve bir $k \in N$ için

1- $(\overline{a,b}) = (\overline{x+k,x}) \Leftrightarrow a = b+k$
2- $(\overline{a,b}) = (\overline{x,x}) \Leftrightarrow a = b$
3- $(\overline{a,b}) = (\overline{x,x+k}) \Leftrightarrow b = a+k$

önermelerinden sadece birisi doğrudur.

ispat// 1- $(\overline{a,b}) = (\overline{x+k,x}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (x+k,x)$ (Eşitlik $\Leftrightarrow$ denklik tanımı)

$\Rightarrow a+x = b+(x+k)$ denklik tanımı

$\Rightarrow a = b+k$ tamsayılarda (+) işl. sad. öz.

2- $(\overline{a,b}) = (\overline{x,x}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (x,x)$

$\Rightarrow a+x = b+x$

$\Rightarrow a = b$

$(\overline{a,b}) = (\overline{x,x+k}) \Rightarrow (a,b) \sim (x,x+k)$

$\Rightarrow a+(x+k) = b+x$

$\Rightarrow a+k = b$

- $a,b \in N$ veriliyor. $\Rightarrow a>b,\ a=b,\ a<b$ ancak birisi doğrudur.

$a>b \Rightarrow \exists k \in N,\ a = b+k$

$a=b \Rightarrow \exists k \in N\ \ a=b$

$a<b \Rightarrow \exists k \in N\ \ b = a+k$ dan sadece birisi doğrudur.

$\Rightarrow$ 1,2,3 den sadece birisi doğrudur.

Sonuçlar: $(a,b) \in Z$ olsun.

1- $a > b$ ise $(\overline{a,b}) = (\overline{b+k,b}) = (\overline{k,0}) = (\overline{a-b,0})$

$$\Rightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{a-b,0})$$

2- $a = b$ ise $(\overline{a,b}) = (\overline{0,0}) = (\overline{a,a})$

3- $a < b$ ise $(\overline{a,b}) = (\overline{0,b-a})$ ile gösterilebilir.

Teorem: $Z^* = \{ (\overline{a,b}) : (\overline{a,b}) \in Z \wedge a \geq b \}$ olsun. $(Z^*, +, \cdot)$ matematik yapısı $(N, +, \cdot)$ matematik yapısına izomorftur.

İspat// $f : Z^* \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad (\overline{a,b}) \in Z^* \Rightarrow (\overline{a,b}) \in Z \wedge a \geq b$

$$(\overline{a,b}) = (\overline{a-b,0}) = (\overline{k,0}) \text{ , } k \in \mathbb{N}$$

$(\overline{k,0}) \longrightarrow f(\underbrace{\overline{k,0}}_{x}) = k$ olsun

$$f(x) = k$$

I) $\forall (\overline{a,0}), (\overline{b,0}) \in Z^*$ için

$(\overline{a,0}) \neq (\overline{b,0}) \Rightarrow (a,0) \not\sim (b,0)$

$\Rightarrow a + 0 \neq 0 + b \Rightarrow a \neq b$

$\Rightarrow f(\overline{a,0}) \neq f(\overline{b,0}) \Rightarrow f$ 1:1 dir.

II) $\forall y \in \mathbb{N}$ için $\exists x \in Z^*$, $f(x) = y$, $x = (\overline{y,0}) \in Z^*$ f örtendir.

III) $\forall (\overline{a,0}), (\overline{b,0}) \in Z^*$, $f[(\overline{a,0}) + (\overline{b,0})] \stackrel{?}{=} f[(\overline{a,0})] + f[(\overline{b,0})]$

$f[(\overline{a,0}) + (\overline{b,0})] = f[(\overline{a+b,0+0})$ Z de (+) işl. tanımı

$= f[(\overline{a+b,0})]$

$= a+b$ fonksiyon tanımı.

$= f[(\overline{a,0})] + f[(\overline{b,0})]$

IV) $f[(\overline{a,0}) \cdot (\overline{b,0})] = f[(\overline{ab + 0 \cdot 0, a0 + 0b})]$

$= f[(\overline{ab,0})] = ab$

$= f[(\overline{a,0})] \cdot f[(\overline{b,0})]$

$Z^* \sim \mathbb{N}$

$\underset{\text{tamsayı}}{(\overline{x,0})} = \underset{\text{doğalsayı}}{x}$ $\qquad \underset{a>b}{(\overline{a,b})} = (\overline{a-b,0}) = a-b$

$(\overline{1,0}) = (\overline{r+1,r}) = 1 \qquad (\overline{0,0}) = 0$

Tanım: a) $\overline{(a,b)} \in Z$ olsun. $a>b$ ise $\overline{(a,b)}$ tamsayısına pozitif tamsayı denir ve $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)} = a-b$

b) $a=b$ ise $\overline{(a,b)}$ tamsayısına sıfır denir ve $\overline{(a,b)}=0$

c) $b>a$ ise $\overline{(a,b)}$ tamsayısına negatif tamsayı denir. $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)} = -(b-a)$ şeklindedir. Buna göre pozitif tamsayıların kümesini Z^+, negatif tamsayıların kümesini Z^- ile gösteririz.

$$\mathbb{N} = Z^+ \cup \{0\}, \quad Z = \mathbb{N} \cup Z^- = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$$

$$\overline{(x,0)} = x, \quad \overline{(0,y)} = -y$$

$$Z = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$$

Tanım: (Çıkarma işlemi):

$x,y \in Z$ olsun. $x+(-y)$ tamsayısına x ve y tamsayılarının farkı (x ten y nin farkı) denir ve $x-y$ ile gösterilir. $x-y = x+(-y)$

Farkı bulmak için yapılan işleme çıkarma işlemi denir.

Teorem: $\forall x,y,z \in Z$ için,

a- $x-y = x+(-1)y$

b- $z(x-y) = (zx)-(zy)$

c- $(x-y)z = (xz)-(yz)$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ (·) nın (-) üz. dağ. öz.

İspat// a) $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)} \Rightarrow -y = \overline{(d,c)} \Rightarrow x+(-y) = \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)}$

$$= \overline{(a+d, b+c)}$$

$$x+(-1)y = \overline{(a,b)} + \overline{(0,1)} \cdot \overline{(c,d)}$$

$$= \overline{(a,b)} + \overline{(0.c+1d, 0.d+1.c)} = \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} = \overline{(a+d, b+c)}$$

$$\Rightarrow x+(-y) = x+(-1)y$$

b) $z(x-y) = z[x+(-y)] = zx+z(-y) = zx+z(-1)y = zx+(-1)(zy) = (zx)-(zy)$

Problemler:

1- $(-3)+(-2) = (-5)$

2- $(-x)(-y) = xy$

3- $\forall x \in Z$, $x=-x \Rightarrow x=0$

4- $x^2 = (-x)^2$

5- $x-(-x) = 2x$ önermelerinin doğruluğunu ispat ediniz.

1- $(-3)+(-2)=(\overline{0,3})+(\overline{0,2})=(\overline{0+0,3+2})=(\overline{0,5})=-5$

2- $(-x)(-y)=(-1)x\,(-1)y=(-1)(-1)(xy) = xy$

$(-1)(-1)\overset{?}{=}1$

$(-1)(-1)=(\overline{0,1})(\overline{0,1})=(\overline{0.0+1.1,0.1+1.0})=(\overline{1,0})=1$ //

3- $x=-x \Rightarrow x=(-1)x \Rightarrow x=(\overline{0,1})x \Rightarrow (\overline{a,b})=(\overline{0,1})(\overline{a,b})$ $\quad x=(\overline{a,b})$

$\Rightarrow (\overline{a,b})=(\overline{0.a+1.b,0b+1.a}) \Rightarrow (\overline{a,b})=(\overline{b,a})$

$\Rightarrow (a,b)\sim(b,a) \Rightarrow a+a=b+b \Rightarrow 2a=2b \Rightarrow a=b$

$\Rightarrow x=(\overline{a,a})=(\overline{0,0})=0 \Rightarrow x=0$

Tanım: $a,b\in\mathbb{Z}$, $a=(\overline{m,n})$, $b=(\overline{u,v})$ olsun.

$1^\circ)$ $a<b \Leftrightarrow m+v<n+u$ veya $b>a$

"$a=b$ veya $a<b$" önermesi kısaca $a\leq b$ yazılır.

$2^\circ)$ $a\leq b \Leftrightarrow m+v\leq n+u$

Teorem: $a,b\in\mathbb{Z}$ olsun. $a<b$ olması için gerek ve yeter şart $a+x=b$ olacak şekilde bir pozitif x tamsayısının bulunmasıdır.

$a+x=b \Leftrightarrow a<b$

İspat// $a=(\overline{m,n})$, $b=(\overline{u,v})$ olsun.

$a<b \Leftrightarrow m+v<n+u \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ (m+v)+k=n+u$

$\Leftrightarrow (m+k)+v=n+u \Leftrightarrow (m+k,n)\sim(u,v) \Leftrightarrow (\overline{m+k,n})=(\overline{u,v})$

$\Leftrightarrow (\overline{m,n})+(\overline{k,0})=(\overline{u,v}) \Leftrightarrow a+x=b \quad x\in\mathbb{Z}^+$

Teorem: $a,b,c,d,x\in\mathbb{Z}$ olsun.

a- $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$

b- $(a<b \wedge c<d) \Rightarrow a+c<b+d$

c- $x>0$ için $ax<bx \Leftrightarrow a<b$

d- $x<0$ için $ax<bx \Leftrightarrow a>b$

İspat// $a=(\overline{m,n})$, $b=(\overline{u,v})$, $c=(\overline{r,s})$, $d=(\overline{t,w})$, $x=(\overline{y,z})$ olsun

a) $a<b \Leftrightarrow (\overline{m,n})<(\overline{u,v}) \Leftrightarrow m+v<n+u$

$\Leftrightarrow (m+v)+(r+s)<(n+u)+(r+s)$

$\Leftrightarrow (m+r)+(v+s)<(n+s)+(u+r)$

$\Leftrightarrow (\overline{m+r, n+s}) < (\overline{u+r, v+s}) \Leftrightarrow (\overline{m,n}) + (\overline{r,s}) < (\overline{u,v}) + (\overline{r,s})$

$\Leftrightarrow a+c < b+c$

Teorem: Z tamsayılar kümesinde tanımlanan "$\leqslant$" bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Z kümesi bu bağıntıya göre tam sıralıdır

Problemler:

1- $x \in Z$ ve $y \in Z^+$ ise $x-y < x+y$ olduğunu ispat edin.

2- $s,t \in \mathbb{N}$ olsun. $-1 < (\overline{s,t}) < 1$ ise $s=t$ olduğunu ispat edin.

3- 0 ile 1 arasında hiçbir tamsayının bulunmadığını ispat edin.

Çözüm// 2- $-1 < (\overline{s,t}) < 1 \Rightarrow [-1 < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) > 1]$

$\Rightarrow [(\overline{0,1}) < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) < (\overline{1,0})]$

$\Rightarrow (0+t < 1+s) \wedge (s+0 < t+1)$

$\Rightarrow [t < s+1 \wedge s < t+1]$

$\Rightarrow t+1 \leqslant s+1 \wedge s+1 \leqslant t+1$

$\Rightarrow (t \leqslant s \wedge s \leqslant t)$

$\Rightarrow s = t$

3- Aksini kabul edelim. Yani 0 ile 1 arasında bir tamsayı varsa

$\Rightarrow 0 < (\overline{s,t}) < 1 \wedge (\overline{s,t}) \in Z$

$\Rightarrow 0 < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) < 1$

$\Rightarrow (\overline{0,0}) < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) < (\overline{1,0})$

$\Rightarrow 0+t < 0+s \wedge s+0 < t+1$

$\Rightarrow t < s \wedge s < t+1$

$\Rightarrow t < s \wedge s+1 \leqslant t+1$

$\Rightarrow t < s \wedge s \leqslant t$ çelişkidir.

$\Rightarrow$ kabulümüz yanlıştır.

Tanım: (Mutlak Değer):

$x \in Z$ olsun. $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $|x|$ doğal sayısına x'in mutlak değeri denir.

Teorem : (Mutlak Değerin Özellikleri) : $\forall\, x,y \in Z$ için

a- $|x| = |-x|$

b- $|x|^2 = |x^2| = x^2$

c- $x \leq |x| \wedge -x \leq |x| \wedge |-x| \leq x \leq |x|$

d- $|x| \leq y \iff x \leq y \vee -x \leq y$

e- $|x| \geq y \iff x \geq y \vee -x \geq y$

f- $|x \cdot y| = |x||y|$

g- $|x| - |y| \leq |x+y|$

h- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği)

ı- $|x| - |y| \leq |x-y|$

k- $|x-y| \leq |x| + |y|$

İspat// a) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad |-x| = \begin{cases} -x, & -x \geq 0 \\ -(-x), & -x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |x| = |-x|$

b) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad |x|^2 = |x| . |x| =$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ x > 0 \Rightarrow |x|^2 = x . x = x^2 \\ 2^\circ\ x < 0 \Rightarrow |x|^2 = (-x)(-x) = x^2 \end{array}\right\} |x|^2 = x^2 = |x^2|$$

f) $|xy| = |x| . |y|$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ ve $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow |xy| = xy = |x| . |y|$

$x \geq 0, y < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) = x(-y) = |x| . |y|$

$x < 0, y \geq 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) = (-x)y = |x| . |y|$

$x < 0, y < 0 \Rightarrow |xy| = xy = (-x)(-y) = |x| . |y| \Rightarrow \forall x,y \in Z, |xy| = |x| . |y|$ //

g) $|x| - |y| \leq |x+y|$

$$\left.\begin{array}{l} (x \geq 0, y \geq 0) \Rightarrow |x| - |y| = x - y < x + y \leq |x+y| \\ (x \geq 0, y < 0) \Rightarrow |x| - |y| = x + y \leq |x+y| \\ (x < 0, y \geq 0) \Rightarrow |x| - |y| = -x - y = -(x+y) \leq |x+y| \\ (x < 0, y < 0) \Rightarrow |x| - |y| = -x + y < |x+y| \end{array}\right\} |x| - |y| \leq |x+y|$$

(Devamı s: 212 de)

Teorem: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olsun. a sayısı b sayısına kalanlı olarak bölünebilir. Bu bölme işleminde bölüm ve kalan tektir.

İspat// $a = bq + r \wedge 0 \leq r < |b|$

1° Varlığın ispatı;

a) $a = 0$ ise $0 = b.0 + 0 \quad q = r = 0$

b) $a \neq 0$ ise, $\{a - bx : x \in \mathbb{Z}\} = A$ olsun.

i- $b < 0$ ise $b \leq -1 \Rightarrow b|a| \leq -|a|$ her iki tarafı $|a|$ ile çarparak

$$\Rightarrow b|a| \leq -|a| \leq a$$
$$\Rightarrow b|a| \leq a$$
$$\Rightarrow a - b|a| \geq 0 \wedge a - b|a| \in A$$

ii- $b > 0$ ise $b \geq 1 \Rightarrow b(-|a|) \leq -|a|$

$$\Rightarrow b(-|a|) \leq -|a| \leq a$$
$$\Rightarrow b(-|a|) \leq a$$
$$\Rightarrow a - b(-|a|) \geq 0 \wedge a - b(-|a|) \in A$$

Sonuç: A'nın negatif olmayan elemanları da vardır.

$\Rightarrow r = a - bq$ olan pozitif sayıların kümesinin bir en küçük r elemanı vardır. ($\Rightarrow a = bq + r \wedge r \geq 0$ dır.)

Ayrıca $r \overset{?}{<} |b| \Rightarrow$ Aksini kabul edelim. Yani $r \geq |b|$ olsun.

$$\Rightarrow r - |b| \geq 0 \Rightarrow r - |b| = \begin{cases} r - b, & b > 0 \\ r + b, & b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a - bq - b, & b > 0 \\ a - bq + b, & b < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a - b(q+1), & b > 0 \\ a - b(q-1), & b < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow r - |b| \leq r \Rightarrow \begin{cases} a - b(q+1) \leq r, & b > 0 \\ a - b(q-1) \leq r, & b < 0 \end{cases}$ çelişkidir. Yani kabulümüz yanlış.

$r \geq |b|$ yanlış. $\Rightarrow r < |b|$ dir. $\Rightarrow a = bq + r \wedge r < |b|$ vardır.

2° Tekliğin ispatı;

Aksini farzedelim yani $(a = bq_1 + r_1 \wedge 0 \leq r < |b|) \wedge$
$(a = bq_2 + r_2 \wedge 0 \leq r_1 < |b|)$

$\Rightarrow bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$

$\Rightarrow b(q_1-q_2)=r_2-r_1 \Rightarrow b \,/\, r_1-r_2$

$\Rightarrow |b| \,/\, r_1-r_2$

$\Rightarrow |b| \,/\, |r_1-r_2| \wedge |r_1-r_2|<|b|$

$\Rightarrow |r_1-r_2|=0$

$\Rightarrow r_1-r_2=0 \Rightarrow r_1=r_2$

$\Rightarrow b(q_1-q_2)=0$ $\quad b\neq 0$ dır. (hipotezden)

$\Rightarrow q_1=q_2 \wedge r_1=r_2$ önermesi doğrudur.

Bir kalanlı bölme işleminde bölüm ve kalan tektir.

Teorem: $a,b,m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. a nın b'ye bölümünde (kalanlı), bölüm q ve kalan r ise ma nın, mb ye bölümünde, bölüm q ve kalan mr dir.

İspat// $a=bq+r \wedge 0\leq r<|b| \Rightarrow ma=(mb)q+mr \wedge m.0\leq mr<m|b|$

$\Rightarrow ma=(mb)q+mr \wedge 0\leq mr<|mb|$

Teorem: $a,b,m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. ma nın, mb ye bölümünde bölüm q ve kalan mr ise a'nın b'ye bölümünde bölüm q ve kalan r dir. (Bir önceki teoremin tersidir.)

İspat// $ma=(mb)q+mr \wedge 0\leq mr<|mb|$

$\Rightarrow ma=m(bq+r) \wedge m.0\leq mr<m|b|$

$\Rightarrow a=bq+r \wedge 0\leq r<|b|$

Teorem: $a,b,m \in \mathbb{Z}$ ve $m\neq 0$ olsun.

$(a=mq+r,\ 0\leq r<|m|) \wedge (b=mq'+r',\ 0\leq r'<|m|)$ olmak üzere

$m/a-b \Leftrightarrow r=r'$

İspat// $m/a-b \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{Z},\ a-b=mt$ (bölünebilme tanımından)

$\Leftrightarrow a=b+mt$

$\Leftrightarrow a=mq'+r'+mt$ (b yerine değeri yazılarak)

$\Leftrightarrow a=m(q'+t)+r' \wedge 0\leq r'<|m|$ (paranteze alarak)

$\Leftrightarrow (a=m(q'+t)+r' \wedge 0\leq r'<|m|) \wedge (a=mq+r \wedge 0\leq r<|m|)$

$\Leftrightarrow r=r'$

Problemler :

1- Ardışık iki çift sayıdan birinin dört ile bölünebileceğini gösterin.

2- a) " " sayının çarpımının 2 ile bölünebileceğini " .

b) " " " küpleri farkının 2 eksiğinin 6 ile bölünebileceğini " .

3- İki basamaklı bir sayı ve bunun basamaklarının ters yazılmasıyla elde edilen sayının toplamının 11 ile bölünebileceğini gösterin.

4- Altı basamaklı bir sayının birler ve binler, onlar ve onbinler, yüzler ve yüzbinler basamaklarındaki rakamlar aynı ise bu sayının, 7, 11 ve 13 ile bölünebileceğini gösterin.

5- $a,b,c \in Z$ olsun. $3/a+1 \wedge 3/b+1 \wedge 3/c+1$ ise

a) $3/a+b+c$ b) $3/a^2+b^2+c^2$ c) $3/a^2-b^2$ önermelerinin doğru olduğunu ispat edin.

6- a doğal sayısı tek ise bu doğal sayının karesinin $8n+1$ şeklinde yazılabileceğini gösterin.

7- -2378 sayısının 23 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan nedir?

8- a tamsayısının b tamsayısına bölümünde bölüm q ve kalan r ise $a+kb$, $a-kb$, $k \in Z$ tamsayılarının b ye bölümünde bölüm ve kalanı bulunuz?

9- a ve b tamsayılarının bir d tamsayısına bölümünde elde edilen kalanlar, r ve r' ise $ab-rr'$ tamsayısının d ye bölündüğünü gösterin?

10- Bir tamsayının karesinin birler basamağında 0, 1, 4, 5, 6, 9 rakamlarından başka rakamın bulunmayacağını gösterin?

Çözümler :

1- $k \in Z$ $a=2k$ $b=2k+2=2(k+1)$

• k tek $\Rightarrow k=2r+1 \Rightarrow 2k+2=2(2r+1+1)=4(r+1) \Rightarrow 4/2k+2$, $r \in Z$

• k çift $\Rightarrow k=2s \wedge s \in Z$

$\Rightarrow 2k=4s \Rightarrow 4/2k \Rightarrow 4/a \vee 4/b$

3- $$\left.\begin{array}{l} X=(ab)_{10}=10a+b \\ y=(ba)_{10}=10b+a \end{array}\right\} X+y=11a+11b=11(a+b) = 11/X+y$$ (bölünebilme tanımı

4- $(abcabc)_{10} = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 a + 10 b + c$

$= c(1+10^3) + 10b(1+10^3) + 100a(1+10^3)$

$= (1+10^3)(c+10b+100a)$

$= (7.11.13)(c+10b+100a)$

$\Rightarrow (7/x \wedge 11/x \wedge 13/x)$

5- $3/a+1 \quad 3/b+1 \quad 3/c+1$

$\Rightarrow (\exists r\in Z,\ a+1=3r) \wedge (\exists t\in Z,\ b+1=3t) \wedge (\exists s\in Z,\ c+1=3s)$

$\Rightarrow a=3r-1 \wedge b=3t-1 \wedge c=3s-1$

a- $3/a+b+c$, $\quad a+b+c = (3r-1)+(3t-1)+(3s-1)$

$= 3(r+t+s)-3$

$= 3(r+t+s-1) \Rightarrow 3/a+b+c$

b- $3/a^2+b^2+c^2$, $\quad a^2+b^2+c^2 = (3r-1)^2+(3t-1)^2+(3s-1)^2$

$= 9r^2-6r+1+9t^2-6t+1+9s^2-6s+1$

$= 3(3r^2-2r+3t^2-2t+3s^2-2s+1)$

$\Rightarrow 3/a^2+b^2+c^2$

c- $3/a^2-b^2$, $\quad a^2-b^2 = (3r-1)^2-(3t-1)^2$

$= (9r^2-6r+1)-(9t^2-6t+1)$

$= 9r^2-9t^2-6r+6t$

$= 3(3r^2-3t^2-2r+2t) \Rightarrow 3/a^2-b^2$

6- a tek $\Rightarrow a=2k+1 \wedge k\in Z$

$\Rightarrow a^2=(2k+1)^2 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow a^2=4k(k+1)+1$

i- k tek $\Rightarrow k=2r+1 \wedge r\in Z$

$\Rightarrow a^2=4(2r+1)(2r+1+1)+1$

$\Rightarrow a^2=8(2r+1)(r+1)+1$

$\Rightarrow a^2=8n+1 \qquad n=(2r+1)(r+1)$

ii- k çift $\Rightarrow k=2s \wedge s\in Z$

$\Rightarrow a^2=8s(2s+1)+1$

$\Rightarrow a^2=8n+1 \qquad n=s(2s+1)$

7- $-2378 = 23q + r \wedge 0 \leq r < |23|$

$$\begin{array}{r|l} -2378 & 23 \\ \pm 23 & -104 \\ \hline 0-78 & \\ \pm 92 & \\ \hline +14 & \end{array}$$

$-2378 = 23(-104) + 14$

$\underbrace{-104}_{\text{bölüm}}$, $\underbrace{14}_{\text{kalan}}$

8- $a = bq + r \wedge 0 \leq r < |b|$

- $\Rightarrow a + kb = bq + r + kb \wedge 0 \leq r < |b|$

  $\Rightarrow a + kb = b(q+k) + r \wedge 0 \leq r < |b|$

  $q + k =$ bölüm $r =$ kalan

- $\Rightarrow a - kb = bq + r - kb \wedge 0 \leq r < |b|$

  $\Rightarrow a - kb = b(q-k) + r \wedge 0 \leq r < |b|$

  $q - k =$ bölüm $r =$ kalan.

9- $(a = dq_1 + r ,\ 0 \leq r < |b|) \wedge (b = dq_2 + r' ,\ 0 \leq r' < |b|)$

$\Rightarrow ab - rr' = (dq_1 + r)(dq_2 - r') - rr'$

$\Rightarrow ab - rr' = d^2 q_1 q_2 + dq_1 r' + dq_2 r + rr' - rr'$

$\Rightarrow ab - rr' = d(dq_1 q_2 + q_1 r' + q_2 r)$

$\Rightarrow d / ab - rr'$

- Bir Tamsayının Bölenleri -

Herhangi bir a tamsayısı verilsin. Eğer $a = 0$ ise 0'dan farklı her tamsayı a nın bölenidir. Eğer $a \neq 0$ ise $-1, +1, -a, +a$ tamsayıları a'nın bölenleridir. a'nın bu bölenlerden başka bölenleri varsa, $-(a-1), \ldots, -3, -2, 2, 3, \ldots, (a-1)$ sayılarının a'yı bölenleri araştırılır.

Örnek // 8 sayısının bölenleri kümesini bulunuz?

$\{-8, -7, \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$ kümesinin alt kümesidir. Bu da,

$\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ kümesidir ve sembolik olarak $\{B(a)\}$ ile gösterilir.

$\{B(8)\} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

- Tamsayıların Ortak Bölenleri -

Tanım: Sıfırdan farklı a ve b tamsayılarının her ikisini de bölen X tamsayılarına a ve b tamsayılarının ortak bölenleri denir.

a ve b tamsayılarının ortak bölenlerinin kümesi sembolik olarak, $\{OB(a,b)\}$ ile gösterilir.

$$\{OB(a,b)\} = \{x : x/a \wedge x/b\} = \{x : x \in \{B(a)\} \wedge x \in \{B(b)\}\}$$

$$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(a)\} \cap \{B(b)\}$$

Örnek // $\{B(8)\} = \{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}$

$\{B(6)\} = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

$\{OB(6,8)\} = \{-2,-1,1,2\} = \{B(8)\} \cap \{B(6)\}$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ olsun. $b/a \Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(b)\}$

İspat // $b/a \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z},\ a = bq$

$\forall x \in \{B(b)\} \Rightarrow x/b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z},\ b = rx$

$\Rightarrow a = rxq = x(rq) \Rightarrow x/a \Rightarrow x \in \{B(a)\}$

$\forall x \in \{B(b)\} \Rightarrow x \in \{B(a)\}$

$\Rightarrow \{B(b)\} \subseteq \{B(a)\}$

$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(b)\} \cap \{B(a)\} = \{B(b)\}$

$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(b)\}$

Örnek // 6 ve 24 sayılarının OB kümesini bulunuz.

$6/24$ $\{OB(6,24)\} = \{B(6)\} = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olsun. $a = bq + r \wedge 0 \leq r < |b|$ ise $\{OB(a,b)\} = \{OB(b,r)\}$

İspat // $\forall x \in \{OB(a,b)\} \Leftrightarrow (x/a \wedge x/b)$

$\Leftrightarrow (x/a-bq \wedge x/b)$

$\Leftrightarrow (x/r \wedge x/b)$

$\Leftrightarrow x \in \{OB(r,b)\} \Rightarrow x \in \{OB(b,r)\}$

$\Leftrightarrow \{OB(a,b)\} \subseteq \{OB(b,r)\}$

$\Leftrightarrow \{OB(b,r) \subseteq \{OB(a,b)\}$

$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{OB(b,r)\}$

Örnek// 28 ve 36 nın OB'ini bulunuz.

i- $36 = 28.1 + 8$ $\{OB(28,36)\} = \{OB(28,8)\}$

ii- $28 = 8.3 + 4$ $\{OB(28,8)\} = \{OB(8,4)\}$

iii- $4/8$ $\{OB(8,4)\} = \{B(4)\} = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$

Sonuç// $\{OB(36,28)\} = \{B(4)\} = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$

Tanım: Sıfırdan farklı $a_1, a_2, ..., a_n$ tamsayılarının herbirini tam olarak bölen bir X tamsayısına bu sayıların bir ortak böleni denir. $a_1, a_2, ..., a_n$ tamsayılarının ortak bölenlerinin kümesi,

$\{OB(a_1, a_2, ..., a_n)\}$ şeklinde gösterilir. Ve

$$\{OB(a_1, a_2, ..., a_n)\} = \{B(a_1)\} \cap \{B(a_2)\} \cap ... \cap \{B(a_n)\}$$ kümesidir.

Tanım: (Tamsayıların ortak bölenlerinin en büyüğü):

En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsunlar. a ve b nin ortak bölenleri kümesinin en büyük elemanına a ve b tamsayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü denir. Ve $\boxed{OBEB(a,b)}$ ile gösterilir.

Örnek// $\{OB(28,36)\} = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$

$OBEB(28,36) = 4$

Teorem: (Öklid Algoritması):

En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun. $OBEB(a,b) = r_n$ olacak şekilde birtek r_n pozitif tamsayısı vardır. Bu r_n sayısı a ve b sayılarının lineer toplamı olarak yazılabilir. (yani, a ve b verildiğinde; m ve n tamsayıları vardır ki $r_n = ma + nb$ yazılabilir.)

İspat// OBEB tanımından dolayı $OBEB(a,b) = OBEB(|a|,|b|)$

1°) $a = b$ olsun. $OBEB(a,b) = a = b$

2°) $a \neq b \wedge b \neq 0$ olsun. $\Rightarrow a = bq + r \quad 0 \leq r < b$ iki durum vardır;

I- a) $r = 0 \Rightarrow a = bq \Rightarrow b/a \Rightarrow OBEB(a,b) = b$

b) $r \neq 0 \Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{OB(b,r)\} \Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,r)$

II- b yi r ye kalanlı olarak bölelim. $b = rq_1 + r_1 \wedge 0 \leq r_1 < r$

a) $r_1 = 0 \Rightarrow b = rq_1 \Rightarrow OB(b,r) = \{B(r)\} \Rightarrow OBEB(b,r) = r$

b- $r_1 \neq 0$ ise $OB(b,r) = OB(r,r_1)$

III - r'yi r_1'e kalanlı olarak bölelim. $\Rightarrow r = r_1 . q_2 + r_2 \wedge 0 \leq r_2 < r_1$

a) $r_2 = 0 \Rightarrow r = r_1 q_2 \Rightarrow \{OB(r,r_1)\} = \{B(r_1)\} \Rightarrow OBEB(r,r_1) = r_1$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,r) = OBEB(r,r_1) = r_1$

b) $r_2 \neq 0 \Rightarrow \{OB(r,r_1)\} = \{OB(r_1,r_2)\}$

IV - r_1'i r_2'ye kalanlı olarak bölelim. $\Rightarrow r_1 = r_2 q_3 + r_3 \wedge 0 \leq r_3 < r_2$

a) $r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 q_3 \Rightarrow r_2 / r_1 \Rightarrow \{OB(r_1,r_2)\} = \{B(r_2)\} \Rightarrow OBEB(r_1,r_2) = r_2$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = r_2$

b) $r_3 \neq 0 \Rightarrow \{OB(r_1,r_2)\} = \{OB(r_2,r_3)\}$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ ve $r_n = 0 \Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,r) = OBEB(r,r_1) \ldots$

$\ldots = OBEB(r_{n-2}, r_{n-1}) = r_n = OBEB(r_{n-1}, r_n)$

$r_{n-1} = r_n q_n + 0$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = r_n$

a ve b r_n'in lineer toplamı olarak yazılır ?

$r_n = r_{n-2} - r_{n-1} q_n$

$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \Rightarrow r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}$

$r_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}) q_n$

$r_n = r_{n-2}(1 + q_{n-1}) q_n - r_{n-3} q_n$

$r_{n-4} = r_{n-3} q_{n-2} + r_{n-2} \Rightarrow r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3} q_{n-2}$

$\Rightarrow r_n = ma + nb$

Örnek // -118 ve 26 sayılarının OBEB'ini bulun ve OBEB'i bu sayıların öklid algoritmalarını bulun.

$OBEB(-118, 26) = r_n \quad r_n = m(-118) + n(26)$

$OBEB(-118, 26) = OBEB(118, 26)$

1- I - $118 = 26 . 4 + 14 \wedge 0 < 14 < 26$

II - $26 = 14 . 1 + 12 \wedge 0 < 12 < 14$

III - $14 = 12 . 1 + 2 \wedge 0 < 2 < 12$

IV - $12 = 2 . 6 + 0 \qquad OBEB(-118, 26) = 2 = r_n$

2 - $2 = 14 - 12 \Rightarrow 2 = 14 - (26-14)$

$12 = 26 - 14 \Rightarrow 2 = 14 - 26 + 14$

$\Rightarrow \boxed{2 = 2.14 - 26}$

$14 = 118 - 26.4$

$2 = 2.(118 - 26.4) - 26$

$2 = 2.118 - 8.26 - 26$

$2 = 2.118 - 9.26$

$2 = m(-118) + n(26) \qquad 2 = (-2)(-118) + (-9)(26) \quad m = -2 \quad n = -9$

Sonuçlar: $\{OB(a,b)\} = \{B(r_n)\} \Rightarrow \forall x \in \{OB(a,b)\} \Rightarrow (x/a, x/b)$

$\Rightarrow x \in \{B(r_n)\} \Rightarrow x/r_n$

Bir d sayısının a ve b nin OBEB'i olduğunu göstermek için,

1° $d/a \wedge d/b$

2° $\exists c \in Z$ için $c/a \wedge c/b \Rightarrow c/d$

Örnek// 5517 ve 2421 sayılarının OBEB ini bulun ve bu sayıların lineer toplamı olarak yazın.

$OBEB(5517, 2421) = 9$

$9 = m(5517) + n(2421) \quad m = ? \quad n = ?$

en sondan en başa

$5517 = 2421.2 + 675$

$2421 = 675.3 + 396$

$675 = 396.1 + 279$

$396 = 279.1 + 117$

$279 = 117.2 + 45$

$117 = 45.2 + 27$

$45 = 27.1 + 18$

$27 = 18.1 + 9$

$18 = 9.2 + 0$

$9 = \underbrace{(-104)}_{m}(5517) + \underbrace{(133)}_{n}(2421)$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun.

$OBEB(a,b) = OBEB(b,a)$

ispat// $\{OB(a,b)\} = \{B(a)\} \cap \{B(b)\} = \{B(b)\} \cap \{B(a)\} = \{OB(b,a)\}$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,a)$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun. $m \in Z^+$ ise

$OBEB(ma,mb) = m\,OBEB(a,b)$

ispat// $a > b \Rightarrow a = bq + r \wedge 0 < r < |b|$

$ma = (mb)q + mr \wedge 0 < mr < |mb|$

$b = rq_1 + r_1 \wedge 0 < r_1 < r$

$r = r_1 q_2 + r_2 \wedge 0 < r_2 < r_1$

- - - - - - - - - - - - -

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \wedge 0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 \qquad OBEB(a,b) = r_n$

$mb = (mr)q + mr_1 \wedge 0 < mr_1 < mr$

$mr = (mr_1)q_2 + mr_2 \wedge 0 < mr_2 < mr_1$

- - - - - - - - - - - - -

$mr_{n-2} = (mr_{n-1})q_n + mr_n \wedge 0 < mr_n < mr_{n-1}$

$mr_{n-1} = (mr_n)q_{n+1} + 0 \qquad OBEB(ma,mb) = mr_n = m\,OBEB(a,b)$

Sonuçlar:

1- $OBEB(a,b) = 1$ ise $OBEB(ma,mb) = m$

2- $b/a \Rightarrow OBEB(a,b) = |b|$

3- $a \neq 0 \Rightarrow OBEB(a,a) = |a|$

4- $OBEB(a,1) = 1$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun. $m \in Z^+$ olmak üzere, m/a ve m/b ise $OBEB(a:m, b:m) = [OBEB(a,b)] : m$

ispat// m/a ve m/b olduğundan $(a:m)m = a \wedge [(b:m)m] = b$

$\Rightarrow OBEB[(a:m)m, (b:m)m] = m\,OBEB[(a:m),(b:m)] = OBEB(a,b)$

$\Rightarrow OBEB[(a:m),(b:m)] = [OBEB(a,b)] : m$

Sonuç: $OBEB(a,b)=d$ ise $OBEB[(a:d),(b:d)]=1$

İspat// $OBEB(a,b)=1 \Rightarrow$

$(a:d)=u \wedge (b:d)=v \Rightarrow a=du \wedge b=dv$

$OBEB(a:d,\ b:d)=k \Rightarrow OBEB(u,v)=k \Rightarrow \exists m,n\in Z,\ u=km \wedge v=kn$

$\Rightarrow a=dkm \wedge b=dkn \Rightarrow a=(dk)m \wedge b=(dk)n$

$\Rightarrow (dk)/m \wedge (dk)/n \Rightarrow dk\in\{OB(a,b)\}$

$\Rightarrow dk\in\{OB(a,b)\} \wedge OBEB(a,b)=d$

$\Rightarrow dk/d \Rightarrow k=1 \Rightarrow OBEB(u,v)=OBEB(a:d,\ b:d)=1$ //

Tanım: En az biri sıfırdan farklı $a_1,a_2,\dots,a_n$ tamsayıları verilsin. Bu sayıların ortak bölenleri kümesinin en büyük elemanına ortak bölenlerinin en büyüğü denir. Ve sembolik olarak $OBEB(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$ ile gösterilir.

Teorem: En az biri sıfırdan farklı $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ tamsayıları verilsin.

$OBEB(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n)=OBEB[OBEB(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})\ a_n]$ dir.

$n=3 \Rightarrow OBEB(a_1,a_2,a_3)=OBEB[OBEB(a_1,a_2),a_3]$

İspat// $OBEB(a_1,a_2,\dots,a_n)=d_1$ ve $OBEB[OBEB(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n]=d_2$ olsun.

(1°) $OBEB(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n)=d_1$ olsun. $i=1,2,\dots,n$ için

$\Rightarrow d_1/a_i \Rightarrow i=1,2,\dots,n-1$ için $d_1/a_i \wedge d_1/a_n \Rightarrow d_1/d_2$

(2°) $OBEB[OBEB(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n]=d_2$ olsun.

$\Rightarrow [d_2/OBEB(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) \wedge d_2/a_n]$ $i=1,2,\dots,n-1$ için $d_2/a_i \wedge d_2:a_n$

$\Rightarrow i=1,2,\dots,n$ için d_2/a_i

$\Rightarrow d_2/d_1 \Rightarrow (d_1/d_2 \wedge d_2/d_1) \Rightarrow d_1=d_2$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı $a_1,a_2,\dots,a_n$ sayılarının OBEB'i bu sayıların lineer toplamı olarak yazılabilir.

Yani $OBEB(a_1,a_2,\dots,a_n)=d$ ise $d=a_1t_1+a_2t_2+\dots+a_nt_n$, $t_1,t_2,\dots,t_n\in Z$

Tanım: (Aralarında Asal veya Rölatif Asal Sayılar):

En az biri sıfırdan farklı a,b tamsayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü 1 ise (OBEB=1) a ve b sayıları aralarında (relatif) asaldırlar.

Örnek// OBEB(16,15)=1 olduğundan 15 ve 16 aralarında asaldır.

Eğer a ve b aralarında asal ise (OBEB(a,b)=1) bu durum,

$(a,b)=1$ şeklinde sembolik olarak gösterilir.

Örnek// $(16,-15)=1$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı a ve b tamsayılarının relatif asal olması için gerek ve yeter şart $1=ma+nb$ olacak şekilde $m,n\in\mathbb{Z}$ sayılarının bulunmasıdır.

İspat// 1- Gerek şart: $\Rightarrow$ $(a,b)=1$ (a ve b aralarında relatif asal ise)

$$\Rightarrow OBEB(a,b)=1$$

$$\Rightarrow \exists\, m,n\in\mathbb{Z},\ 1=ma+nb$$

2- Yeter şart $\Leftarrow$: $1=ma+nb$ $m,n\in\mathbb{Z}$ $OBEB(a,b)=d$ olsun.

$$\Rightarrow \exists\, k,t\in\mathbb{Z},\ a=kd \wedge b=td$$

$$\Rightarrow (d/a \wedge d/b)$$

$$\Rightarrow 1=mkd+ntd$$

$$\Rightarrow (mk+nt)d=1$$

$$\Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1 \quad OBEB(a,b)=1 \Rightarrow (a,b)=1$$

$$(a,b)=1 \Leftrightarrow 1=ma+nb \quad m,n\in\mathbb{Z}$$

Teorem: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ olsun. $(a,c)=1 \wedge (b,c)=1 \Rightarrow (ab,c)=1$

İspat// $(a,c)=1 \wedge (b,c)=1 \Rightarrow (\exists\, m,n\in\mathbb{Z},\ 1=ma+nc) \wedge (\exists\, u,v\in\mathbb{Z},\ 1=ub+vc)$

$$\Rightarrow 1=(ma+nc)(ub+vc)$$

$$\Rightarrow 1=maub+mavc+ncub+vnc^2$$

$$\Rightarrow 1=\underbrace{(mu)}_{k}(ab)+(\underbrace{mav+nub+nvc}_{r})c$$

$$\Rightarrow 1=k(ab)+r.c \quad k,r\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (ab,c)=1$$

Teorem: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olsun. $a/bc \wedge (a,b)=1 \Rightarrow a/c$

İspat// $(a,b)=1 \Rightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{Z},\ 1=ma+nb$

$\Rightarrow c = mac + nbc$

$a/bc \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ bc = ka$

$\Rightarrow c = mac + nka$

$\Rightarrow c = (mc+nk)a \Rightarrow a/c$

Teorem: $a,b,n \in \mathbb{Z}$ olsun. $[a/n \wedge b/n \wedge (a,b)=1] \Rightarrow ab/n$

İspat// $a/n \wedge b/n \wedge (a,b)=1 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z},\ n=ax \wedge b/n \wedge (a,b)=1$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z},\ n=ax \wedge \exists\, y \in \mathbb{Z},\ n=by \wedge (a,b)=1$

$\Rightarrow ax = by \wedge (a,b)=1$

$\Rightarrow$ $b/ax \wedge (a,b)=1 \Rightarrow b/x$

$\quad\ \ $ $a/by \wedge (a,b)=1 \Rightarrow a/y$

$\Rightarrow b/x \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Z},\ x = br \Rightarrow n = ax = abr \Rightarrow n = (ab)r \Rightarrow ab/n$

Tanım: $a_1, a_2, \dots, a_n$ tamsayılarının OBEB'i 1 ise bu sayılara aralarında asaldırlar (relatiftirler) denir.

örnek// $OBEB(15,20,22) = OBEB[OBEB(15,20),22] = OBEB(5,22) = 1$

$OBEB(5,8,11) = 1$

Teorem: $i=1,2,\dots,n$ için $a, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ve $(a,b_i)=1$ ise $\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right)=1$

İspat// indüksiyon (tümevarım) metodu ile yapılacak.

$\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right)=1$ önermesini doğrulayan i sayılarının kümesi D olsun.

1° $n=1$ için $a, b_1 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge (a,b_1)=1 \Rightarrow (a,b_1) = \left(a \prod_{i=1}^{1} b_i\right) = 1 \Rightarrow 1 \in D$

2° $n=k \in D$ olsun. $i=1,2,\dots,k$ için $a, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge (a,b_i)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a \prod_{i=1}^{k} b_i\right)=1$ olsun

3° $n=k+1$ için $i=1,2,\dots,k,k+1$ için $a, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge (a,b_i)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a, \prod_{i=1}^{k+1} b_i\right) = \left[a, \left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right) b_{k+1}\right] \Rightarrow \left[(a,b_{k+1})=1 \wedge \left(a, \prod_{i=1}^{k} b_i\right)=1\right]$

$\Rightarrow \left[a, \left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right) b_{k+1}\right]=1 \Rightarrow \left(a, \prod_{i=1}^{k+1} b_i\right)=1,\ k+1 \in D$

Problemler :

1- 1062 ve 425 sayılarının aralarında asal olduklarını gösterin.

2- $OBEB(16,24,20) = ?$

3- $OBEB(108,-64) = d$ ve $d = 108x - 64y$ ise $d = ?$ $x = ?$ $y = ?$ $d, x, y \in Z$

4- Üç arsanın alanları $1260 \ m^2$, $1760 \ m^2$, $2772 \ m^2$ dir. Bu arsalar olabildiğince büyük alanda eşit parçalara bölünerek parsellenmiştir. Bir parselin alanı kaç m^2 dir ve herbir arsa kaç parseldir?

5- $a, b \in Z$ ve $(a,b) = 1$ ise $(a+1, ab) = 1$ olduğunu ispat edin.

6- İki sayının OBEB ini bulmak için yapılan işlemler sonucunda sırasıyla 8,2,7 bölümleri elde ediliyor. Bu sayıların OBEB'i 12 ise sayıları bulun.

7- $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ veriliyor. $\forall x, y \in A$, $x o y = OBEB(x,y)$ olan bir işlem tanımlanıyor. o işleminin çizelgesini (tablo) düzenleyerek, özelliklerini inceleyin.

8- $OBEB(a,b,c) = d$ ise d^2/ab, d^2/ac, d^2/bc önermelerinin doğruluk değeri ?

9- $a \in Z^+$ olsun. $(a, a+1) = 1$, $(a, 2a+1) = 1$, $(a+1, 2a+1) = 1$ " " " ?

10- $n, a, b \in Z^+$ olsun. $(a,b) = 1$ ise $(a^n, b) = 1$ olduğunu ispat edin?

11- $a, n, b \in Z^+$ olsun. $OBEB(a,b) = d \Rightarrow OBEB(a^n, b^n) = d^n$ olduğunu göst.

12- $b/c \wedge (a,c) = 1$ ise $(a,b) = 1$ olduğunu ispat edin?

Çözümler :

1- $1062 = 425.2 + 212$ $\quad OBEB(1062, 425) = 1$

$425 = 212.2 + 1$

$212 = 1.212 + 0$

2- $OBEB(16,24,20) = [OBEB(16,24), 20] = OBEB[OBEB(16,24), 20]$

$= OBEB(8, 20) = 4$

4- $OBEB(1260, 1760, 1772)$

$OBEB(1260, 1760) = 20$ $\quad OBEB(20, 2772) = 4m^2$ $\quad 1260 : 4 = 315$ parsel

$1760 = 1260.1 + 500$ $\quad 2772 = 20.138 + 12$ $\quad 1760 : 4 = 440$ "

$1260 = 500.2 + 260$ $\quad 20 = 12.1 + 8$

$500 = 260.1 + 240$ $\quad 12 = 8.1 + 4$ $\quad 2772 : 4 = 695$ "

$260 = 240.1 + 20$ $\quad 8 = 4.2 + 0$

$240 = 20.12 + 0$

6- $a = b.8 + r_1 \quad b = r_1.2 + r_2 \quad r_1 = r_2.7 + r_3 \ \wedge \ r_3 = 0$

$OBEB(a,b) = 12 = r_2 \quad r_1 = r_2.7 = 84$

$b = 2.84 + 12 = 180$ // $\quad a = 180.8 + 84 = 1524$ //

7-

o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12

$x \circ y = OBEB(x,y)$

$\forall x \in A, \ \exists e \in A \quad x \circ e = e \circ x$

birim yok
kapalılık var
birleşme var
ters eleman yok
değişme var.

8- $OBEB(a,b,c) = d$ ise d^2/ab ?

$OBEB(a,b,c) = d \Rightarrow (d/a \wedge d/b \wedge d/c)$

$\Rightarrow \exists k,r,t \in Z, \ (a = kd \wedge b = rd \wedge c = td)$

$\Rightarrow ab = (kd)(rd) = krd^2 \Rightarrow ab = (kr)d^2$

$\Rightarrow d^2/ab$

9- $a \in Z^+ \quad (a, a+1) = 1$

$a+1 = a.1 + 1$

$a = 1.a + 0 \quad OBEB(a+1, a) = 1 \Rightarrow (a+1, a) = 1$

Bir Tamsayının Katları

Tanım: $a \in Z \setminus \{0\}$ ve $n \in Z$ olmak üzere na tamsayısına a'nın n katı denir.

a'nın tüm katlarının kümesi $\{K(a)\}$ ile gösterilecektir.

$\{K(a)\} = \{\ldots, -na, \ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, \ldots, na, \ldots\}$

Örnek// 2,3 ve −3 sayılarının katları kümesinin bazı elemanlarını yazalım.

$\{K(2)\} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$\{K(3)\} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} \qquad \{K(3)\} = \{K(-3)\}$

$\{K(-3)\} = \{\ldots, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, \ldots\}$

Sonuç// $\{K(a)\} = \{K(-a)\}$

6- $a = b.8 + r_1 \quad b = r_1.2 + r_2 \quad r_1 = r_2.7 + r_3 \wedge r_3 = 0$

$OBEB(a,b) = 12 = r_2 \quad r_1 = r_2.7 = 84$

$b = 2.84 + 12 = 180$ // $\quad a = 180.8 + 84 = 1524$ //

7-

o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12

$x \circ y = OBEB(x,y)$

$\forall x \in A, \exists e \in A \quad x \circ e = e \circ x$

birim yok
kapalılık var
birleşme var
ters eleman yok
değişme var.

8- $OBEB(a,b,c) = d$ ise d^2/ab ?

$OBEB(a,b,c) = d \Rightarrow (d/a \wedge d/b \wedge d/c)$

$\Rightarrow \exists k,r,t \in Z, (a = kd \wedge b = rd \wedge c = td)$

$\Rightarrow ab = (kd)(rd) = krd^2 \Rightarrow ab = (kr)d^2$

$\Rightarrow d^2/ab$

9- $a \in Z^+ \quad (a, a+1) = 1$

$a+1 = a.1 + 1$

$a = 1.a + 0 \quad OBEB(a+1, a) = 1 \Rightarrow (a+1, a) = 1$

Bir Tamsayının Katları

Tanım: $a \in Z \setminus \{0\}$ ve $n \in Z$ olmak üzere na tamsayısına a'nın n katı denir.

a'nın tüm katlarının kümesi $\{K(a)\}$ ile gösterilecektir.

$\{K(a)\} = \{..., -na, ..., -2a, -a, 0, a, 2a, ..., na, ...\}$

Örnek// 2,3 ve −3 sayılarının katları kümesinin bazı elemanlarını yazalım.

$\{K(2)\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$\{K(3)\} = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$ $\qquad \{K(3)\} = \{K(-3)\}$

$\{K(-3)\} = \{..., 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, ...\}$

Sonuç// $\{K(a)\} = \{K(-a)\}$

Tanım: (Tamsayıların Ortak Katları):

Her ikisi de sıfırdan farklı iki a ve b tamsayılarının her ikisinin de katı olan tamsayıya bu iki sayının bir ortak katı denir. a ve b tamsayılarının ortak katlarının kümesi $\{OK(a,b)\}$ ile gösterilir.

$$\{OK(a,b)\} = \{x : x \text{ a nın bir katıdır ve } x \text{ b nin bir katıdır.}\}$$
$$= \{x : x \in \{K(a)\} \wedge x \in \{K(b)\}\} = \{K(a)\} \cap \{K(b)\}$$

Örnek// -2 ve 3 sayılarının $OK = ?$

$$\{OK(-2,3)\} = \{K(-2)\} \cap \{K(3)\}$$
$$= \{\ldots,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\} \cap \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$$
$$= \{\ldots,-12,-6,0,6,12,\ldots\}$$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olsun. $OBEB(a,b) = d$ ise $\{OK(a,b)\} = \{K[(a,b):d]\}$

İspat// $1°-$ $x \in \{OK(a,b)\} \Rightarrow (a/x \wedge b/x)$ O.K. tanımı. bölünebilme öz.

$$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z},\ x = ma \wedge x = nb$$
$$\Rightarrow ma = nb$$

$$OBEB(a,b) = d \Rightarrow (d/a \wedge d/b)$$
$$\Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z},\ a = rd \wedge b = sd \wedge (r,s) = 1$$

$$a = mrd = b = nsd \wedge (r,s) = 1$$

$$mr = ns \wedge (r,s) = 1 \Rightarrow (r/ns \wedge (r,s)=1) \vee (s/mr \wedge (r,s)=1)$$
$$\Rightarrow r/n \vee s/m$$
$$\exists t \in \mathbb{Z},\ m = st$$

$$x = ma = mrd = nb = nsd \qquad b:d = s \quad r = a:d$$

$$x = (a:d)\,s\,t\,d = (b:d)\,b \cdot t = [(ab):d]\,t \Rightarrow x \in \{K[(ab):d]\}$$
$$\Rightarrow \{OK(a,b)\} \subseteq \{K[(ab):d]\}$$

$$2°-\ y \in \{K[(ab):d]\} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = k[(ab):d] = a(\overbrace{b:d}^{n})k = b(\overbrace{a:d}^{m})k$$
$$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z},\ y = a(nk) = b(mk)$$
$$\Rightarrow y \in \{OK(a,b)\}$$
$$\Rightarrow \{K[(ab):d]\} \subseteq \{OK(a,b)\}$$
$$\Rightarrow \{OK(a,b)\} = \{K[(a,b):d]\}$$

İspat// $\{OK(\underset{a}{-18},\underset{b}{24})\} = \{K[(ab):d]\} \quad = \{K(-72)\}$

$OBEB(-18,24) = 6 \quad [(ab):d] = \frac{-18 \cdot 24}{6} = -72$ //

Tanım: Herbiri sıfırdan farklı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tamsayıları verildiğinde bu sayıların herbirinin katı olan tamsayıya bu sayıların ortak katı denir ve sembolik olarak bu sayıların ortak katları kümesi

$\{OK(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}$ gösterilir.

Teorem: Sıfırdan farklı a, b tamsayılarının pozitif ortak katlarının kümesinin bir en küçük elemanı vardır.

İspat// $|a \cdot b|$ a ve b nin bir ortak katıdır (pozitif).

a ve b nin pozitif ortak katlarının kümesi, doğal sayılar kümesinin bir alt kümesidir.

Tanım: Sıfırdan farklı a, b tamsayılarının pozitif ortak katları kümesinin en küçük elemanına bu sayıların ortak katlarının en küçüğü denir. Sembolik olarak $OKEK(a,b)$ ile gösterilir.

Sonuç// $OKEK(a,b) = OKEK(a,-b) = OKEK(-a,b) = OKEK(-a,-b)$

Teorem: a, b sıfırdan farklı iki tamsayı olsun. $OKEK(a,b) = k$ ise

$\{OK(a,b)\} = \{K(k)\}$

İspat// 1- $\forall x \in \{K(k)\} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z},\ x = kr$

Ayrıca hipotezden, $OKEK(a,b) = k \Rightarrow (a/k \wedge b/k)$

$$\Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{Z},\ k = pa \wedge k = qa$$

$$\Rightarrow \exists r,p,q \in \mathbb{Z},\ x = kr \wedge k = pa \wedge k = qb$$

$$\Rightarrow x = kr = par \wedge x = kr = qbr$$

$$\Rightarrow x = a(pr) \wedge x = b(qr)$$

$$\Rightarrow x \in \{OK(a,b)\}$$

$$\Rightarrow \{K(k)\} \subseteq \{OK(a,b)\}$$

2- $\forall x \in \{OK(a,b)\} \overset{?}{\Rightarrow} x \in \{K(k)\} \overset{?}{\Rightarrow} k/x$

Aksini farzedelim: $k \nmid x \wedge x \in \{OK(a,b)\} \wedge OKEK(a,b) = k$

$\Rightarrow x = kq + r \wedge 0 \leq r < k \Rightarrow (a/x \wedge b/x) \wedge (a/k \wedge b/k) \wedge r = x - kq$

$\Rightarrow (a/r \wedge b/r) \wedge 0 \leq r < k$

$\Rightarrow r \in \{OK(a,b)\} \wedge 0 \leq r < k$

Kabulümüz yanlıştır. $r = 0$ dır. yani k/x tir. (x, k'nın bir katıdır.)

$x \in \{K(k)\} \Rightarrow \{OK(a,b)\} \subseteq \{K(k)\}$

$\Rightarrow \{OK(a,b)\} = \{K(k)\}$

Teorem// Pozitif bir k tamsayısının iki a,b tamsayılarının OKEK'i olması için gerek ve yeter şart, $(k:a)$ ve $(k:b)$ tamsayılarının aralarında asal olmasıdır.

$$\boxed{OKEK(a,b) = k \Longleftrightarrow [(k:a),(k:b)] = 1}$$

İspat// $1^\circ \Rightarrow$: $OKEK(a,b) = k \Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{Z},\ k = pa \wedge k = qb$

Ayrıca: $OBEB[(k:a),(k:b)] = OBEB(p,q) = d$

$\Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z},\ p = rd \wedge q = sd \wedge (r,s) = 1$

$\Rightarrow k = pa = a(rd) \wedge k = qb = b(sd)$

$\Rightarrow k = (ar)d \wedge k = (bs)d$

$\Rightarrow [(k:d) = ar \wedge (k:d) = bs]$

$\Rightarrow (k:d)$ a ve b nin bir ortak katıdır.

$\Rightarrow (k:d) \in \{OK(a,b)\} \wedge OKEK(a,b) = k$

$\Rightarrow k \leq (k:d) \Rightarrow d = 1$ olmalıdır.

$\Rightarrow OBEB[(k:a),(k:b)] = 1$

$\Rightarrow [(k:a),(k:b)] = 1$

Benzer şekilde yeter şart ispatlanabilir. Sonuç olarak,

$$OKEK(a,b) = 1 \Longleftrightarrow [(k:a),(k:b)] = 1$$

Teorem// Her ikisi de sıfırdan farklı a,b tamsayıları için

$$\boxed{OKEK(a,b) \cdot OBEB(a,b) = |ab|}$$

İspat// $OBEB(a,b) = d \Rightarrow \exists u,v \in \mathbb{Z},\ a = ud \wedge b = vd \wedge (u,v) = 1$

$\Rightarrow (av = uvd \wedge bu = uvd)$

$\Rightarrow [(\underbrace{uvd}_{k}) : a], [(\underbrace{uvd}_{k}) : b] = (v,u) = 1$

$\Rightarrow OKEK(a,b) = k = |uvd|$

$\Rightarrow |ab| = |ud.vd| = |uvd.d| = |uvd|.d$

$\Rightarrow |ab| = OKEK(a,b).OBEB(a,b)$

Sonuçlar :

1 - $(a,b)=1$ ise $OBEB(a,b)=1 \Rightarrow |ab| = OKEK(a,b)$

2 - $m \in Z$, $OKEK(ma,mb) = ?$

$|ma.mb| = OKEK(ma,mb).OBEB(ma,mb)$

$|ab| = OKEK(a,b).OBEB(a,b)$

$|m|^2|ab| = OKEK(ma,mb)$ | $OBEB(ma,mb) = OBEB(|ma|,|mb|)$

$= OBEB(|m||a|,|m||b|)$

$= |m| OBEB(|a|,|b|)$

$= |m| OBEB(a,b)$

$|m|^{\cancel{2}}|ab| = OKEK(ma,mb) = \cancel{|m|} OBEB(a,b)$

$\Rightarrow |m||ab| = OKEK(ma,mb) = OBEB(a,b)$

$\Rightarrow |m| OKEK(a,b)\cancel{OBEB(a,b)} = OKEK(ma,mb)\cancel{OBEB(a,b)}$

$\Rightarrow OKEK(ma,mb) = |m| OKEK(a,b)$

3 - a/b ise $OKEK(a,b) = |b|$

4 - $OKEK(a,a) = |a|$

5 - $OKEK(a,1) = |a|$

Tanım : Sıfırdan farklı $a_1, a_2, ..., a_n$ sayılarının pozitif ortak katları kümesinin en küçük elemanına bu sayıların OKEK'i denir. Ve

$OKEK(a_1, a_2, ..., a_n)$ ile gösterilir.

Teorem: Herbiri sıfırdan farklı $a_1, a_2, ..., a_n$ tam sayıları verilsin.

$OKEK(a_1, a_2, ..., a_n) = OKEK[OKEK(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n]$

Problemler :

1 - 118 ve −26 sayılarının OKEK'ini bulun ?

2 - 6, 8, 9, 12 sayılarının herbiriyle bölündüğünde 4 kalanını veren en küçük pozitif tamsayıyı bulun?

3 - 3, 11, 13 sayılarının 1000 000 dan küçük kaç tane ortak katı vardır?

4 - Bir fıçıda tahmini olarak 23 ile 65 lt arasında sirke vardır. Bu sirkeyi 2 lt'lik, 3 lt lik ve 4 lt'lik kaplara tamamen boşaltmak mümkün olduğuna göre, fıçıda en az ve en çok kaç lt sirke olabilir?

5 - 12 ve 18 ile bölünen 20 ile 100 arasındaki sayıların kümesi nedir?

6 - $a \in Z^+$ ise $OKEK(a, 2a+1) = ?$

7 - $OKEK(24, 18, 52) = ?$

8 - $a, b \in Z^+$ olsun. $ab = 51840$ ve $OKEK(a,b) = 2160$ olacak şekilde $a = ?$ $b = ?$

Çözümler:

1 - $OKEK(118, -26) = ?$

$OKEK(a,b) \cdot OBEB(a,b) = |ab|$

$OBEB(118, -26) = OBEB(118, 26) = 2$

$OKEK(118, -26) . 2 = |118 . (-26)|$

$\Rightarrow OKEK(118, -26) = 118 . 13$ //

2 - $OKEK(6,8,9,12) = OKEK[(6,8,9), 12]$

$\Rightarrow OKEK(OKEK(6,8), 9) =$

$OKEK(6,8) \cdot OBEB(6,8) = 6.8$

$8 = 6.1 + 2$

$6 = 2.3 + 0$

$OBEB(6,8) = 2$

$OKEK(6,8) . 2 = 48 \Rightarrow OKEK(6,8) = 24$

$\Rightarrow OKEK(24, 9) = 72$ $OKEK(24,9) OBEB(24,9) = 24.9$

$24 = 9.2 + 6$

$9 = 6.1 + 3$

$6 = 3.2 + 0$

$OKEK(24,9) = 72$

$\Rightarrow OKEK(72, 12) = 72$

$72 + 4 = 76$ //

3 - $OKEK(3, 11, 13) = 3.11.13 = 33.13 = 429$

$\{OK(a,b)\} = \{K(k)\}$ $1.000.000 : 429 = \underline{2333} + k$ → kalan

4 - $OKEK(2,3,4) = 12$

$\{OK(2,3,4)\} = \{K(12)\} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72 \ldots\}$

$24 \leq x \leq 60$ en az 24 lt, en çok 60 lt.

6 - $a \in Z^+$ $OKEK(a, 2a+1) = a(2a+1)$ $(a, 2a+1) = 1$ $\Rightarrow OKEK(a, 2a+1) = 2a^2 + a$ //

8 - $OKEK(a,b) . OBEB(a,b) = |ab|$

$2160 . OBEB(a,b) = 51840$ $OBEB(a,b) = 24$

$OBEB(a,b)=d \Rightarrow (d/a \wedge d/b)$

$\Rightarrow \exists u,v \in Z,\ a=ud \wedge b=vd \wedge (u,v)=1$

$\Rightarrow ab=(uvd).d$

$ab=uv.d^2$

$51840=u.v(24)^2 \Rightarrow u.v=90 \wedge (u,v)=1$

u	v	a = ud	b = vd			
1	90	1.24	24.90	a=24	b=24.90=2164	1
2	45	2.24	24.45	a=48	b=980	2
5	18	5.24	24.18	a=120	b=...	3
9	10	9.24	24.10	a=216	b=240	4

- Asal Sayılar -

Tanım: -1,0,1 den farklı bir p tamsayısının -p,-1,1 ve p den başka böleni yoksa bu sayıya asal sayı denir. Asal olmayan ve -1,0,1 den farklı olan tamsayıya bileşik sayı denir.

Örnek// 2, -3, 5, -11, 41, -97, 8191 asal sayılardır.

Teorem: P bir asal sayı ve q herhangi bir tamsayı olsun.

$P/q \vee (P,q)=1$ önermesi doğrudur.

İspat// p asal $\Rightarrow OBEB(p,q)=1 \vee OBEB(p,q)=|p|$

$\Rightarrow (p,q)=1 \vee P/q$

Teorem: $a,b \in Z^+$ ve p asal olsun.

$P/ab \Rightarrow (P/a \vee P/b)$

İspat// 1° Eğer P/a ise teorem doğrudur.

2° $P \not/ a$ ise $\Rightarrow [(P,a)=1 \wedge P/ab] \Rightarrow P/b$

Teorem: $a_1,a_2,\ldots,a_n$ tamsayılar ve p bir asal sayı olsun. $n\in N$ olmak üzere

$P/\prod_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \exists a_i,\ P/a_i$

İspat// Tümevarımla yapılacak,

1° $n=1,\ P/\prod_{i=1}^{1} a_i = P/a_1$

2° n=k için önerme doğru olsun.

$P/\prod_{i=1}^{k} a_i \Rightarrow \exists a_i,\ P/a_i$ olsun.

3° $n=k+1,\ P/\prod_{i=1}^{k+1} a_i \Rightarrow P/(\prod_{i=1}^{k} a_i).a_{k+1} \Rightarrow P/(\prod_{i=1}^{k} a_i) \vee P/a_{k+1}$

$\Rightarrow (\exists a_i, P/a_i) \vee P/a_{k+1} \Rightarrow \exists a_i, P/a_i$

Teorem: (Aritmatiğin Temel Teoremi):

1'den büyük her tamsayı ya asaldır, ya da bu tamsayı, sıra önemli olmamak üzere asal sayıların çarpımı olarak tek türlü yazılır.

İspat// 1°) Varlığın ispatı: Tümevarımla yapılacak.

Teoremin şartlarını sağlayan tamsayıların kümesi D olsun.

1°) 2, 1'den büyük en küçük tamsayı $\Rightarrow 2 \in D$

2°) $2 \le k < a$ olmak üzere $k \in D$ olsun.

3°) $k+1 = a$ için → a asal ise $a \in D$

→ a asal değilse $a = uv$, $u, v \in Z$

$\Rightarrow (u < a \wedge v < a) \Rightarrow$ → u, v asal ise $u, v \in D$
→ u, v asal değilse

$\Rightarrow u = p_1 . p_2 . \ldots p_r \;\wedge\; v = q_1 . q_2 . \ldots q_r$ asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir.

$\Rightarrow a = uv = p_1 . p_2 \ldots p_r . q_1 . q_2 \ldots q_r \Rightarrow a \in D$

2°) Tekliğin İspatı: Aksini farzedelim. a tamsayısı asal sayıların çarpımı olarak iki türlü yazıldığını farzedelim.

$a = p_1 . p_2 \ldots p_n \quad a = q_1 . q_2 \ldots q_r$

$\Rightarrow p_1 . p_2 \ldots p_n = q_1 . q_2 \ldots q_r \Rightarrow p_1 / q_1 . q_2 \ldots q_r$

$\Rightarrow \exists q_i (i = 1, 2, \ldots, n) \quad n / q_i$

$\Rightarrow p_1 = q_i \;\wedge\; p_2 = q_j \;\wedge \ldots \wedge\; p_n = q_k$

Sonuç// 1°) $a = p_1 . p_2 \ldots p_n$

b sayısı için α tane çarpan p'ye eşit

β tane " q'ya eşit

— — — — — — —

λ " " t'ye eşit olsun.

$b = p^{\alpha} . q^{\beta} \ldots t^{\lambda}$: b'nin asal çarpanlara ayrılış biçimi.

2°) 1'den büyük her tamsayının en az bir asal böleni vardır.

3°) p asal sayısı bir a tamsayısının bir kuvvetini bölerse, a'yı da böler.

$P/a^n \Rightarrow P/a$

$P/(a.a \ldots a) \Rightarrow P/a$

Teorem: Pozitif bir tamsayının 1'den farklı bölenlerinin en küçüğü asal sayıdır.

İspat// a pozitif bir sayı olsun. a asal ise $\{1, a\}$ pozitif bölenleri kümesidir. 1'den farklı olanı a'dır ve asaldır.

a asal değilse $1 < p < q < \dots < a$

p asal ise teorem doğrudur.

p asal değilse $1 < r < p$ teorem doğrudur.

Teorem: Pozitif bir a bileşik sayısı verilsin. $k^2 \leq a$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı k olsun. a'nın k'ya eşit veya k'dan küçük olan en az bir asal böleni vardır.

İspat// a'nın en az bir asal böleni vardır. Asal bölenlerin en küçüğü p olsun.

$\Rightarrow a = p a_1$ şeklinde yazılabilir. $\Rightarrow p < a_1$

Ayrıca $p \overset{?}{<} k$ kabul edelim ki, $k < p$ olsun.

$\Rightarrow (k < p \wedge p < a_1) \Rightarrow (k < p \wedge k < a_1) \Rightarrow (k+1 \leq p \wedge k+1 \leq a_1)$

$\Rightarrow (k+1)^2 \leq p a_1 \Rightarrow (k+1)^2 \leq a$ kabulümüz $k < p$ yanlıştır. $\Rightarrow p \leq k$ dır.

Soru// a asal mıdır? $k^2 \leq a < (k+1)^2$ veya $k^2 < a \leq (k+1)^2$ olacak şekilde pozitif k tamsayısı bulunur. k ya eşit veya küçük olan asal sayılar içinde a'yı böleni varsa a bileşik sayı, yoksa a asal

Örnek// 359 sayısının asal olup olmadığını araştırın.

$\underline{359} \Rightarrow 18^2 < 359 < 19^2 \qquad k = 18$

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ 359 asal sayıdır.

Örnek// $\underline{371} \Rightarrow 19^2 < 371 < 20^2 \quad \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 7 ile bölünür. asal değil.

Teorem: Pozitif asal sayıların kümesi sonsuz ve sayılabilir bir kümedir.

I – Pozitif asal sayılar kümesi sonsuzdur? Aksini farzedelim. Yani pozitif asal sayılar kümesi, sonlu olsun. $\{2, 3, 5, 7, \dots, p\} = A$ olsun.

$a = (2.3.5.7 \dots p) + 1$ alalım.

a sayısı A nın elemanları ile bölündüğünde 1 kalanını verir. $a \notin A$

a asal $\Rightarrow$ A kümesi için tanım yanlıştır.

a asal değil $\Rightarrow$ a nın en az bir asal böleni vardır.

$\Rightarrow$ A 'nın tanımı yanlıştır $\Rightarrow$ A kümesi sonsuzdur.

II - Pozitif asal sayıların kümesi sayılabilir ve sonsuzdur.

Problemler :

1- 179, 539, 267, 781, 859, 937, 2287 sayılarının hangileri asaldır?

2- $B = \{x : x$ asal sayı ve $-10 < x < 30\}$ kümesinin elemanlarını yazın.

3- "$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $n^2 - n + 41$ asal sayıdır." önermesinin doğruluk değeri nedir?

4- $6n-1$ şeklinde yazılabilen asal sayıların kümesinin sonsuz olduğunu ispat edin.

5- 3 den büyük her asal sayının $6k+1$ veya $6k-1$ şeklinde yazılabileceğini göst?

6- 4 veya 4 ten büyük her çift sayının iki asal sayının toplamı olarak yazıldığı bilindiğine göre, 7'den büyük her tek doğal sayının 3 asal sayının toplamı olarak yazıldığını gösterin.

Çözümler :

1- 539 $\Rightarrow$ $23^2 < 539 < 24^2$ $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$

2287 $\Rightarrow$ $47^2 < 2287 < 48^2$

$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$

2- $\{-7,-5,-3,-2,2,3,5,7,11,\overset{17}{\underset{13}{,}}19,23,29\}$

3- "$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $n^2 - n + 41$ asaldır."

$n=1$, $1^2 - 1 + 41 = 41$

$n=4$, $4^2 - 4 + 41 = 53$

5   61

20   421

41   41^2

4- $\{p_1, p_2, ..., p_t\} = A$ $\quad p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_t$

$u = 6(\underbrace{p_1 p_2 ... p_n}_{n}) - 1$ $\quad$ A sonsuzdur.

6- n tek ve $n > 7 \Rightarrow (n-3 > 4 \wedge n-3$ çift$) \Rightarrow \exists p, q$ asal, $n-3 = p+q$

$n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow n = 3 + p + q$

– Bir Tamsayının Bölenleri –

(Her tamsayı ya asaldır veya asal sayıların çarpımı olarak, sıra önemli olmamak üzere, asal sayıların çarpımı olarak, tek türlü olarak yazılır.)

örnek// 60 sayısının pozitif bölenleri nedir?

$60 = 2^2 . 3 . 5$

1°) $2^0, 2^1, 2^2$ 60'ın birer pozitif bölenidir.

$1, 2, 4$

2°) $3.1,\ 3.2,\ 3.4$ 'de 60'ın pozitif bölenidir.

3°) $5.1,\ 5.2,\ 5.4,\ 5.3.1,\ 5.3.2,\ 5.3.4$ 60'ın pozitif bölenleridir.

$\{B(60)\}^+ = \{1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60\}$

Bir a tamsayısının pozitif bölenleri kümesinin eleman sayısını $\nu(a)$ ile sembolik olarak gösterelim.

Teorem: Bir a^+ tamsayısının pozitif asal çarpanlarının kuvvetlerine göre yazılış biçimi $a = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ olduğuna göre

$$\nu(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i+1)$$

ispat// a'nın bir pozitif böleni u olsun. $a = uv$ şeklinde bir v pozitif böleni vardır.

$u = p_1^{\beta_1} . p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$ yazılabilir. $a = uv$ olduğundan

$$\Rightarrow p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1} p_1^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r} \Rightarrow p_1^{\alpha_1-\beta_1} . p_2^{\alpha_2-\beta_2} \dots p_r^{\alpha_r-\beta_r}$$

$u = p_1^{\beta_1} . p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$ ifadesinde $a = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$

β_1 yerine $0, 1, 2, \dots, \alpha_1$ sayılarını verelim.

$\Rightarrow \alpha_1 + 1$ tane çarpan (bölen) bulunur.

β_2 yerine $0, 1, 2, \dots, \alpha_2$ sayılarını verelim.

$\Rightarrow \alpha_2 + 1$ tane çarpan (bölen) bulunur.

– – – – – – – – – –

β_r yerine $0, 1, 2, \dots, \alpha_r$ sayılarını verelim.

$\Rightarrow \alpha_r + 1$ tane çarpan (bölen) bulunur.

$\nu(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)$

asal

Örnek// 1400 sayısının pozitif bölenleri kaç tanedir?

$1400 = 2^3 . 5^2 . 7^1$

$P_1 = 2, \alpha_1 = 3 \; ; \; P_2 = 5, \alpha_2 = 2 \; ; \; P_3 = 7, \alpha_3 = 1$

$\nu(1400) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$ tane

Pozitif bölenleri $\Rightarrow$

1-) $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ 1400 ün pozitif bölenleridir.

2-) $\cancel{5^0 = 1}$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$ " "

3-) 5.2, 5.4, 5.8, 25.2, 25.4, 25.8 " "

4-) $7.1 = 7$, 7.2, 7.4, 7.8, 7.5, 7.25, $7.5.2$, $7.5.4$, $7.5.8$, $7.25.2$, $7.25.4$, $7.25.8$, 1400 ün pozitif bölenleridir.

Teorem: Pozitif bir a tamsayısının pozitif bölenlerinin sayısı $\nu(a)$ ise

a'nın pozitif bölenlerinin çarpımı,

$\boxed{a^{1/2\,\nu(a)}}$ dır.

İspat// a'nın pozitif bir böleni u olsun. $a = u.v$ şeklinde yazılabilir.

v'de pozitif bir bölendir. a'nın pozitif bölenlerinin kümesi,

$A = \{1, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a\}$

$1 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < a$

$u = 1 \Rightarrow v = a \Rightarrow a = \overset{u}{1} . \overset{v}{a} = \overset{u}{a} . \overset{v}{1}$

$u = a_1 \Rightarrow v = a_{n-1} \Rightarrow a = a_1 . a_{n-1} = a_{n-1} . a_1$

$u = a_2 \Rightarrow v = a_{n-2} \Rightarrow a = a_2 . a_{n-2} = a_{n-2} . a_2$

$$a^{\nu(a)} = (1.a)(a_1 . a_{n-1})(a_2 . a_{n-2}) \ldots (a_{n-2} . a_2)(a_{n-1} . a_1)(a.1)$$

$$\Rightarrow a^{\nu(a)} = (1 . a_1 . a_2 \ldots a_{n-2} . a_{n-1} . a)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^{\frac{1}{2}\nu(a)} = (1 . a_1 . a_2 \ldots a_{n-2} . a_{n-1} . a)}$$

Örnek// 60'ın pozitif bölenlerinin çarpımı nedir?

$60 = 2^2 . 3^1 . 5^1$

$\nu(60) = 3.2.2 = 12$ tane

$60^{1/2\,\nu(60)} = 60^6 = 46656000000$

Teorem: Pozitif bir a tamsayısının asal çarpanlarının kuvvetlerine göre yazılış biçimi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ olduğuna göre a'nın pozitif bölenlerinin toplamı $\sigma(a)$ ise,

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

İspat// a'yı aralarında asal olan u,v tamsayılarının çarpımı olarak yazalım. yani $a = uv \wedge (u,v)=1$ olsun. u'nun pozitif bölenleri,

$1, u_1, u_2, \dots, u$

v'nin pozitif bölenleri, $1, v_1, v_2, \dots v$

Eğer d/a ise $d = u_i v_i$ şeklinde yazılabilir.

1 - $1.1, 1.u_1, 1.u_2, \dots, 1.u$ da a'nın bölenleridir.

2 - $v_1.1, v_1.u_1, v_1.u_2, \dots, v_1.u$ " " "

3 - $v_2.1, v_2.u_1, v_2.u_2, \dots, v_2.u$ " " "

$v.1, v.u_1, v.u_2, \dots, v.u$ " " "

+

$$\sigma(a) = 1.1 + 1.u_1 + 1.u_2 + \dots + 1.u + v_1.1 + v_1.u_1 + \dots + v_2.u + v_2.1 + v_2.u_1 + \dots + v_2.u$$
$$\dots + v.1 + v.u_1 + \dots + u.v$$

$= \sigma(u) + v_1.\sigma(u) + v_2\sigma(u) + \dots + v\sigma(u)$

$= \sigma(u)(1 + v_1 + v_2 + \dots + v)$

$= \sigma(u)\sigma(v)$

$\Rightarrow [a = u.v \wedge (u,v)=1] \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(u).\sigma(v)$

$\Rightarrow a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$

$\Rightarrow \sigma(a) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha_r})$

p^α nın pozitif bölenleri (p asal)

$p^0 = 1, \ p^1 = p, \ p^2, p^3, \dots, p^\alpha$

$\Rightarrow \sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^\alpha$

$p.\sigma(p^\alpha) = p + p^2 + p^3 + p^4 + \dots + p^\alpha + p^{\alpha+1}$

$\sigma(p^\alpha)(p-1) = p^{\alpha+1} - 1 \Rightarrow \sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$

$$\Rightarrow \sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

a^+ nın pozitif bölenleridir.

Örnek// 120 sayısının pozitif bölenleri toplamı nedir?

$120 = 2^3 . 3^1 . 5^1$

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_1=2 & \alpha_1=3 \\ p_2=3 & \alpha_2=1 \\ p_3=5 & \alpha_3=1 \end{array}\right\} \sigma(120) = \frac{2^{3+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{1+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = \frac{2^4-1}{1} \cdot \frac{3^2-1}{2} \cdot \frac{5^2-1}{4}$$

$$= 15.4.6 = 360$$

Tanım: (Mükemmel - Perfect - Yetkin Sayı) :

$a \in Z$ olsun. $\sigma(a) = 2|a|$ ise a sayısına mükemmel (yetkin) sayı denir.

Örnek// 28 sayısı yetkin midir?

$28 = 2^2 . 7$

$\sigma(28) = \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{7^2-1}{7-1} = 7.8 = 56 = 2.28$ yetkindir.

Teorem: $p \in Z^+$ olsun. 2^p-1 asal sayı ise $2^{p-1}(2^p-1)$ şeklinde yazılan her tamsayı yetkindir.

İspat// $a = 2^{p-1}(2^p-1)$ olsun. $2^p-1 = n$ olsun.

$$a = 2^{p-1}.n \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(2^{p-1})\sigma(n) = \frac{2^p-1}{2-1}(1+n)$$

$$\Rightarrow \sigma(a) = (2^p-1)2^p = 2.\underbrace{2^{p-1}(2^p-1)}_{a} \Rightarrow \sigma(a) = 2a = 2|a|$$

Örnek// $p=5$, $2^p-1 = 2^5-1 = 31$ asaldır.

496 sayısı, $496 = 31.16 = 2^4.31 = 2^{5-1}.(2^5-1)$ yetkindir.

Tanım: (Çok Katlı Yetkin Sayı) :

$a,k \in Z^+$ olsun. $\sigma(a) = (k+1)a$ ise a sayısına k. dereceden yetkin sayı denir. (k. sınıftan yetkin sayı denir.) k : çok katlı yetkin sayının sınıfı deni

Örnek// 120 sayısı kaçıncı sınıftan yetkin sayıdır?

$\sigma(120) = 360 = 3.120 \qquad k+1 = 3 \quad k = 2$

2. dereceden (sınıftan) yetkin sayıdır.

Problemler :

1 - 540 sayısının pozitif bölenlerinin; sayısını, çarpımını, toplamını, kümesini ?

2 - 4680, 1275, 1321 sayılarının pozitif bölenlerinin toplamını ?

3 - 8128 sayısı yetkin sayı mıdır ?

Çözümler :

1 - $540 = 2^2 . 3^3 . 5^1$

$\nu(540) = (2+1)(3+1)(1+1) = 3.4.2 = 24$ tane böleni var.

$540^{1/2\,\nu(24)} = 540^{12}$ çarpımı

$$\sigma(540) = \frac{2^{2+1}-1}{2-1}\,\frac{3^{3+1}-1}{3-1}\,\frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 7.40.6 = 1680 \text{ toplamı}$$

$2^0 . 2^1 . 2^2$ 1, 4, 4 $3^1, 3^2, 3^3, 5^1$ 3, 7, 27, 5

$3.1, 3.2, 3.4, 3^2.1, 3^2.2, 3^2.4, 3^3.1, 3^3.2, 3^3 4, 5.1, 5.2, 5.4, 5.3, 5.3^2, 5.3^3$

$5.3.2, 5.3.4, 5.9, 5.9.2, 5.9.4, 5.27, 5.27.2, 5.27.4$

$\{1, 2, 4, 3, 9, 27, 5, 6, 12, 18, 36, 54, 108, 10, 20, 15, 45, 135, 30, 60, 90, 180, 270, 540\}$

3 - $8128 = 2^6 . 127$

$$\sigma(8128) = \frac{2^7-1}{1} . \frac{127^2-1}{126} = 127 . \frac{127^2-1}{126} = 2.8128 \text{ yetkin sayıdır.}$$

– MODÜLER ARİTMETİK –

Tanım : $m \in Z^+$ olsun. $x, y \in Z$ için $x-y$ sayısı m sayısına bölünüyorsa x sayısı y sayısına m modülüne göre denktir denir. Ve

$$x \equiv y \pmod m \iff m \mid x-y$$

şeklinde gösterilir. $u, v \in Z$ olmak üzere u ve v tam sayılarının m modülüne göre denk olmadığı

$$u \not\equiv v \pmod m$$ şeklinde gösterilir.

Örnek // $5 / 13-3 \Rightarrow 13 \equiv 3 \pmod 5$

Örnek // $7 / -12-2 \Rightarrow -12 \equiv 2 \pmod 7$

1. Teorem : $x, y \in Z$, $m \in Z^+$ olsun. $x \equiv y \pmod m \iff \exists k \in Z$ için $x = y + mk$ olmasıdır.

$\Rightarrow$ kabul edelim ki, $x \equiv y \pmod m$ olsun

$\Rightarrow m \mid x-y$

$\Rightarrow \exists k \in Z$ vardır ki $x - y = mk$ dır. $\Rightarrow x = y + mk$

$\Leftarrow$: kabul edelim ki $\exists k \in Z$ için $x = y + mk$ olsun.

$\Rightarrow x - y = mk$ dir.

$\Rightarrow m \mid x - y$

$\Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$

2. Teorem: $x, y \in Z$, $m \in Z^+$ olsun. $x \equiv y \pmod{m}$ olması için x ile y'nin m ile bölünmesinden elde edilen kalanların eşit olması gerekir ve yeter.

İspat// $\Rightarrow$: kabul edelim ki $x \equiv y \pmod{m}$ olsun.

$x = mp + r$, $0 \leq r < m$ dir. - - - - (1)

$y = mq + s$, $0 \leq s < m$ vardır.

$r \stackrel{?}{=} s$ $\quad x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow m \mid x - y$

$\Rightarrow \exists k \in Z,\ x - y = mk$

$\Rightarrow x = y + mk$

$\Rightarrow x = mq + s + mk$

$\Rightarrow x = m(q + k) + s$ - - - (2)

(1) ve (2) den dolayı $r = s$ dir.

$\Leftarrow$: $x = mp + r$, $0 \leq r < m$

$y = mq + s$, $0 \leq s < m$ kabul edelim ki $r = s$ olsun.

$\left.\begin{array}{l} x = mp + r \Rightarrow r = x - mp \\ y = mq + s \Rightarrow s = y - mq \end{array}\right\}$ $\quad x - mp = y - mq$

$x - y = mp - mq = m(p - q)$

$m \mid x - y \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$

3. Teorem: $x, y, z, w, u, v \in Z$, $m \in Z^+$ olmak üzere

$x \equiv y \pmod{m}$ ve $z \equiv w \pmod{m}$ ise aşağıdaki önermeler doğrudur.

a) $x + u \equiv y + u \pmod{m}$

b) $xu \equiv yu \pmod{m}$

c) $x + z \equiv y + w \pmod{m}$

d) $x - z \equiv y - w \pmod{m}$

e) $xz \equiv yw \pmod{m}$

f) $ux + vz \equiv uy + vw \pmod{m}$ dir.

İspat// a- $x \equiv y \pmod m \Rightarrow m \mid x-y$ (mod tanımı)

$\Rightarrow x-y = mk,\ \exists k \in \mathbb{Z}$ (hipotezden)

$\Rightarrow x = y+mk$ (x'i çekerek)

$\Rightarrow x+u = y+mk+u$ (her iki tarafa u ekleyerek)

$\Rightarrow (x+u) = (y+u)+mk$ (+ nın değişme öz.)

$\Rightarrow x+u \equiv y+u \pmod m$ (mod tanımı)

b- $xu \equiv yu \pmod m \Rightarrow m \mid x-y$

$\Rightarrow x = y+mk$

$\Rightarrow xu = (y+mk)u$

$\Rightarrow xu = yu+mku$

$\Rightarrow xu \equiv yu \pmod m$

4. Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$x \equiv y \pmod m \Rightarrow x^n \equiv y^n \pmod m \text{ dir.}$$

İspat// Tümevarımla yapılacaktır.

5. Teorem: $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$zx \equiv zy \pmod m$, $OBEB(z,m) = d$ ve $m = dm'$ ise,

$x \equiv y \pmod{m'}$ olur.

İspat// $zx = zy \pmod m$ $OBEB(z,m) = d$ ve $m = dm'$ olsun.

$OBEB(z,m) = d \Rightarrow d/z$ dir.

$z = dz'$ olacak şekilde $\exists z' \in \mathbb{Z}$ vardır.

$zx = zy \pmod m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ için $zx = zy+mk$ dır.

$\Rightarrow dz'x = dz'y + dm'k$

$\Rightarrow dz'x = d(z'y+m'k)$

$\Rightarrow z'x = z'y+m'k$

$\Rightarrow z'(x-y) = m'k$ [Ödev $(m', z') = 1$]

$\Rightarrow m' \mid x-y \Rightarrow x \equiv y \pmod{m'}$ dir.

6. Teorem: $x \equiv y \pmod m$ ve $d \mid m$ ise $x \equiv y \pmod d$ dir.

İspat// $x \equiv y \pmod m \Rightarrow m \mid x-y$ $d \mid m \Rightarrow$ geçişme öz.'den $d \mid x-y$ dir.

$\Rightarrow x \equiv y \pmod d$ dir.

Örnek// $47 \equiv (-1) \bmod 12$ ise

$3/12$ ve $4/12 \Rightarrow 47 \equiv (-1)(\bmod 3)$

$47 \equiv (-1)(\bmod 4)$

7. Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ ve $OKEK(m_1, m_2) = m$ olsun.

$x \equiv y (\bmod m) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod m_1)$ ve $x \equiv y (\bmod m_2)$ dir.

İspat// $\Rightarrow$: $OKEK(m_1, m_2) = m$, $x \equiv y (\bmod m)$ olsun.

m/m_1 ve m/m_2

6. teoremden dolayı, $x \equiv y (\bmod m_1)$, $x \equiv y (\bmod m_2)$

$\Leftarrow$: $x \equiv y (\bmod m_1)$ ve $x \equiv y (\bmod m_2)$ olsun.

$OKEK(m_1, m_2) = m$ $\left.\begin{array}{l} x \equiv y (\bmod m_1) \Rightarrow m_1 / x-y \\ x \equiv y (\bmod m_2) \Rightarrow m_2 / x-y \end{array}\right\}$ $OKEK(m_1, m_2) = m$ olduğundan,

$m \mid x-y \Rightarrow x \equiv y (\bmod m)$

Örnek// $32 \equiv 104 (\bmod 8) \wedge 32 \equiv 104 (\bmod 12)$ ve $OKEK(8,12) = 24$ ise

$32 \equiv 104 (\bmod 24)$ önermesi de doğrudur.

Teorem: (Genelleştirme): $m_i \ (i = 1, 2, \dots, n) \in \mathbb{Z}^+$ $(m_i, m_j) = 1$ olsun

$x \equiv y (\bmod m_i) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod m_1, m_2, \dots, m_n)$

Sonuç// Pozitif bir m tamsayısının asal sayıların kuvvetlerine göre yazılış biçimi, $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ olsun.

$x \equiv y (\bmod m) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod p_i^{\alpha_i})$

Örnek// $425 \equiv 5 (\bmod 60) \wedge 60 = 2^2 . 3 . 5$

$\Rightarrow 425 \equiv 5 (\bmod 2^2) \wedge 425 \equiv 5 (\bmod 3) \wedge 425 \equiv 5 (\bmod 5)$

Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \equiv y (\bmod m)$ olsun.

$[(x : d) = u$ ve $(y : d) = v$ ve $(m : d) = n] \Rightarrow u \equiv v (\bmod n)$

İspat// a) $(x : d) = u \wedge (y : d) = v \wedge (m : d) = n \Rightarrow x = ud \wedge y = vd \wedge m = nd$

b) $x \equiv y (\bmod m) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $x = y + km$

$\Rightarrow ud = vd = k(nd) \Rightarrow ud = (v + kn)d \Rightarrow u = v + kn \Rightarrow u \equiv v (\bmod n)$

Örnek// $28 \equiv 12 (\bmod 8) \Rightarrow 7.4 \equiv 3.4 (\bmod 2.4) \Rightarrow 7 \equiv 3 (\bmod 2)$

Problemler :

1- 3^{1000} ün 5 modülüne göre denk olduğu en küçük pozitif tamsayı nedir?

2- $\sum_{i=1}^{5} i \equiv x \pmod 7$ ise $x = ?$ (en küçük $x \in Z^+$)

3- $23^{2n+1} + 1 \equiv x \pmod{24}$ bağıntısını sağlayan en küçük pozitif $x = ?$

4- $3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8$

5- $a, b \in Z^+$, $a < m \wedge b < m$ olsun. $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a = b$ old. isp. ?

6- $a, b \in Z^+$ ve m asal olsun. $(a+b)^m \equiv a^m + b^m \pmod m$ old. isp. ?

Çözümler :

1- $3^{100} \equiv x \pmod 5$

$3 \equiv 3 \pmod 5$

$3^2 \equiv 4 \pmod 5$

$3^3 \equiv 2 \pmod 5$

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$

$(3^4)^{25} \equiv 3^{100} \equiv 1^{25} \pmod 5 \Rightarrow 3^{100} \equiv 1 \pmod 5$ //

2- $\sum_{i=1}^{5} x \pmod 7 \equiv \frac{5.6}{2} \equiv 15$

$15 \equiv 1 \pmod 7$ $\quad x = 1$ //

3- $23 \equiv -1 \pmod{24}$ $\quad x \equiv y \pmod m \Rightarrow x^n \equiv y^n \pmod m$

$\Rightarrow 23^2 \equiv (-1)^2 \pmod{24}$

$\Rightarrow 23^2 \equiv 1 \pmod{24}$

$\Rightarrow (23^2)^n \equiv 23^{2n} \equiv 1^n \pmod{24}$

$\Rightarrow 23^{2n} \equiv 1 \pmod{24}$

$\Rightarrow 23^{2n}.23 \equiv 1.23 \pmod{24} \equiv 23^{2n+1} \equiv 23 \pmod{24}$

$$\begin{array}{r} 23^{2n+1} \equiv 23 \pmod{24} \\ + \quad 1 \equiv 1 \pmod{24} \\ \hline 23^{2n+1} + 1 \equiv 0 \pmod{24} \end{array}$$

4- $3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8$

$\Rightarrow 3 \equiv 3 \pmod 8$

$\Rightarrow 3^2 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow (3^2)^n \equiv 1^n \pmod 8$

$\Rightarrow 3^{2n} \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 7 \equiv 7 \pmod 8 \\ + \quad 3^{2n} \equiv 1 \pmod 8 \\ \hline 3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8 \end{array}$$

5- $a,b\in Z^+$, $a<m \wedge b<m \Rightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow a\overset{?}{=}b$

$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow m/a-b \wedge a-b<mn \quad a>b$

$\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

6- $a,b\in Z^+$, m asal $\Rightarrow (a+b)^m \equiv a^m+b^m\,(\mathrm{mod}\,m)$

$$(a+b)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i}.b^i=\binom{m}{0}a^mb^0+\binom{m}{1}a^{m-1}b^1+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\dots+\binom{m}{m-2}a^{m-(m-2)}b^{m-2}$$
$$+\binom{m}{m-1}a^{m-(m-1)}b^{m-1}+\binom{m}{m}a^{m-m}.b^m$$

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+\dots+\frac{m(m-1)}{2}a^2b^{m-2}+ma.b^{m-1}+b^m$$

$$(a+b)^m-\left[a^m+b^m\right]=mk,\ k\in Z$$

$$\Rightarrow (a+b)^m\equiv a^m+b^m(\mathrm{mod}\,m)$$

Kalan Sınıfları

Tamsayılar kümesinde m modülüne göre denk olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. (yansıma, simetri, geçişmeli)

İspat// $x\equiv y(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow m/x-y \Leftrightarrow \beta$

1° $\forall x\in Z$ için $x-x=0 \Rightarrow m/0 \Rightarrow x\equiv x(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow (x,x)\in\beta$

2° $x,y\in Z$ için $(x,y)\in\beta \Rightarrow x\equiv y(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow m/x-y \Rightarrow m/-(y-x) \Rightarrow m/y-x$

$\Rightarrow y\equiv x(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow (y,x)\in\beta$

3° Ödev//

Tanım: m modülüne göre denk olma denklik bağıntısının, tamsayılar kümesinden ayırdığı denklik sınıflarına, m'nin kalan sınıfları denir.

$\forall x\in Z$ için $\overline{x}=\{y: y\in Z \wedge y\equiv x(\mathrm{mod}\,m)\}$

Teorem: Z'de tanımlı m modülüne göre denk olma bağıntısının Z'den ayırdığı farklı denklik sınıfı sayısı m tanedir.

İspat// Herhangi bir tamsayının m'ye bölümünde bulunan kalanlar;

$0,1,2,3,\dots,m-1$ sayılarından birisidir. (m tanedir.)

Bu m tane kalan birbirinden farklıdır. Bunların denklik sınıfları;

$\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\dots,\overline{m-1}$ (m tanedir.)

$\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\dots,\overline{m-1}\}$ kümesi Z nin bir ayrımıdır.

$\mathbb{Z}/m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$

Buna göre, $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/m$ olmak üzere, $a \in \overline{x} \Rightarrow x \equiv a (mod\, m)$

$b \in \overline{y} \Rightarrow y \equiv d (mod\, m)$

1° $x+y \equiv (a+b)(mod\, m) \Leftrightarrow \overline{x+y} = \overline{a+b}$

2° $xy \equiv ab\,(mod\, m) \Leftrightarrow \overline{xy} = \overline{ab}$

Tanım: ($\mathbb{Z}/m$ de Toplama):

$\oplus : \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m \longrightarrow \mathbb{Z}/m$

$(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow \overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y}$ olarak tanımlanan bu işleme $\mathbb{Z}/m$ de kalanlı toplama denir.

Tanım: ($\mathbb{Z}/m$ de Çarpma):

$\odot : \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m \longrightarrow \mathbb{Z}/m$

$(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow \overline{x} \odot \overline{y} = \overline{x\,y}$ 〃 〃 〃 〃

kalanlı çarpma denir.

Teorem: $\mathbb{Z}/m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ kümesi verildiğinde $(\mathbb{Z}/m, \oplus, \odot)$ matematik yapısı birim elemanlı komütatif bir halkadır.

İspat// $(\mathbb{Z}/m, \oplus, \odot)$

I- $(\mathbb{Z}/m, \oplus)$ bir abel grubudur ?

a) Birim eleman (sıfır) $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/m \wedge \exists e \in \mathbb{Z}/m,\ \overline{x} \oplus e = e \oplus \overline{x} = \overline{x}$

$\left.\begin{array}{l}\overline{x} \oplus e = \overline{x} \quad e = \overline{y}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x} \Rightarrow \overline{x+y} = \overline{x} \Rightarrow x+y \equiv x (mod\, m)$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x+y = x+km \Rightarrow y = km \Rightarrow y \equiv 0 (mod\, m)$

$\Rightarrow \overline{y} = \boxed{\overline{0} = e}$ (kapalılık, birleşme, değişme, ters eleman = ödev)

II- a) Birim eleman ($\odot$ işlemine göre)

$\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/m \Rightarrow \overline{x} \odot e = e \odot \overline{x} = \overline{x}$

$\Rightarrow \overline{x} \odot e = \overline{x} \Rightarrow \overline{x} \odot \overline{y} = \overline{x} \Rightarrow \overline{xy} = \overline{x} \Rightarrow xy \equiv x\,(mod\, m)$

$e \in \mathbb{Z}/m,\ e = \overline{y}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ xy = x+km \Rightarrow xy - x = km \Rightarrow x(y-1) = km$

$\Rightarrow m / x(y-1),\ \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow m / x(y-1) \wedge (m, x) = 1 \Rightarrow m / y-1$

$\Rightarrow y \equiv 1 (mod\, m) \Rightarrow \overline{y} = e = \overline{1}$

III - Dağılma özelliği vardır. $\Rightarrow (\mathbb{Z}/m, \oplus, \odot)$

Teorem: m asal sayı ise $\mathbb{Z}/m$ bir tamlık bölgesidir.

İspat// $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/m$ olsun. $\bar{x} \odot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow (\bar{x} = \bar{0} \lor \bar{y} = \bar{0})$

$\bar{x} \odot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow xy \equiv 0 (\bmod m) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ xy = km$

$\Rightarrow m / xy \Rightarrow (m/x \lor m/y) \Rightarrow [x \equiv 0 (\bmod m) \lor y \equiv 0 (\bmod m)]$

$\Rightarrow (\bar{x} = \bar{0} \lor \bar{y} = \bar{0})$

$m = 10,\ \bar{x} = \bar{2} \land \bar{y} = \bar{5} \Rightarrow \bar{x} \odot \bar{y} = \bar{2} \odot \bar{5} = \bar{0}$

Teorem: m asal sayı ise $(\mathbb{Z}/m, \oplus, \odot)$ bir cisimdir.

$\mathbb{Z}/m - \{\bar{0}\}$ kümesinin ters eleman özelliği vardır. ?

$\forall x \in \mathbb{Z}/m - \{\bar{0}\} \Rightarrow \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow x \not\equiv 0 (\bmod m) \Rightarrow m \not| x \Rightarrow \text{OBEB}(m, x) = 1$

$\Rightarrow (m, x) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z},\ 1 = mu + xv \Rightarrow 1 - xv = mu \Rightarrow m / 1 - xv$

$\Rightarrow m / xv - 1 \Rightarrow xv \equiv 1 (\bmod m) \Rightarrow \overline{xv} = \bar{1} \Rightarrow \bar{x} \odot \bar{v} = \bar{1} \Rightarrow x^{-1} = \bar{v} \in \mathbb{Z}/m$

Tanım: $(\mathbb{Z}/m, \oplus, \odot)$ cismine asal cisim denir.

— Bölünebilme Kuralları —

Teorem: $a \in \mathbb{Z}$ olsun.

1- a nın 2 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart, birler basamağındaki rakamın gösterdiği sayının 2 ile bölünebilmesidir.

2- a nın 5 ile bölünebilmesi için " " ", " " " " " 5 ile bölünebilmesidir.

3- a nın 3 ile bölünebilmesi için " " ", rakamları toplamının 3 ile bölünebilmesidir.

4- a'nın 9 ile bölünebilmesi için " " ", " " 9 ile bölünebilmesidir.

İspat// 1- $a = (x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)_{10} = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \dots + x_{n-1} 10^{n-1} + x_n 10^n = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$

$x_0 \equiv x_0 (\bmod 2)$

$10 \equiv 0 (\bmod 2) \quad x_1 \equiv x_1 (\bmod 2) \Rightarrow 10 x_1 \equiv 0 x_1 (\bmod 2)$

$\Rightarrow 10 x_1 \equiv 0 (\bmod 2)$

$\left.\begin{array}{l} 10^i \equiv 0^i (\bmod 2) \\ x_i \equiv x_i (\bmod 2) \end{array}\right\} \xrightarrow{i > 0} x_i 10^i \equiv \underbrace{0^i}_{0} \cdot x_i (\bmod 2)$

$a \equiv (x_0 + 0 + \dots + 0) \pmod 2 \Rightarrow a \equiv x_0 \pmod 2$

$2/a \Rightarrow 2/a \wedge 2/a - x_0 \Leftrightarrow 2/x_0 \Rightarrow (2/a \Leftrightarrow 2/x_0)$

2 − $a = x_0 + 10x_1 + 10^2 x_2 + \dots + 10^n x_n \quad x_0 \equiv x_0 \pmod 5$

$x_1 \equiv x_1 \pmod 5$, $10 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 10x_1 \equiv 0 \pmod 5$

$10^i x_i \equiv 0 \pmod 5$, $i > 0$

$a \equiv (x_0 + 0) \pmod 5 \Rightarrow a \equiv x_0 \pmod 5$

$(5/a \Leftrightarrow 5/x_0)$

3 − $a = x_0 + 10x_1 + 10^2 x_2 + \dots + 10^n x_n \quad x_0 = x_0 \pmod 3$

$x_1 \equiv x_1 \pmod 3$, $10 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 10x_1 \equiv x_1 \pmod 3$

$x_i \equiv x_i \pmod 3 \quad 10^i \equiv 1^i \pmod 3 \quad i > 0$

$\Rightarrow x_i 10^i \equiv x_i \pmod 3$

$\Rightarrow a \equiv (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n) \pmod 3$

$\Rightarrow a \equiv \sum_{i=0}^{n} x_i \pmod 3 \Rightarrow 3/a \Leftrightarrow 3/\sum_{i=0}^{n} x_i$

Teorem: $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a = x_n 10^n + x_{n-1} 10^{n-1} + \dots + x_1 10 + x_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$ olsun.

a) $a \equiv (10x_1 + x_0) \pmod 4 \rightarrow$ yani $(4/a \Leftrightarrow 4/10x_1 + x_0 = (x_1 x_0)_{10}$

b) $a \equiv (10x_1 + x_0) \pmod{25} \rightarrow (25/a \Leftrightarrow 25/10x_1 + x_0)$

c) $a \equiv (100x_2 + 10x_1 + x_0) \pmod 8 \rightarrow (8/a \Leftrightarrow 8/100x_2 + 10x_1 + x_0 = (x_2, x_1, x_0)_{10}$

İspat// a − $\left.\begin{array}{l} x_1 10 + x_0 \equiv x_1.10 + x_0 \pmod 4 \\ 10^2 = 100 \equiv 0 \pmod 4 \end{array}\right\} x_2 10^2 \equiv 0 \pmod 4$

$\left.\begin{array}{l} i \geq 2 \Rightarrow 10^i \equiv 0 \pmod 4 \\ x_i \equiv x_i \pmod 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_i 10^i \equiv 0 \pmod 4$

$a \equiv (x_1.10 + x_0 + 0 + \dots + 0) \pmod 4 \Rightarrow a \equiv x_1.10 + x_0 \pmod 4$

$\Rightarrow 4/a \Leftrightarrow 4/x_1 10 + x_0$

Teorem: $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$ olsun.

a − $a \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \pmod{11}$

b − $a \equiv \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (x_i + 3x_{i+1} + 2x_{i+2})}_{A} \pmod 7$

$A = (x_0 + 3x_1 + 2x_2) - (x_3 + 3x_4 + 2x_5) + (x_6 + 3x_7 + 2x_8) - \dots + (-1)^{n-2}[x_{n-2} + 3x_{n-1} + 2x_n]$

a- $11/a \iff 11 / \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i$

b- $7/a \iff 7/A$

ispat// a- $x_0 \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow x_0 \equiv (-1)^0 x_0 (\mathrm{mod}\, 11)$

$10 \equiv (10+1-1)(\mathrm{mod}\, 11)$

$10 \equiv 11-1 \,(\mathrm{mod}\, 11)$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 11) \\ x_1 \equiv x_1 \,(\mathrm{mod}\, 11) \end{array}\right\} 10x_1 \equiv -x_1 (\mathrm{mod}\, 11)$$

$\Rightarrow 10x_1 \equiv (-1) x_1 (\mathrm{mod}\, 11)$

$$10^2 \equiv (-1)^2 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow 10^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10^2 \equiv (-1)^2 (\mathrm{mod}\, 11) \\ \Rightarrow x_2 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, 11) \end{array}\right\} \Rightarrow 10^2 x_2 \equiv (-1)^2 x_2 (\mathrm{mod}\, 11)$$

$\Rightarrow 10^3 x_2 \equiv (-1)^3 x_3 (\mathrm{mod}\, 11)$

- - - - - - - -

$10^i x_i \equiv (-1)^i x_i (\mathrm{mod}\, 11)$ (Taraf tarafa toplanırsa)

$a \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \,(\mathrm{mod}\, 11)$

$11/a \iff 11 / \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i$

b- $x_0 \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7) \\ x_1 \equiv x_1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} \Rightarrow 10x_1 \equiv 3x_1 (\mathrm{mod}\, 7)$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^2 \equiv 3.10 (\mathrm{mod}\, 7) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \\ x_2 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} \Rightarrow 10^2 x_2 \equiv 2x_2 (\mathrm{mod}\, 7)$$

$\Rightarrow x_0 + 10x_1 + 10^2 x_2 \equiv x_0 + 3x_1 + 2x_2 \,(\mathrm{mod}\, 7)$

$\equiv (-1)^0 x_0 + 3x_1 + 2x_2 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^3 \equiv 10^2 10 \equiv 2.3 (\mathrm{mod}\, 7) \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7) \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} 10^3 \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, 7) \\ x_3 \equiv x_3 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} 10^3 x_3 \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, 7)$$

$10^4 \equiv 10^3 . 10 \equiv (-1)\, 3 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^4 \equiv (-1)^1 3 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 10^4 x_4 \equiv (-1)^1 3 x_4 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^5 \equiv 10^3 . 10^2 \equiv (-1)^1 2 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^5 x_5 \equiv (-1)^1 2x_5 (\mathrm{mod}\, 7)$

$a \equiv (-1)^0 x_0 + 3x_1 + 2x_2 + (-1)^1(x_3 + 3x_4 + 2x_5) + \dots)\ (\mathrm{mod}\ 7)$

Problemler :

1- Bölme işlemi yapmadan 432561 sayısının 99 a bölümündeki kalanı bulun.

2- 2373^{427} sayısının birler basamağındaki rakamı bulun.

3- $19^3 . 288^2$ sayısının 5 ile bölümündeki kalanı bulun.

4- $5^{73} + 9^{12}$ sayısının 7 ile bölümündeki kalanı bulun. (6 dır.)

5- $\forall n \in \mathbb{N}$ için $3^{2n} - 2^n$ sayısının 7 ile bölündüğünü gösterin.

6- $\forall n \in \mathbb{N}$ için $10^n + 3.4^{n+2} + 5$, 9 ile bölündüğünü gösterin.

7- $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 9) \Rightarrow 4^x + 6x - 1$ " " " .

8- $(1y8x2)_{10}$ sayısının 4 ve 9 ile bölünebilmesi için $x = ?$ $y = ?$

9- 6 tabanına göre yazılan bir sayının, 5 ve 7 ile bölünebilme kuralını bulun. Bundan yararlanarak $(21254)_6$ sayısının 5 ile bölümündeki kalanı bulun.

10- m tabanına göre yazılan bir sayının $m-1$ ile bölünebilme kuralını bulun.

Çözümler :

1- $(432561)_{10} = 1 + 6.10 + 5.10^2 + 2.10^3 + 3.10^4 + 4.10^5$

- $1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 99)$.
- $10.6 \equiv 10.6 (\mathrm{mod}\ 99)$

$10^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 99)$

- $5.10^2 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 99)$

$10^3 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 99) \Rightarrow$ • $2.10^3 \equiv 20 (\mathrm{mod}\ 99)$

$10^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 99)$

- $3.10^4 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 99)$

$10^5 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 99) \Rightarrow$ • $4.10^5 \equiv 40 (\mathrm{mod}\ 99)$

$432561 \equiv 1 + 60 + 5 + 20 + 3 + 40 (\mathrm{mod}\ 99)$

$\equiv 129 (\mathrm{mod}\ 99) \equiv 30 (\mathrm{mod}\ 99)$

$432561 \,|\, 99$

30 //

2- $2373 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 10)$

$(2373)^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv (-1) \mathrm{mod}\ 10$

$(2373)^4 \equiv (-1)^2 (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10)$

$((2373)^4)^{106} \, 2373^3 \equiv 1^{106}(3.9) \pmod{10}$

$(2373)^{427} \equiv 7 \pmod{10}$

3- $19 \equiv 4 \pmod 5$ $\quad 288 \equiv 3 \pmod 5$

$19^2 \equiv 1 \pmod 5$ $\quad 288^2 \equiv 4 \pmod 5$

$19.19^2 \equiv 4 \pmod 5$

$19^3 . 288^2 \equiv 1 \pmod 5$

5- $7 / 3^{2n} - 2^n$?

$3 \equiv 3 \pmod 7$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$

$(3^2)^n \equiv 2^n \pmod 7$

$3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7 \Rightarrow 3^{2n} - 2^n \equiv 2^n - 2^n \pmod 7 \Rightarrow 3^n - 2^n \equiv 0 \pmod 7$ //

6- $10^n + 3.4^{n+2} + 5$

$10^1 \equiv 1 \pmod 9$

$(10^1)^n \equiv 1^n \pmod 9 \Rightarrow 10^n \equiv 1 \pmod 9$

$3 \equiv 3 \pmod 9$ $\quad 4^n 4^2$ $\quad 5 \equiv 5 \pmod 9$

$4 \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow 4^2 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^3 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^4 \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow 4^5 \equiv 7 \pmod 9$

$\Rightarrow 4^6 \equiv 1 \pmod 9$

a) $1 + 3.4.7 + 5 \pmod 9 \equiv a \Rightarrow a \equiv 0 \pmod 9$

b) $a \equiv 1 + 3.7.4 + 5 \equiv 0 \pmod 9$

c) $a \equiv 1 + 3.1.7 + 5 \equiv 0 \pmod 9$

7- $x \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 9 / 4^x + 6x - 1$?

$x \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \; x = 7 + 9k$

$\Rightarrow 4^x + 6x - 1 = 4^{7+9k} + 6(7+9k) - 1$

$4^{7+9k} = 4^7 4^{9k} = 4^7 (4^9)^k$

$4 \equiv 4 \pmod 9$ $\qquad \Rightarrow (4^9)^k = 4^{9k} \equiv 1^k \pmod 9 \equiv 1 \pmod 9$

$4^2 \equiv 7 \pmod 9$

$4^3 \equiv 1 \pmod 9$

$4^9 \equiv 1^9 \pmod 9 \Rightarrow 4^9 \equiv 1 \pmod 9$

$$4^{7+9k} = 4^7.(4^9)^k \equiv 4 \pmod 9$$

$$6(7+9k) = 6.7 + 6.9k \equiv 6 \pmod 9$$

$$-1 \equiv -1 \pmod 9$$

$$4^x + 6x - 1 \equiv (4+6-1) \pmod 9$$

$$\equiv 0 \pmod 9$$

9- $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0)_6$

$$a = x_0 + x_1.6 + x_2.6^2 + \dots + x_{n-1} 6^{n-1} + x_n 6^n$$

$$x_0 \equiv x_0 \pmod 5$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv x_1 \pmod 5 \\ 6 \equiv 1 \pmod 5 \end{array}\right\} 6x_1 \equiv x_1 \pmod 5$$

$$6^2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_2 6^2 \equiv x_2 \pmod 5$$

$$\vdots$$

$x_n 6^n \equiv x_n \pmod 5$ Taraf tarafa toplarsak,

$$a \equiv (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n) \pmod 5$$

$a \equiv \sum_{i=0}^{n} x_i \pmod 5$ $5/a \Leftrightarrow 5/\sum_{i=0}^{n} x_i$ (a sayısının 5 ile bölünebilmesi için rakamları toplamı 5 ile bölünebilmelidir.)

m Modülüne Göre Denklemler :

$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$ax \equiv b \pmod m$ ifadesine m modülüne göre bir denklem denir. Bu ifade de, x yerine yazıldığında denklemi doğrulayan bir x_0 tamsayısına denklemin bir kökü (çözümü) denir. x_0 tamsayılarının kümesine denklemin doğruluk kümesi denir.

Teorem: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. OBEB$(m,a) = d$ olmak üzere $ax \equiv b \pmod m$ denkleminin (önermesinin) doğruluk kümesinin boş kümeden farklı olması için gerek ve yeter şart, "d/b" olmasıdır.

İspat// OBEB$(m,a) = d \Rightarrow (d/m \wedge d/a)$

$$\Rightarrow \exists a', m' \in \mathbb{Z},\ m = dm' \wedge a = d.a' \wedge (m', a') = 1$$

1° $\Rightarrow$: $D \neq \emptyset$ olsun. $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{Z},\ ax_0 \equiv b \pmod m$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ ax_0 = b + km$$

$$\Rightarrow da'x_0 = b + kdm'$$

$$\Rightarrow d(a'x_0 - km') = b \Rightarrow d/b$$

2° $\Leftarrow$: $a/b \wedge OBEB(m,a)=d \Rightarrow [\exists u,v\in \mathbb{Z},\ d=mu+av\ \exists b'\in\mathbb{Z},\ b=db']$

$\Rightarrow b'd = mub' + ab'v$

$\Rightarrow b = m(ub') + a(b'v)$

$\Rightarrow a(b'v) - b = (-ub')m$

$\Rightarrow a(b'v) \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow x_0 = b'v \Rightarrow D \neq \emptyset$

Sonuç // $a,b\in\mathbb{Z}$ ve $m\in\mathbb{Z}^+$ olsun. $OBEB(m,a)=d$ olmak üzere $d\nmid b$ ise

$ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ $\quad D=\emptyset$

Örnek // $5x \equiv 4(\mathrm{mod}\ 12)$ $\quad \mathbb{Z}$'de çözümünü araştıralım.

$a=5 \quad b=4 \quad m=12$

$OBEB(5,12)=1 \Rightarrow 1/4 \quad D\neq\emptyset$ olur //

$\mathbb{Z}/_{12} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\bar{11}\}$ bulunabilir.

$5(5x) = 5.4(\mathrm{mod}\ 12) \Rightarrow 25x \equiv 20(\mathrm{mod}\ 12)$

$\Rightarrow \begin{matrix} 25x \equiv x\ (\mathrm{mod}\ 12) \\ 20 \equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 12)\end{matrix} \Rightarrow x \equiv 8(\mathrm{mod}\ 12) \quad x=\bar{8} \quad D=\bar{8}$

Örnek // $8x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 12)$ $\quad D=?$

$a=8 \quad b=2 \quad m=12$

$OBEB(8,12)=4 \Rightarrow 4\nmid 2 \quad D=\emptyset$ olur // ($\mathbb{Z}$'de çözümü yoktur.)

Örnek 1// $36x \equiv 8(\mathrm{mod}\ 102)$ denkleminin $\mathbb{Z}/_{102}$ deki çözümü nedir?

2// $2x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$ " $\mathbb{Z}/_5$ " " " ?

3// $5x \equiv 7(\mathrm{mod}\ 12)$ ve $12x \equiv 9(\mathrm{mod}\ 15)$, $\mathbb{Z}$'deki çözümü nedir?

Çözüm 1// $36x \equiv 8(\mathrm{mod}\ 102)$

$OBEB(36,102)=6 \quad 6\nmid 8 \quad D=\emptyset$

2// $OBEB(2,5)=1 \quad 1/3 \quad D\neq\emptyset$

$\mathbb{Z}/_5 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

$\bar{2}\bar{x} = \bar{3} \Rightarrow \bar{2}\odot\bar{x} \overset{?}{=} \bar{3} \quad x=\bar{4} \quad D=\bar{4}$

3// $12x \equiv 9(\mathrm{mod}\ 15)$

$OBEB(12,15)=3 \quad 3/9 \quad D\neq\emptyset \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ 12x = 9+15k$

$\Rightarrow 3.4x = 3.3 + 3.5k$

$\Rightarrow 4x = 3+5k$

$\Rightarrow 4x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$

$\Rightarrow 4.4x \equiv 3.4 \pmod 5$

$\Rightarrow 16x \equiv 2 \pmod 5 \quad \Rightarrow x = 2 \pmod 5 \qquad D = \overline{2}$

– RASYONEL SAYILAR –

Tanım: $K = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z} \land b \neq 0\}$ kümesinin herbir (a,b) elemanına bir kesir, a : (a,b) kesrinin payı, b : (a,b) kesrinin paydası denir.

Tanım: $(a,b),(c,d) \in K$ için $ad = bc$ ise (a,b) kesri (ikilisi), (c,d) kesrine denktir denir ve $(a,b) \sim (c,d)$ yazılır.

Örnek// $(1,2)$ ve $(3,6)$ kesirleri $1.6 = 6 = 2.3$ denktir.

$(1,2) \sim (3,6)$

Teorem: K kümesinde tanımlanan $(a,b),(c,d) \in K$ için,

$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat// 1° $a,b \in \mathbb{Z}$, $ab = ba \Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$ (yansıma öz.), $(a,b) \in K$

2° $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc$

$\Rightarrow bc = ad$

$\Rightarrow cb = da$

$\Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$ (simetri öz.)

3° $(a,b),(c,d),(e,f) \in K$,

$[(a,b) \sim (c,d) \land (c,d) \sim (e,f)] \Rightarrow [ad = bc \land cf = de]$

$\Rightarrow (ad)(cf) = (bc)(de)$

$\Rightarrow (af)(cd) = (be)(cd)$

$\Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$ (geçişme öz.)

$\forall (a,b) \in K$ nın bir denklik sınıfı vardır.

$\forall (a,b) \in K$ için $\overline{(a,b)} = \{(x,y) : (x,y) \in K \land (x,y) \sim (a,b)\}$

Örnek// $(0,1),(1,2),(3,2)$ denklik sınıflarını bulalım.

- $\overline{(0,1)} = \{(x,y) : (x,y) \in K \land (x,y) \sim (0,1)\}$

  $(x,y) \sim (0,1) \Rightarrow x.1 = y.0 \Rightarrow x = 0$

$\overline{(0,1)} = \{(0,x) : x \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$

$\overline{(0,1)} = \{\ldots (0,-2),(0,-1),(0,1),(0,2) \ldots\}$

- $(\overline{1,2}) = \{(x,y) : (x,y) \in K \wedge (x,y) \sim (1,2)\}$

$(x,y) \sim (1,2) \Rightarrow x.2 = y.1 \Rightarrow y = 2x$

$= \{(x,2x) : x \in Z - \{0\}\}$

$= \{\ldots(-3,-6),(-2,-4),(-1,-2),(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\}$

- $(\overline{3,2}) = \{(x,y) : (x,y) \in K \wedge (x,y) \sim (3,2)\}$

$(x,y) \sim (3,2) \Rightarrow x.2 = y.3 \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow 2/y \wedge 3/x$

$= \{(3x,2x) : x \in Z - \{0\}\}$

$= \{\ldots,(-6,-4),(-3,-2)(3,2),(6,4),\ldots\}$

Tanım: K'da tanımlanan denk olma denklik bağıntısının K dan ayırdığı denklik sınıfların herbirine bir rasyonel sayı, bu sayıların kümesine de rasyonel sayılar kümesi denir. Q ile gösterilir.

Örnek// $(\overline{2,3}), (\overline{3,2}), (\overline{11,5})$ rasyonel sayılardır.

Sonuç (eşitlik): $(\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in Q$ olsun.

$$(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Teorem: $(\overline{a,b}) \in Q$ olsun. $x \in Z - \{0\}$ olmak üzere,

$$(\overline{a,b}) = (\overline{ax,bx})$$

İspat// $(\overline{a,b}) = (\overline{ax,bx}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (ax,bx) \Leftrightarrow a(bx) \stackrel{?}{=} b(ax)$

$\Leftrightarrow abx = bax$

$\Leftrightarrow (ax, bx)$

Tanım: (Toplama işlemi):

$+ : Q \times Q \longrightarrow Q$

$[(\overline{a,b}),(\overline{c,d})] \longrightarrow (\overline{a,b}) + (\overline{c,d}) = (\overline{ad+bc,bd})$

Tanım: (Çarpma işlemi):

$\cdot : Q \times Q \longrightarrow Q$

$[(\overline{a,b}),(\overline{c,d}) \longrightarrow (\overline{a,b}) \cdot (\overline{c,d}) = (\overline{ac,bd})$

Teorem: $(Q,+,\cdot)$ matematik yapısı bir cisimdir.

1° $(Q,+)$ Abel grubudur.

2° $(Q-\{0\},\cdot)$ " " 3° $\cdot$ nın $+$ üzerine dağılma özelliği vardır.

İspat // I - $(Q,+)$ abel grubudur.

1- Q, + işlemine göre kapalıdır.

2- $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in Q$ için

(+) işleminin değ. öz.

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)} = \overline{(da+cb, db)} = \overline{(cb+da, db)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}$$

3- Birleşme özelliği vardır.

4- Birim eleman öz. $\forall \overline{(a,b)} \in Q \wedge \exists \overline{(x,y)} \in Q$ için

$$\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(x,y)} + \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}, \quad e = \overline{(x,y)} = ?$$

$\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(a,b)} \Rightarrow \overline{(ay+bx, by)} = \overline{(a,b)}$ ((+) işl. tanımı.)

$\Rightarrow (ay+bx, by) \sim (a,b)$ (eşitlik tanımı)

$\Rightarrow (ay+bx)b = (by)a$ (eşitlik ")

$\Rightarrow \cancel{ayb} + b^2x = \cancel{bya}$ (+ işl. sadel. öz)

$\Rightarrow b^2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow e = \overline{(0,y)} \in Q$

5- Ters eleman öz. $\forall \overline{(a,b)} \in Q$ için $\overline{(a,b)} + \overline{(-a,b)} = \overline{(ab-ba, bb)} = \overline{(0,y)} = e$

$$\overline{(-a,b)} + \overline{(a,b)} = \overline{(0,y)}$$

$$-\overline{(a,b)} = \overline{(-a,b)} \in Q$$

II - $(Q-\{0\}, \cdot)$ yapısı bir abel grubudur. $\left[0 = \overline{(0,y)}\right]$

1- Kapalılık öz. 2- Birleşme öz.

3- Değişme öz. $\forall \overline{(a,b)} \wedge \overline{(c,d)} \in Q$ için

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac, bd)} = \overline{(ca, db)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}$$

4- Birim eleman öz. $\forall \overline{(a,b)} \in Q-\{0\}$ için $\overline{(a,b)}\,\overline{(x,y)} = \overline{(x,y)}\,\overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$, $e = \overline{(x,y)}$

$\Rightarrow \overline{(a,b)}\,\overline{(x,y)} = \overline{(a,b)} \Rightarrow \overline{(ax, by)} = \overline{(a,b)}$

$\Rightarrow \overline{(ax, by)} \sim \overline{(a,b)}$

$\Rightarrow (ax)b = (by)a$

$\Rightarrow (ab)x = (ab)y \Rightarrow x = y \Rightarrow e = \overline{(x,x)} \wedge x \neq 0$

5° Ters eleman öz. $\forall \overline{(a,b)} \in Q$ için

$$\overline{(a,b)}\,\overline{(b,a)} = \overline{(ab, ba)} = \overline{(x,x)}$$

$$\overline{(a,b)}^{-1} = \overline{(b,a)}$$

İspat // I- $(Q,+)$ abel grubudur.

1- Q, $+$ işlemine göre kapalıdır.

2- $(\overline{a,b}),(\overline{c,d}) \in Q$ için

(+) işleminin değ. öz.

$$(\overline{a,b})+(\overline{c,d}) = (\overline{ad+bc,bd}) = (\overline{da+cb,db}) = (\overline{cb+da,db}) = (\overline{c,d})+(\overline{a,b})$$

3- Birleşme özelliği vardır.

4- Birim eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q \wedge \exists (\overline{x,y}) \in Q$ için

$(\overline{a,b})+(\overline{x,y}) = (\overline{x,y})+(\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$, $e=(\overline{x,y}) = ?$

$(\overline{a,b})+(\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{ay+bx,by}) = (\overline{a,b})$ ((+) işl. tanımı.)

$\Rightarrow (ay+bx,by) \sim (a,b)$ (eşitlik tanımı)

$\Rightarrow (ay+bx)b = (by)a$ (eşitlik ")

$\Rightarrow \cancel{ayb}+b^2x = \cancel{bya}$ (+ işl. sadel. öz)

$\Rightarrow b^2x = 0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow e=(\overline{0,y}) \in Q$

5- Ters eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q$ için $(\overline{a,b})+(\overline{-a,b}) = (\overline{ab-ba,bb}) = (\overline{0,y}) = e$

$(\overline{-a,b})+(\overline{a,b}) = (\overline{0,y})$

$-(\overline{a,b}) = (\overline{-a,b}) \in Q$

II- $(Q-\{0\},\cdot)$ yapısı bir abel grubudur. $[0=(\overline{0,y})]$

1- Kapalılık öz. 2- Birleşme öz.

3- Değişme öz. $\forall (\overline{a,b}) \wedge (\overline{c,d}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})\cdot(\overline{c,d}) = (\overline{ac,bd}) = (\overline{ca,db}) = (\overline{c,d})\cdot(\overline{a,b})$$

4- Birim eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q-\{0\}$ için $(\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{x,y})(\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$, $e=(\overline{x,y})$

$\Rightarrow (\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{ax,by}) = (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (\overline{ax,by}) \sim (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (ax)b = (by)a$

$\Rightarrow (ab)x = (ab)y \Rightarrow x=y \Rightarrow e=(\overline{x,x}) \wedge x \neq 0$

5° Ters eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q$ için

$(\overline{a,b})(\overline{b,a}) = (\overline{ab,ba}) = (\overline{x,x})$

$(\overline{a,b})^{-1} = (\overline{b,a})$

III - Dağılma öz. ($\cdot$ nın + üzerine) (Ödev)

$\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}), (\overline{e,f}) \in Q$ için,

$(\overline{a,b}) \cdot [(\overline{c,d}) + (\overline{e,f})] \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{c,d}) + (\overline{a,b})(\overline{e,f})$

$[(\overline{a,b}) + (\overline{c,d})](\overline{e,f}) \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{e,f}) + (\overline{c,d})(\overline{e,f})$

Sonuç// $(Q, +, \cdot)$ yapısı bir cisimdir. Bu cisme rasyonel sayılar cismi denir.

Örnek// $(\overline{3,2})$ rasyonel sayısının 2 ve −2 katını bulalım.

$2(\overline{3,2}) = (\overline{3,2}) + (\overline{3,2}) = (\overline{3.2+2.3\, ,\, 2.2}) = (\overline{12,4}) = (\overline{3.4, 1.4}) = (\overline{3,1})$

$-2(\overline{3,2}) = 2[-(\overline{3,2})] = [-(\overline{3,2})] + [-(\overline{3,2})] = (\overline{-3,2}) + (\overline{-3,2})$

$= (\overline{(-3)2 + 2(-3), 2.2}) = (\overline{-12,4}) = (\overline{-3,1})$

Örnek// $(\overline{3,2})$ rasyonel sayısının 2. ve −2. kuvvetlerini bulalım.

$(\overline{3,2})^2 = (\overline{3,2})(\overline{3,2}) = (\overline{3.3, 2.2}) = (\overline{9,4})$

$(\overline{3,2})^{-2} = [(\overline{3,2})^{-1}]^2 = (\overline{2,3})^2 = (\overline{2,3})(\overline{2,3}) = (\overline{4,9})$

Teorem: $T = \{(\overline{a,1}) : a \in Z\}$ olmak üzere T ve Z izomorftur. $T \subset Q$

İspat// $f : T \longrightarrow Z$

$(\overline{a,1}) \longrightarrow f[(\overline{a,1})] = a$

fonksiyonu tanımlanıyor.

1° $\forall (\overline{a,1}), (\overline{b,1}) \in T$ için,

$f[(\overline{a,1}) + (\overline{b,1})] = f[(\overline{a.1 + 1.b = 1.1})] = f[(\overline{a+b,1})] = a+b = f[(\overline{a,1})] + f[(\overline{b,1})]$

2° (Ödev) $f[(\overline{a,1}).(\overline{b,1})] = f(\overline{a,1}).f(\overline{b,1})$

3° $\forall (\overline{a,1}), (\overline{c,1}) \in T$ için $f[(\overline{a,1})] = f[(\overline{b,1})] \Rightarrow a = b \Rightarrow (\overline{a,1}) = (\overline{b,1})$ f, 1:1 dir.

4° $\forall a \in Z$, $f(\overline{a,1}) = a$ $(\overline{a,1}) \in T$ f örtendir.

$T \sim Z$ 'dir (T izomorf Z)

$(\overline{a,1}) = a$

$(\overline{0,1}) = 0 \quad (\overline{1,1}) = 1$

Tanım: (Çıkarma işlemi):

$(\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in Q$ için,

$(\overline{a,b}) + (\overline{-c,d})$ rasyonel sayısına $(\overline{a,b})$ ve $(\overline{c,d})$ rasyonel sayılarının farkı denir.

$(\overline{a,b}) + (\overline{-c,d}) = (\overline{a,b}) + [-(\overline{c,d})] = (\overline{ad-bc, bd})$

Tanım: (Bölme İşlemi):

$(\overline{a,b}) \in Q$ ve $(\overline{c,d}) \in Q-\{0\}$ için

$(\overline{a,b})(\overline{c,d})^{-1}$ rasyonel sayısına $(\overline{a,b})$ nin $(\overline{c,d})$ ile bölümü denir.

$(\overline{a,b})(\overline{c,d})^{-1} = (\overline{a,b})(\overline{d,c}) = (\overline{ad,bc})$

Sembolik Olarak:

Fark: $(\overline{a,b}) - (\overline{c,d}) = (\overline{a,b}) + (\overline{-c,d}) = (\overline{ad-bc,bd})$

Bölme: $(\overline{a,b}) : (\overline{c,d}) = (\overline{a,b}).(\overline{d,c}) = (\overline{ad,bc})$

(ödev) 1° $(\overline{-2,3}) - (\overline{5,4}) = ?$, $(\overline{-2,3}) : (\overline{5,4}) = ?$

- $(\overline{-2,3}) - (\overline{5,4}) = (\overline{-2,3}) + (\overline{-5,4}) = (\overline{(-2)4.+3.(-5),3.4}) = (\overline{-23,12})$
- $(\overline{-2,3}) : (\overline{5,4}) = (\overline{-2,3}).(\overline{4,5}) = (\overline{(-2)4,3.5}) = (\overline{-8,15})$

Tanım: $a \in Z$ olduğuna göre $(\overline{a,1})$ rasyonel sayısına tam rasyonel sayı denir.

Ve $(\overline{a,1}) = a$ diye gösterilir.

Buna göre $Z \subset Q$ olur.

$(\overline{a,b})$ rasyonel sayısını da $\frac{a}{b}$ ile gösteririz. $(\overline{a,b}) = \frac{a}{b}$

Teorem: $a,b \in Z$ ve b/a ise $a:b = \frac{a}{b}$

İspat// $a:b = (\overline{a,1}):(\overline{b,1}) = (\overline{a,1}).(\overline{1,b}) = (\overline{a,b}) = \frac{a}{b}$

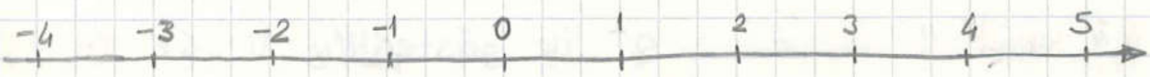
Tanım: $x,y \in Q$ ve $y \neq 0$ ise $x:y = \frac{x}{y}$ olarak tanımlanır.

Teorem: $\forall x,y,z,w \in Q$ için

a- $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw+yz}{yw}$ b- $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$ c- $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{xw-yz}{yw}$

d- $\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$

- Rasyonel Sayıların Bir Doğru Üzerinde Gösterimi -



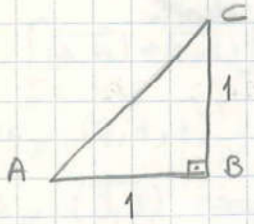
$\frac{p}{q}$. $p>0$, $q>0$ $p,q \in Z^+$

Bir birimi q parçaya bölelim. 1br Her parça uzunluğu $\frac{1}{q}$ olur.

$p\frac{1}{q} = \frac{p}{q}$

Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılara karşılık gelmeyen nokta var mıdır?

İspat// Aksine ispat için bir örnek verelim.



$\overline{AC}^2 = 2$ $\overline{AC} = x \Rightarrow x^2 = 2$

Soru: $x^2 = 2$ olan x sayısı rasyonel midir?

Kabul edelim ki x rasyonel sayı olsun. $\Rightarrow x = \frac{p}{q} \wedge \exists p, q \in \mathbb{Z} \wedge (p,q) = 1$

$\frac{p}{q} = (\overline{p,q}) \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2/p^2 \Rightarrow 2/p$

$\Rightarrow \exists p_1 \in \mathbb{Z},\ p = 2p_1$

$\Rightarrow (2p_1)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p_1^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p_1^2 = q^2 \Rightarrow 2/q^2 \Rightarrow 2/q$

$\Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z},\ q = 2q_1$

$\Rightarrow \text{OBEB}(p,q) = \text{OBEB}(2p_1, 2q_1) = 2\,\text{OBEB}(p_1, q_1) \neq 1 \Rightarrow (p,q) \neq 1$

Sonuç// : x rasyonel değildir.

Sayı doğrusu üzerinde rasyonel olmayan noktalar da vardır.

− Rasyonel Sayılar Kümesinde Sıralama −

Teorem: $x \in \mathbb{Q}$ ve $x = (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$ olsun. $ab > 0$ ise $cd > 0$ dır.

İspat// $(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Rightarrow (a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow (ad)(ad) = (bc)(ad)$

$\Rightarrow (ad)^2 = (bc)(ad) \wedge ab > 0 \Rightarrow (ad)^2 = (ab)(cd) \wedge ab > 0 \Rightarrow cd > 0$

Tanım: $x = (\overline{a,b}) \in \mathbb{Q}$ olsun.

1^0 $ab > 0$ ise x sayısına pozitif rasyonel sayı denir. Ve $x > 0$ yazılır.

2^0 $ab < 0$ ise " " negatif " " ". Ve $x < 0$ yazılır.

Pozitif rasyonel sayıların kümesi, $\mathbb{Q}^+$,

Negatif " " " , $\mathbb{Q}^-$ ile gösterilir.

Tanım: $x \in \mathbb{Q}$ olsun.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{eşitliğiyle belirir.}$$

$|x|$ sayısına, x rasyonel sayısının mutlak değeri denir.

Tanım : $a, b \in Q$ olsun. $a+x=b$ olacak şekilde bir x pozitif rasyonel sayısı varsa, "a sayısı b sayısından küçüktür" denir ve $a<b$ şeklinde yazılır.

$b=a+x$ olacak şekilde bir x pozitif rasyonel sayısı varsa, "b rasyonel sayısı, a rasyonel sayısından büyüktür" denir ve $b>a$ şeklinde yazılır.

Eğer $a<b$ veya $a=b$ önermesi doğru ise bu durum kısaca, $a \leqslant b$ şeklinde (yazılır.) sembolik olarak gösterilir.

Eğer $a>b$ veya $a=b$ önermesi de doğru ise $a \geqslant b$ şeklindedir.

Tanım : $a, b \in Q$ için $a<b$, $a>b$, $a \leqslant b$, $b \geqslant a$ önermelerine, rasyonel sayılar kümesinde birer eşitsizlik denir.

Teorem : $a, b \in Q$ olsun. $a \leqslant b \Leftrightarrow b-a \in Q^+$

İspat // 1^0 $\Rightarrow$: $a \leqslant b \Rightarrow \exists x \in Q^+,\ a+x=b \vee a=b$

$$\Rightarrow x=b-a \in Q^+$$

2^0 $\Leftarrow$: $b-a \in Q^+ \Rightarrow x=b-a \in Q^+ \Rightarrow a+x=b,\ x \in Q^+ \Rightarrow a \leqslant b$

Teorem : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc \quad (a, b \in Z \wedge c, d \in Z^+)$

İspat // $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{bd} > 0 \Leftrightarrow ad-bc>0$

$$\Leftrightarrow ad > bc$$

Teorem : $\forall x, y, z, w \in Q$ için

a) $x \geqslant x$

b) $(x \geqslant y \wedge y \geqslant z) \Rightarrow x \geqslant z$

$(x>y \wedge y>z) \Rightarrow x>z$

c) $x \geqslant y \vee y \geqslant x$

d) $(x \geqslant y \wedge y \geqslant x) \Rightarrow x=y$

e) $x>y$, $y>x$, $x=y$ önermelerinden ancak birisi doğrudur.

f) $x+1>x$

g) $x \geqslant y \Leftrightarrow x+z \geqslant y+z$, $x>y \Leftrightarrow x+z>y+z$

h) $(x \geqslant y \wedge z \geqslant w) \Rightarrow x+z \geqslant y+w$, $(x \geqslant y \wedge z>w) \Rightarrow x+z>y+w$

i- $\forall z, \in \mathbb{Q}^+ \ (x \geq y \iff xz \geq yz)$

k- $\forall z, \in \mathbb{Q}^- \ (x \geq y \iff xz \leq yz)$

İspat// $(x>y \wedge y>z) \overset{?}{\Rightarrow} x>z$

$$(x>y \wedge y>z) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Q}^+,\ x=y+k) \wedge (\exists r \in \mathbb{Q}^+,\ y=z+r)$$

$$\Rightarrow x=y+k=(z+r)+k$$

$$\Rightarrow x=z+(r+k)\ ,\ r+k \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x>z$$

Tanım: $x,y,z \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer "$x<y<z$ veya $z<y<x$" önermesi doğru ise "y rasyonel sayısı x ve z rasyonel sayıları arasındadır" denir.

Teorem: Farklı iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır.

İspat// $\forall x,y \in \mathbb{Q}$ ve $x \neq y$ olsun. $x<y$ olduğunu farzedelim.

$\Rightarrow z=\frac{x+y}{2}$ alalım. $\Rightarrow z \in \mathbb{Q}$

$x<y \Rightarrow x+x<x+y$

$\Rightarrow 2x<x+y$

$\Rightarrow x<\frac{x+y}{2} \Rightarrow x<z$

$x<y \Rightarrow x+y<y+y$

$\Rightarrow x+y<2y$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2}<y \Rightarrow z<y$

$x<z \wedge z<y \Rightarrow x<z<y$

Sonuç: Farklı iki rasyonel sayı arasında, birbirinden farklı, sonsuz tane rasyonel sayı vardır.

Tanım: $x \in \mathbb{Q}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

1° $x \neq 0$ ise $x^0=1$

2° $x \neq 0$ ise $x^1=x$

3° $x \neq 0$ ise $x^{n+1}=x^n.x$

4° $x \neq 0$ ise $x^{-n}=(x^{-1})^n$

Teorem: $x,y \in \mathbb{Q}$ ve $m,n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

1° $(xy)^n=x^ny^n$

2° $y \neq 0$ ise $\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$

3° $x^n.x^m=x^{n+m}$

4° $n \geq m$ ve $x \neq 0$ ise $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$

5° $(x^n)^m=x^{nm}$

İspat// $(xy)^n = (xy)(xy)\ldots(xy) = (\underbrace{x.x\ldots x}_{n \text{ tane}})(\underbrace{y.y\ldots y}_{n \text{ tane}}) = x^n . y^n$

Teorem: $x, y \in \mathbb{Q}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$x^n = y^n \Rightarrow [(x=y) \vee (x=-y)]$$

İspat// $x = \frac{a}{b} \wedge y = \frac{c}{d}$ olsun. $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$$
$$\Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$$
$$\Rightarrow a^n d^n = c^n b^n$$
$$\Rightarrow (ad)^n = (cb)^n$$
$$\Rightarrow |(ad)^n| = |(cb)^n|$$
$$\Rightarrow |ad|^n = |cb|^n$$
$$\Rightarrow |ad| = |bc|$$
$$\Rightarrow (ad = bc) \vee (ad = -bc) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \vee \left(\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}\right)$$
$$\Rightarrow (x = y \vee x = -y)$$

Teorem: $a \in \mathbb{Q}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. n çift ise $x^n = a$ olacak şekilde bir x rasyonel sayısı yoktur.

$x \in \mathbb{Q}$ ve n çift $\Rightarrow x^n \geq 0$, $a < 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{Q}, x^n \neq a$ önermesi doğrudur. $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q}, x^n = a$ önermesi yanlıştır.

Tanım: $a \in \mathbb{Q}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) n tek sayı olmak üzere $x^n = a$ denklemini sağlayan x rasyonel sayısı varsa bu sayıya a'nın n. kuvvetten kökü denir ve

$x = \sqrt[n]{a}$ veya $x = a^{1/n}$ olarak yazılır.

b) n çift sayı olmak üzere ve $a \geq 0$ olmak üzere $x^n = a$ denklemini sağlayan pozitif bir x rasyonel sayısı varsa bu sayıya a'nın n. kuvvetten pozitif kökü denir. Ve $x = \sqrt[n]{a}$ veya $x = a^{1/n}$ yazılır.

c) n çift sayı olmak üzere ve $a \geq 0$ için, $x^n = a$ denklemini sağlayan negatif bir x rasyonel sayısı varsa bu sayıya a'nın n. kuvvetten negatif kökü denir.

Örnek 1// $n=3$ ise $\sqrt[3]{a}$ a'nın küp kökü

2// $n=2$ ise $\sqrt[2]{a}$ a'nın kare kökü

3// $(-2)^3=-8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8}=-2$

4// $3^2=9 \Rightarrow \sqrt{9}=3$ pozitif karekök

5// $(-3)^2=9 \Rightarrow \sqrt{9}=(-3)$ negatif "

Teorem: $a\in Q$ ve $n\in Z^+$ olmak üzere $x^n=a$ denkleminin Q'daki doğruluk kümesi D olsun.

a) n tek sayı ve $D\neq\emptyset$ ise $D=\{\sqrt[n]{a}\}$

b) n çift sayı ve $D\neq\emptyset$ ise $D=\{\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}\}$

Tanım: $m,n\in Z^+$ ve $b\in Q$ olsun.

$$b^{m/n}=(b^{1/n})^m=\sqrt[n]{b^m}$$

Örnek// $16^{3/2}=(16^{1/2})^3=(\sqrt{16})^3=4^3=64$

Teorem: $\forall x,y,z\in Q$ için

a) $x^z.y^z=(xy)^z$ b) $\frac{x^z}{y^z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z$ c) $x^y.x^z=x^{y+z}$ d) $\frac{x^y}{x^z}=x^{y-z}$ $y>0$

e) $(x^y)^z=x^{yz}$

Rasyonel Sayıların Ondalık Gösterimi

$a,b\in Z^+$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısı verilsin.

1° $\Rightarrow a=bq+r \wedge 0\leq r<b$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{bq+r}{b}=q+\frac{r}{b}$ $0\leq r<b$

2° $\frac{r}{b}$ ifadesinde $10r=bq_1+r_1 \wedge 0\leq r<b$

$\Rightarrow \frac{r}{b}=\frac{10r}{10b}=\frac{bq_1+r_1}{10b} \Rightarrow \frac{r}{b}=\frac{q_1}{10}+\frac{r_1}{10b}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{q_1}{10}+\frac{r_1}{10b}$

3° $10r_1=bq_2+r_2 \wedge 0\leq r_2<b$

$\frac{r_1}{10b}=\frac{10r_1}{100b}=\frac{bq_2+r_2}{100b} \Rightarrow \frac{r_1}{10b}=\frac{q_2}{100}+\frac{r_2}{100b}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{q_1}{10b}+\frac{q_2}{10^2}+\frac{r_2}{100b}$

$4^o \quad \frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{r_3}{10^3 b}$

$\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots + \frac{q_i}{10^i} + \dots$

Tanım: $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının bu şekilde yazımına ondalık gösterimi (açılımı) denir.

Ve sembolik olarak $\frac{a}{b} = q.q_1 q_2 \dots q_i \dots$ şeklinde gösterilir.

Örnek// $\frac{27}{8}$ sayısının ondalık gösterimini yazalım.

$1^o \quad 27 = 8.3 + 3 \Rightarrow \frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{8}$

$2^o \quad 30 = 10.3 = 8.3 + 6 \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{8.3+6}{8.10} = \frac{3}{10} + \frac{6}{10.8}$

$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10.8}$

$3^o \quad 60 = 8.7 + 4 \Rightarrow \frac{6}{10.8} = \frac{7}{100} + \frac{4}{10^2.8} \qquad \frac{a}{b} = \frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^2.8}$

$4^o \quad 40 = 8.5 + 0 \Rightarrow \frac{4}{10^2.8} = \frac{8.5+0}{10^3.8} = \frac{5}{10^3} + \frac{0}{10^3.8}$

$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5}$

$= 3,375000 \dots = 3,375$

Tanım: Herhangi bir rasyonel sayının ondalık gösterimi $(q, q_1 . q_2 . \dots . q_k \dots$
$p_1 . p_2 . \dots . p_n . \ p_1 . p_2 . \dots . p_n . \ p_1 . p_2 . \dots . p_n \dots)$ şeklinde ise bu gösterime
devirli ondalık gösterim denir.

$(q_1, q_2 . q_3 \dots q_k)_{10}$ sayısına ondalık gösterimin devretmeyen kısmı,

$(p_1 p_2 p_3 \dots p_n)_{10}$ " " " devreden kısmı denir ve

sembolik olarak $q, q_1 q_2 \dots q_k \overline{p_1 p_2 \dots p_n}$ şeklinde gösterilir.

Örnek// $0,8\overline{3} = 0,83333 \dots$

Teorem: Her rasyonel sayının ondalık gösterimi devirlidir. Her bir devirli ondalık gösterim bir rasyonel sayıya eşittir.

İspat// $1^o \ \frac{a}{b} \in Q, \ a,b \in Z^+ \Rightarrow \frac{a}{b} = r, r_1 r_2 \dots r_n \dots$ olsun.

$r, r_1, r_2, \dots r_n$ sayıları a'nın b ye bölümündeki kalanlardır.

$\Rightarrow$ bu kalanlardan en çok b tanesi farklıdır.

$\frac{a}{b} = r, \underbrace{r_1 r_2 \dots r_i}_{\text{farklı ise}} r_{i+1} \dots r_n$ sonuç: $\frac{a}{b}$ nin ondalık gösterimi devirlidir.

$2^\circ \Leftarrow$: $x = q, q_1 q_2 \dots q_k \overline{p_1 p_2 \dots p_n}$ olsun $\Rightarrow x \in Q$?

$10^{k+n} \cdot x = q q_1 q_2 \dots q_k \, p_1 p_2 \dots p_n, \, p_1 p_2 \dots p_n$

$10^{k+n} \cdot x = 10^{k+n} \cdot q + (q_1 q_2 \dots q_k \, p_1 p_2 \dots p_n)_{10} + 0,\overline{p_1 p_2 \dots p_n}$

$10^k \cdot x = q q_1 q_2 \dots q_k, \overline{p_1 p_2 \dots p_n}$

$10^k x = 10^k q + (q_1 q_2 \dots q_k)_{10} + 0,\overline{p_1 p_2 \dots p_n}$

$\Rightarrow (10^{k+n} - 10^k) x = (10^{k+n} - 10^k) q + (q_1 q_2 \dots q_k \, p_1 p_2 \dots p_n)_{10} - (q_1 q_2 \dots q_k)_{10}$

$$\Rightarrow x = \frac{(10^{k+n} - 10^k) q + (q_1 q_2 \dots q_k p_1 p_2 \dots p_n)_{10} - (q_1 q_2 \dots q_k)_{10}}{10^{k+n} - 10^k} \in Q$$

Örnek // $x = 2,13\overline{142}$ ondalık gösterimini rasyonel olarak yazalım.

$10^5 x = 213142,\overline{142}$

$10^5 x = 10^5 \cdot 2 + 13142 + 0,\overline{142}$

$10^2 x = 213,\overline{142} = 10^2 \cdot 2 + 13 + 0,\overline{142}$

$10^5 x - 10^2 x = (10^5 - 10^2) 2 + 13142 - 13$

$$\Rightarrow x = \frac{(10^5 - 10^2) 2 + 13142 - 13}{10^5 - 10^2} = \frac{2 \cdot 99900 + 13129}{99900} = 2 + \frac{13129}{99900} \;//$$

Problemler:

1- $(74,185)$ kesrine denk olan öyle bir (x,y) kesri bulun ki, $x+y = 21$ olsun.

2- $((1110)_2, (11)_2)$ kesri $((101010)_2, (1001)_2)$ kesrine denk midir?

3- $\overline{(2,1)} + x = \overline{(0,3)}$, $\overline{(2,5)} \cdot x = \overline{(3,1)}$ açık önermelerinin Q daki doğruluk kümeleri ?

4- $$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$ rasyonel sayısını $\frac{p}{q}$ şeklinde yazın.

5- $3 \cdot \overline{(2,5)} \, \overline{(2,-5)}$, $\overline{(1,-2)}^3$ ifadelerini bulun.

6- $\frac{3}{8}$, $-\frac{11}{9}$, $-\frac{73}{7}$ sayılarının ondalık gösterimini bulun.

7- $2,4$; $2,125$; $1,23\overline{157}$; $3,26518005180518005 \dots$ sayılarını p/q şeklinde yazın.

8- a/ $x^7 = 0$ b/ $x^{-3} = \frac{27}{8}$ c/ $x^{-6} = 10^6$ d/ $x^5 = 1$ e/ $x^7 = 0$

f/ $(2x)^4 = 16$ g) $(x+1)^2 = 4$ h) $(x-1)^4 = 1$ ı) $3x^4 + 81 = 162$

açık önermelerinin Q daki doğruluk kümelerini bulun.

9- $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[3]{-8}$ $4^{3/2}$ $\left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$ $\left(-\frac{1}{16}\right)^{-3/4}$ sayılarını en basit şekilde yazın.

Çözümler :

1- $(74,185) \sim (x,y)$ $\quad x+y=21$

$74y = 185x \Rightarrow 2.37y = 5.37x$

$\Rightarrow 2y = 5x \wedge x+y=21$

$\Rightarrow (x,y) = (6,15)$

3- $(\overline{2,1}) + x = (\overline{0,3})$ $\quad x = (\overline{a,b})$

$(\overline{2,1}) + (\overline{a,b}) = (\overline{0,3}) \Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{0,3}) + (\overline{-2,1})$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}) = x = (\overline{0.1+3(-2),\ 3.1})$

$\Leftrightarrow x = (\overline{-6,3}) = (\overline{-2,1})$

$(\overline{2,5})x = (\overline{3,1}) \Leftrightarrow x = (\overline{2,5})^{-1}.(\overline{3,1})$

$\Leftrightarrow x = (\overline{3,1}).(\overline{5,2})$

$\Leftrightarrow x = (\overline{3.5,1.2}) = (\overline{15,2})$

7- • $2,4 = x \Rightarrow 10x = 24,\ x = \frac{24}{10}$

• $x = 3,265\overline{1805}$

$10^7x = 32651805,\overline{1805} = 10^7 3 + 2651805 + 0,\overline{1805}$

$10^3x = 3265,\overline{1805} = 10^3 3 + 265 + 0,\overline{1805}$

$\underbrace{(10^7-10^3)}_{b}x = \underbrace{(10^7-10^3)3 + 2651640}_{a}$

$\Rightarrow x = \frac{a}{b} = 3 + \frac{2651640}{10^7-10^3}$ //

8- • $x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow D = \left\{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{4}}}, -\sqrt{\frac{1}{4}}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

• $x^{-3} = \frac{27}{8} \Rightarrow (x^{-1})^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow x^{-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ $\quad D = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

• $2x^4 = 16 \Rightarrow ((2x)^2)^2 = 4^2 \Rightarrow (2x)^2 = 4 \wedge 2x = \sqrt{-4} \wedge 2x = \sqrt{4} \Rightarrow D = \{1,-1\}$

$\wedge\ 2x^2 = -4$

$\varsigma = \emptyset$

$(x-1)^4 = 1 \Leftrightarrow ((x-1)^2)^2 = 1 \longrightarrow (x-1)^2 = 1$

$\searrow (x-1)^2 = -1$

$\varsigma = \emptyset$

$x-1 = 1 \wedge x-1 = -1$

$D = \{2,0\}$

• $3x^4+81=-162 \Rightarrow 3x^4=-243 \Rightarrow x^4=-81 \Rightarrow (x^2)^2=-81 \Rightarrow \varnothing=\varnothing$

9- • $\sqrt[3]{-1}=-1$ • $\sqrt[3]{-8}=-2$ • $4^{3/2}=(4^{1/2})^3=(\sqrt{4})^3=2^3=8$ $\sqrt[3]{8}=2$

• $\left(-\frac{1}{16}\right)^{-3/4}=\left(-\frac{1}{2^4}\right)^{-3/4}=(-2^{-4})^{-3/4}=(-2)^{-4(-\frac{3}{4})}=(-2)^3=-8$ //

- REEL SAYILAR -

$2x=3$ denkleminin $\mathbb{Z}$ de çözümü yoktur. O halde,

Rasyonel sayılar kümesi, tamsayılar kümesinden daha geniştir.

$x^2=2$ rasyonel değil idi. Bu denklemi çözmek için, reel sayılar (gerçel sayılar) kümesi tanımlanmıştır.

Tanım: Tanım kümesi: pozitif tamsayılar kümesi, değer kümesi: rasyonel sayılar kümesi olan fonksiyona rasyonel sayı dizisi denir.

Yani: $f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}$
$n \longrightarrow f(n)=a_n$ bu diziyi sembolik olarak (a_n) ile gösteririz.

Tanım: (a_n) dizisi verildiğinde, a_n'e dizinin n. terimi (veya genel terimi) denir.

Örnek // $a_n=\frac{1}{n}$ olan dizi için $n=1 \Rightarrow a_1=1$ 1. terimdir.

$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 2. terim

$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{1}{3} \Rightarrow$ 3. "

Tanım: $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $a\in\mathbb{Q}$ olsun. $a_n=a$ (= sabit) olan diziye $[(a_n)=(a)]$ sabit dizi denir.

Örnek // $a_n=1 \Rightarrow a_1=1=a_2=\cdots$

Tanım: $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ için $a_n=b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizileri eşittir denir.

Tanım: (a_n) rasyonel sayı dizisi verilsin. $\forall \varepsilon\in\mathbb{Q}^+$ için $n\geqslant n_0$ olduğunda $|a_n-a|<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa (a_n) dizisinin limiti a sayısıdır. (Veya (a_n) dizisi a'ya yakınsar) denir. Ve sembolik olarak, $\lim a_n=a$, $(a_n)\longrightarrow a$ ile gösterilir.

Tanım: Limiti sıfır olan diziye sıfır dizisi denir.

Örnek // $a_n=\frac{1}{n}$ dizisi sıfır dizisidir.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^+$ için $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n\geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)\longrightarrow 0$

Tanım: (a_n) bir rasyonel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ için $n \geq n_0$ ve $p \geq n_0$ olduğunda, $|a_n - a_p| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa (a_n) dizisine temel dizi (Cauchy Dizisi) denir.

Teorem: Her yakınsak rasyonel sayı dizisi bir temel dizidir.

İspat// (a_n) dizisi yakınsak $\Rightarrow (a_n) \longrightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}^+$ için $n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ vardır. $n_0 \in \mathbb{Z}^+$.

$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}^+,\ p \geq n_0 \Rightarrow |a_p - a| < \varepsilon_2$

$\Rightarrow |a_n - a_p| = |a_n - a + a - a_p| = |(a_n - a) + [-(a_p - a)]| \leq |a_n - a| + |-(a_p - a)|$

$= |a_n - a| + |a_p - a| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ alırsak:

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ için $n \geq n_0 \wedge p \geq n_0,\ |a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n)$ bir temel dizidir.

Tanım: (a_n) bir rasyonel sayı dizisi olsun. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\exists M \in \mathbb{Q}^+$ için $|a_n| \leq M$ ise (a_n) dizisi sınırlıdır denir.

Teorem: Herhangi bir rasyonel sayı dizisi (a_n) olsun. (a_n) temel dizi ise sınırlıdır.

İspat// $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ için $n > n_0$ ve $p > n_0$ olmak üzere $|a_n - a_p| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Q}$ vardır.

$\Rightarrow \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}^+,\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ bağıntısı sağlanır.

$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < \varepsilon + a$

$\exists M \in \mathbb{Q}^+$ seçilebilir ki, $M > a + \varepsilon$ ve $-M < a - \varepsilon$ yapılabilir.

$\Rightarrow -M < a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < M \Rightarrow -M < a_n < M \Rightarrow |a_n| < M$

$\Rightarrow (a_n)$ dizisi sınırlı dizidir.

Tanım: Temel rasyonel sayılar dizilerinin kümesi T olsun. $(a_n), (b_n) \in T$ için $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n).(b_n) = (a_n . b_n)$ olan bu işlemlere, temel diziler kümesinde, toplama ve çarpma işlemleri denir.

Teorem: $(T, +, \cdot)$ yapısı birimli ve değişmeli bir halkadır.

1° $\forall (a_n),(b_n) \in T, \Rightarrow \forall \varepsilon_{1,2} \in Q^+,\ n \geq n_0 \wedge p \geq n_0$ olduğundan,

$|a_n - a_p| < \varepsilon_1 \wedge |b_n - b_p| < \varepsilon_2$

$\Rightarrow \left|[a_n + b_n] - [a_p + b_p]\right| = \left|[a_n - a_p] + [b_n - b_p]\right| \leq |a_n - a_p| + |b_n - b_p| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in Q^+,\ n \geq n_0 \wedge p \geq p_0$ olduğunda $\left|[a_n + b_n] - [a_p + b_p]\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n + b_n) = (a_n) + (b_n) \in T$ kapalıdır.

2° $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (b_n + a_n) = (b_n) + (a_n)$ değişme öz. vardır.

3° $(u_n) \longrightarrow 0$ dizisini alalım. ve $\forall (a_n) \in T$ için

$\Rightarrow (u_n) \in T$

$\Rightarrow (u_n) + (a_n) = (a_n) + (u_n) = (a_n)$ $\quad (u_n) \in T$ birim elemandır. $(u_n) = (0) = e$

4° Ters eleman, $\forall (a_n) \in T \Rightarrow -(a_n) = (-a_n) \in T$

Teorem: Terimleri rasyonel sayılar olan temel dizilerin kümesi T, sıfır dizilerinin kümesi S olsun.

$(a_n), (b_n) \in T$ için $(a_n),(b_n) \in \beta \Longleftrightarrow (a_n - b_n) \in S$

şeklinde tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat// $(a_n),(b_n),(c_n) \in T$ olmak üzere,

1° $\forall (a_n) \in T, \Rightarrow a_n - a_n = 0 \Rightarrow (a_n - a_n) = (0) \longrightarrow 0$ yansıma özelliği vardır.

$\Rightarrow (a_n - a_n) \in S \Rightarrow [(a_n),(a_n)] \in \beta$

2° $(a_n),(b_n) \in T$ için $[(a_n),(b_n)] \in \beta \Rightarrow (a_n - b_n) \in S \Rightarrow (a_n - b_n) \to 0$

$\Rightarrow [-(a_n - b_n)] \to 0 \Rightarrow (b_n - a_n) \to 0 \Rightarrow (b_n - a_n) \in S \Rightarrow [(b_n),(a_n)] \in \beta$ simetri öz.

3° $[(a_n),(b_n)] \in \beta \wedge [(b_n),(c_n)] \in \beta \Rightarrow [(a_n - b_n) \in S \wedge (b_n - c_n) \in S]$

$\Rightarrow (a_n - b_n) \to 0 \wedge (b_n - c_n) \to 0 \Rightarrow [(a_n - b_n) + (b_n - c_n)] \longrightarrow 0 + 0$

$\Rightarrow (a_n - c_n) \to 0 \Rightarrow (a_n - c_n) \in S \Rightarrow [(a_n),(c_n)] \in \beta$ geçişme öz. vardır.

β bağıntısının T den ayırdığı denklik sınıfları (a_n) elemanının denklik sınıfı $(\overline{a_n})$ ile gösterilirse,

$$(\overline{a_n}) = \{(x_n) : (x_n) \in T \wedge (x_n - a_n) \in S\}$$

Tanım: (Reel sayı): Terimleri rasyonel sayılar olan temel dizilerin kümesi T'de tanımlanan β denklik bağıntısının T'den ayırdığı denklik sınıflarının herbirine bir reel (gerçel) sayı denir. Bu sayıların kümesine de reel sayılar kümesi denir. Ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

1° $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[(\overline{a_n}),(\overline{b_n})] \longrightarrow [(\overline{a_n})+(\overline{b_n})] = (\overline{a_n+b_n})$$

şeklindeki işleme, reel sayılar kümesindeki toplama işlemi denir.

2° $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[(\overline{a_n}),(\overline{b_n})] \longrightarrow [(\overline{a_n}).(\overline{b_n})] = (\overline{a_n.b_n})$$

şeklindeki işleme, reel sayılar kümesindeki çarpma işlemi denir.

Teorem: $(\mathbb{R},+,\cdot)$ yapısı bir cisimdir. (ispatı yapılmayacaktır.)

Teorem: Rasyonel sayılar cismi, reel sayılar cisminin bir alt cismine izomorftur.

ispat// $\mathbb{R}' = \{(\overline{a}) : a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ [1° Ödev : $(\mathbb{R}',+,\cdot)$ yapısı bir cisimdir]

2° $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}'$
$a \longrightarrow f(a) = (\overline{a})$ fonksiyonu bir izomorftur. (ödev)

a) birebir ve örtendir ?

b) $f(a+b) \overset{?}{=} f(a)+f(b)$, $f(a.b) \overset{?}{=} f(a).f(b)$

$\mathbb{R}' \approx \mathbb{Q}$ $\qquad (\overline{a}) = a \qquad \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Tanım: $x,y \in \mathbb{R}$ olsun.

1- $x+(-y)$ reel sayısına x ve y reel sayılarının farkı denir. Ve $x-y$ ile gösterilir. Bu işleme de reel sayılarda çıkarma işlemi denir.

2- $y \neq 0$ olmak üzere $x.y^{-1}$ reel sayısına x ve y reel sayılarının bölümü (x'in, y'ye bölümü) denir ve $\frac{x}{y}$ veya $x:y$ şeklinde gösterilir. Bu işleme de rasyonel sayılarda bölme işlemi denir.

Tanım: $(F,+,\cdot)$ bir cisim olsun. Cismin sıfırı 0 ve bir alt kümesi P olsun.

a) $0 \notin P$ b) $a \in F$ ve $a \neq 0$ ise a veya $-a$ dan bir ve yalnız biri P'ye aittir. c) P kümesi F de tanımlı, toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

önermeleri doğru ise P alt kümesine $(F,+,\cdot)$ cisminin POZİTİF KESİMİ, P'nin herbir elemanına, F'nin pozitif bir elemanı ve $(F,+,\cdot)$ cismine de SIRALI cisim denir.

Eğer $a\in F$ elemanı pozitif ise $a\in P$ ise $0<a$ veya $a>0$ şeklinde ifade edilir.

P'nin pozitif olmayan sıfırdan farklı elemanlarına, negatif elemanları denir. $b\neq 0$ ve $b\notin P$ ise $b<0$ veya $0>b$ ile gösterilir.

Tanım: Sıralı $(F,+,\cdot)$ cisminin pozitif kesimi P olsun. $a,b\in P$ için $b-a\in P$ ise a, b'den küçüktür denir ve $a<b$ şeklinde veya $b>a$ yazılır.

Eğer $a<b$ veya $a=b$ önermesi doğru ise bu durumu $a\leqslant b$ veya $b\geqslant a$ şeklinde ifade ederiz.

Tanım: $(F,+,\cdot)$ bir sıralı cisim ve $a\in F$ olsun.

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \text{ ise} \\ -a, & a<0 \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|a|$ elemanına, a'nın mutlak değeri denir.

Teorem: $(R,+,\cdot)$ bir sıralı cisimdir.

İspat// $(\overline{a_n})\in\mathbb{R}$ ve $(\overline{a_n})\neq(\overline{0})$ olsun.

$\varepsilon\in\mathbb{Q}^+$ olmak üzere $n_0\in\mathbb{Z}^+$ için $\mathbb{R}$'nin $n\geqslant n_0$ olduğunda $a_n>\varepsilon$ önermesini doğrulayan elemanlarının kümesi $\mathbb{R}^+$ olsun.

1° $(\overline{0})\notin\mathbb{R}^+$ tanımdan dolayı.

2° $\forall(\overline{a_n})\in\mathbb{R}$ için $\wedge(\overline{a_n})\neq 0$ $\Rightarrow |a_n|>\varepsilon \Rightarrow (a_n>\varepsilon \vee a_n<-\varepsilon)$

$$\Rightarrow a_n>\varepsilon \vee -a_n>\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left[(\overline{a_n})\in\mathbb{R}^+ \vee (\overline{-a_n})\in\mathbb{R}^+\right]$$

3° $\forall(\overline{a_n}),(\overline{b_n})\in\mathbb{R}^+$ için $\begin{cases} n>n_0 \text{ için } \exists\varepsilon\in\mathbb{Q},\ a_n>\varepsilon \\ n>m_0 \text{ için } \exists\delta\in\mathbb{Q},\ b_n>\delta\end{cases}$

$\Rightarrow \max(n_0,m_0)=N_0$ ile gösterirsek,

$n>N_0$ için $a_n>\varepsilon \wedge b_n>\delta$ dır.

$$\Rightarrow (a_n+b_n>\underbrace{\varepsilon+\delta}_{>0} \wedge a_n.b_n>\underbrace{\varepsilon.\delta}_{>0}) \Rightarrow (\overline{a_n+b_n})=(\overline{a_n})+(\overline{b_n})\in\mathbb{R}^+$$

$$\wedge\ (\overline{a_n.b_n})=(\overline{a_n})\cdot(\overline{b_n})\in\mathbb{R}^+$$

kapalılık öz.

Sonuç olarak, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$'nin pozitif kesimidir. $\mathbb{R}$ sıralı bir cisimdir.

Teorem: $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun.

1° $x<y$, $x=y$, $x>y$ önermelerinden yalnızca bir tanesi doğrudur.

2° $(x<y \wedge y<z) \Rightarrow x<z$ dir. ($\mathbb{R}$ de geçişme öz.)

3° $x<y \Rightarrow x+z<y+z$ dir.

4° $(x<y \wedge 0<z) \Rightarrow xz<yz$ dir.

5° $(x<y \wedge 0>z) \Rightarrow xz>yz$ dir.

Tanım: (Reel Sayıların Kuvvetleri):

$x \in \mathbb{R}$ olsun.

1- $x \neq 0$ ise $x^0 = 1$

2- $x^1 = x$

3- $n \in \mathbb{Z}$ ise $x^{n+1} = x^n \cdot x$

4- $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \neq 0$ ise $x^{-n} = (x^{-1})^n$

Teorem: $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) n çift ise ve $a>0$ ise $x^n = a$ olacak şekilde biri pozitif ve diğeri negatif olan iki x reel sayısı vardır.

b) n çift ise ve $a<0$ ise $x^n = a$ olacak şekilde bir x reel sayısı yoktur.

c) n tek ise $x^n = a$ olacak şekilde bir tek x reel sayısı vardır.

a pozitif ise x pozitif, a negatif ise x negatiftir.

Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) n çift sayı ve $a \geq 0$ olmak üzere $x^n = a$ denklemini sağlayan pozitif x reel sayısına,

b) n tek sayı ise $x^n = a$ denklemini sağlayan x reel sayısına a'nın n'inci kuvvetten kökü denir. ve $x = \sqrt[n]{a}$ veya $a^{1/n}$ şeklinde yazılır.

Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ olsun. m ve a sayıları aynı anda sıfır değilseler,

$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

Teorem: $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Teorem: $m,n\in\mathbb{Q}$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ olsun. Her iki yan tanımlı olmak üzere,

a) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^m=\dfrac{1}{a^m}=a^{-m}$ b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ c) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ d) $(a^m)^n=a^{mn}$

Tanım: (irrasyonel Sayılar):

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin herbir elemanına bir irrasyonel sayı denir. İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{I}$ ile gösterilir.

Örnek 1// $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel sayıdır.

Örnek 2// $r\in\mathbb{Q}$ ve $\alpha\in\mathbb{I}$ olsun. $r\neq 0$ Olduğuna göre aşağıdaki sayıların herbirinin bir irrasyonel sayı olduğunu gösterin.

a) $-\alpha$ b) $\alpha+r$ c) $\alpha-r$ d) αr e) $\dfrac{\alpha}{r}$ f) $\dfrac{r}{\alpha}$, $\alpha\neq 0$ g) $\dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha\neq 0$

h) $\sqrt{\alpha}$, $\alpha\neq 0$

İspat// b) $\alpha+r$ irrasyoneldir. ?

Aksini kabul edelim. Yani $\alpha+r$ rasyonel olsun.

$\alpha+r\in\mathbb{Q} \Rightarrow \alpha+r=p\in\mathbb{Q}$ olacak şekilde bir p rasyonel sayısı vardır.

$\Rightarrow \alpha=p-r\in\mathbb{Q} \Rightarrow \alpha\in\mathbb{Q} \Rightarrow$ hipoteze aykırıdır.

$\Rightarrow \alpha\in\mathbb{Q} \wedge \alpha\notin\mathbb{Q} \Rightarrow$ kabulümüz yanlıştır.

$\Rightarrow \alpha+r\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \alpha+r\in\mathbb{I}$

Teorem: Herhangi iki rasyonel sayı arasında en az bir irrasyonel sayı vardır.

İspat// $u,v\in\mathbb{Q}$, $u\neq v$ $\Rightarrow u<v \Rightarrow v-u>0 \Rightarrow \dfrac{v-u}{\sqrt{2}}>0 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{v-u}{\sqrt{2}}+u}_{p}>u$

$\Rightarrow 1<\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow \dfrac{v-u}{\sqrt{2}}<v-u \Rightarrow \underbrace{\dfrac{v-u}{\sqrt{2}}+u}_{p}<v$, $p>u$ ve $p<v$

$\Rightarrow u<p<v \wedge p\in\mathbb{I}$

Problemler:

1 - $a,b\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=a^x+b^x$ ve $g(x)=\dfrac{f(3x)}{f(x)}$ fonksiyonları verildiğine göre $(f\circ g)$ fonksiyonu ?

2- $|16-4x^2|<1$ $\mathbb{R}$ deki doğruluğu ?

3- $|2x-3|>5$ " " ?

4 - $|3x-11| < 5 \ \wedge \ \frac{x^2-16}{x} < 0$ IR'deki doğruluk kümesi ?

5 - $|5-2x| < 2 \ \wedge \ x^2 < 5$ " " "

6 - $|3x+4| < |2x+5| + 1$ " " "

7 - $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$ reel sayısını en basit biçimde yazın.

8 - $A = \{(x,y) : x,y \in IR \wedge 3y-2x=3\}$

$B = \{(x,y) : x,y \in IR \wedge \frac{4x-3y+2}{1-2x} = -3\}$

$C = \{(x,y) : x,y \in IR \wedge \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{3}\}$ ise $A \cap B \cap C = ?$

9 - $\sqrt{6}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösterin.

10 - Herhangi iki irrasyonel sayı arasında en az bir irrasyonel sayı olduğunu ispatlayın.

Çözümler :

2 - $|16-4x^2| < 1$

a) $-1 < 16-4x^2 < 1 \Rightarrow -17 < -4x^2 < -15 \Rightarrow \frac{17}{4} > x^2 > \frac{15}{4}$

$\Rightarrow \frac{17}{4} > x^2 \ \wedge \ x^2 > \frac{15}{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{17}{4} - x^2\right) > 0 \ \wedge \ \left(x^2 - \frac{15}{4}\right) > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{17}}{2} + x\right) > 0 \ \wedge \ \left(x - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{15}}{2}\right) > 0$

b) $|16-4x^2| = \begin{cases} 16-4x^2, & 16-4x^2 \geq 0 \text{ ise} \\ -(16-4x^2), & 16-4x^2 < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} 16-4x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ -(16-4x^2), & x < -2 \wedge x > 2 \end{cases}$

$16-4x^2 \geq 0$ ise $\Rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

I) $-2 \leq x < 2 \Rightarrow 16-4x^2 < 1 \Rightarrow -4x^2 < -15 \Rightarrow x^2 > \frac{15}{4} \Rightarrow \left(x < -\frac{\sqrt{15}}{2} \ \vee \ x > \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\wedge \ (-2 \leq x \leq 2) \Rightarrow D_1 = \left[-2, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 2\right]$

II) $(x < -2 \ \wedge \ x > 2) \Rightarrow -16 + 4x^2 < 1 \Rightarrow 4x^2 < 17 \Rightarrow x^2 < \frac{17}{4}$

$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{17}}{2} < x < \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \wedge (x < -2 \ \vee \ x > 2) \Rightarrow D_2 = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -2\right) \vee \left(2, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

$D = D_1 \cup D_2 = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

4 - $\underbrace{|3x-11| < 5}_{D_1} \ \wedge \ \underbrace{\frac{x^2-16}{x} < 0}_{D_2}$ $\quad D = D_1 \cap D_2$

$|3x-11| < 5$, $|3x-11| = \begin{cases} 3x-11, & 3x-11 \geq 0 \text{ ise} \\ -(3x-11), & +3x-11 < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} 3x-11, & x \geq \frac{11}{3} \\ -3x+11, & x < \frac{11}{3} \end{cases}$

I - $x \geq \frac{11}{3} \Rightarrow 3x-11 < 5 \Rightarrow 3x < 16 \Rightarrow x < \frac{16}{3} \Rightarrow \left(x \geq \frac{11}{3} \wedge x < \frac{16}{3}\right)$

$\Rightarrow D_1 = \left[\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right)$, $x < \frac{11}{3} \Rightarrow D_2 = \emptyset$ $\quad D_1 \cup D_2 = \left[\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right)$

II - $\frac{x^2-16}{x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x} < 0 \Rightarrow$ $x-4 < 0 \rightarrow x < 4$
$x+4 < 0 \rightarrow x < -4$
$x < 0 \rightarrow x < 0$

yanlış (2,4) olacak //

x	-4	0	4	
	−	+	+	+
$x-4$	−	−	− 0	+
$x+4$	− 0	+	+	+
$\frac{x^2-16}{x}$	−	+	−	+

$D_3 = (-\infty, -4) \cup (0, 4)$

$D = D_1 \cap D_3 = \left[\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right) \cap (0,4) = \left[\frac{11}{3}, 4\right)$

6- $|3x+4| < |2x+5| + 1$

$|3x+4| = \begin{cases} 3x+4, & 3x+4 \geq 0 \\ -(3x+4), & 3x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+4, & x \geq -\frac{4}{3} \\ -3x-4, & x < -\frac{4}{3} \end{cases}$

$\underset{(3)}{-\frac{5}{2}}, \underset{(2)}{-\frac{4}{3}} \Rightarrow -\frac{15}{6}, -\frac{8}{6}$

$\Rightarrow -\frac{15}{6} < -\frac{8}{6}$

$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, & 2x+5 \geq 0 \\ -(2x+5), & 2x+5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+5, & x \geq -\frac{5}{2} \\ -2x-5, & x < -\frac{5}{2} \end{cases}$

I $-15/6$ $-8/6$ II
III

i- $x < -\frac{5}{2} \Rightarrow -3x-4 < -2x-5+1 \Rightarrow 0 < x \Rightarrow \left(x < -\frac{5}{2} \wedge 0 < x\right)$

$\Rightarrow D_1 = \emptyset$

ii- $-\frac{5}{2} \leq x < -\frac{4}{3} \Rightarrow -3x-4 < 2x+5+1 \Rightarrow -10 < 5x \Rightarrow -2 < x$

$\Rightarrow \left(-2 < x \wedge -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow D_2 = \left(-2, -\frac{4}{3}\right)$

iii- $x \geq -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4 < 2x+5+1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \left(x < 2 \wedge x \geq -\frac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow D_3 = \left[-\frac{4}{3}, 2\right)$

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \Rightarrow \emptyset \cup \left(-2, -\frac{4}{3}\right) \cup \left[-\frac{4}{3}, 2\right) = (-2, 2)$

KOMPLEKS (KARMAŞIK) SAYILAR

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ önermesi doğrudur.

$x^2 = -1$ önermesinin $\mathbb{R}$ deki çözümü $\emptyset$ dir.

Tanım: (Kompleks - Karmaşık - İmajiner Sayılar):

$\mathbb{C} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ olan $\mathbb{C}$ kümesine, karmaşık (kompleks) sayılar kümesi denir. $\mathbb{C}$ nin herbir elemanına bir karmaşık sayı denir.

Eğer $(x,y) \in \mathbb{C}$ ise

X : karmaşık sayının reel (gerçel kısmı)

y : " " imajiner (sanal-kompleks kısmı) denir.

$z=(x,y)$ ise $x=Re(z)$ ve $y=\dot{I}m(z)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek // $(-2,3)$, $(0,-1)$, $(\sqrt{2},\frac{1}{2})$ reel sayı ikililerinin herbiri bir karmaşık sayıdır.

• $z=(\sqrt{2},\frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{2}=Re(z)$, $\frac{1}{2}=\dot{I}m(z)$

Tanım: (eşitlik) : $(x,y),(u,v) \in \mathbb{C}$ olsun.

$$(x,y)=(u,v) \Leftrightarrow (x=u \wedge y=v)$$

Tanım: $\mathbb{C}$ kümesinde,

1° $\oplus : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(x,y),(u,v) \longrightarrow (x,y)\oplus(u,v)=(x+u,y+v)$

işlemine toplama işlemi denir.

2° $\odot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(x,y),(u,v) \longrightarrow (x,y)\odot(u,v)=(xu-yv, xv+yu)$

işlemine çarpma işlemi denir.

Teorem: $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ matematik yapısı bir cisimdir.

I- $(\mathbb{C},\oplus)$ abel grubudur.

II- $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\odot)$ abel grubudur.

III- Dağılma özelliği vardır.

I- a) $\forall (x,y)\in\mathbb{C}$, $(x,y)\oplus(u,v)=(u,v)\oplus(x,y)=(x,y)$, $(u,v)=e\in\mathbb{C}$?

$(x,y)\oplus(u,v)=(x,y) \Rightarrow (x+u,y+v)=(x,y) \Rightarrow (x+u=x)\wedge(y+v=y)$

$\Rightarrow u=0 \wedge v=0 \Rightarrow e=(u,v)=(0,0)\in\mathbb{C}$ birim eleman.

b) $z=(x,y) \Rightarrow -z=(-x,-y)\in\mathbb{C}$ ters eleman.

II- $(\mathbb{C}\setminus\{0,0\},\odot)$ abel grubudur.

a) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}\setminus\{0,0\}$, $(x,y)\odot(u,v)=(u,v)\odot(x,y)=(x,y)$, $e=(u,v)\in\mathbb{C}$?

$(x,y)\odot(u,v)=(x,y) \Rightarrow (xu-yv, xv+yu)=(x,y)$

$\Rightarrow xu-yv=x \wedge xv+yu=y$

$\Rightarrow x^2u-xyv=x^2 \wedge y^2u+xyv=y^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2)u=x^2+y^2$

$\Rightarrow (u=1 \wedge v=0) \Rightarrow e=(1,0)\in\mathbb{C}$ birim eleman

b) $\forall x,y \in \mathbb{C}$, $(x,y) \odot (u,v) = (u,v) \odot (x,y) = (1,0)$, $(u,v) = (x,y)^{-1} \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow (x,y) \odot (u,v) = (1,0) \Rightarrow (xu - yv, xv + yu) = (1,0)$$

$$\Rightarrow (xu - yv = 1 \wedge xv + yu = 0)$$

$$\Rightarrow ux^2 - xyv = x \wedge uy^2 + xyv = 0$$

$$\Rightarrow u(x^2+y^2) = x$$

$$\Rightarrow u = \frac{x}{x^2+y^2} \wedge v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{C} \setminus \{0,0\}$$ ters eleman.

III - $\odot$ nın $\oplus$ üzerine dağılma özelliği.

Teorem: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre $(\mathbb{C}_R, \oplus, \odot)$ yapısı bir cisimdir.

Bu cisim $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cismine izomorftur.

İspat// $f: \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,0) \longrightarrow f(x,0) = x$ tanımlanıyor.

I - $(x,0),(y,0) \in \mathbb{C}_R$, $f[(x,0) \oplus (y,0)] = f(x+y, 0) = x+y = f(x,0) + f(y,0)$

II - $f[(x,0) \odot (y,0)] = f(xy - 0.0, x0 + y0) = f(xy, 0) = xy = f(x,0) . f(y,0)$

III - f, 1:1 ve örtendir.

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{C}_R$$

$$(x,0) = x , \quad (0,0) = 0 , \quad (1,0) = 1$$

Tanım: (Çıkarma ve Bölme):

$z, w, \in \mathbb{C}$ olduğuna göre

1° $z \oplus (-w)$ sayısına "z ile w nın farkı" denir ve $z - w$ ile gösterilir.

Bu işleme de çıkarma işlemi denir.

2° $z \odot (w)^{-1}$ sayısına "z nin w ya bölümü" denir ve $z : w$, $\frac{z}{w}$ ile gösterilir.

Bu işleme de bölme işlemi denir.

Örnek// $z = (-1,2)$, $w = (3,-4) \Rightarrow -w = (-3, -(-4)) = (-3,4)$

$$z - w = z \oplus (-w) = (-1-3, 2+4) = (-4, 6)$$

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \left(\frac{3}{3^2+(-4)^2}, \frac{-(-4)}{3^2+(-4)^2}\right) = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$$

$$\frac{z}{w} = z \odot w^{-1} = (-1,2) \odot \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right) = \left(-\frac{3}{25} - \frac{8}{25}, -\frac{4}{25} + \frac{6}{25}\right) = \left(-\frac{11}{25}, \frac{2}{25}\right)$$

Teorem: (sadeleştirme) : $z, u, w \in \mathbb{C}$ olduğuna göre $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ ise

$$\frac{z \odot v}{u \odot v} = \frac{z}{u}$$

İspat// $\frac{z \odot v}{u \odot v} = (z \odot v) \odot (u \odot v)^{-1} = (z \odot v) \odot (v^{-1} \odot u^{-1})$ (işlemin özelliğinden)

$$= z \odot (v \odot v^{-1}) \odot u^{-1}$$

$$= z \odot e \odot u^{-1}$$

$$= z \odot u^{-1} = \frac{z}{u}$$

Tanım: (Karmaşık Sayıların Tam Kuvvetleri) :

$z \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

a) $z \neq 0$ ise $z^0 = 1$

b) $z^{n+1} = z^n \odot z$

c) $z^1 = z$

d) $z \neq 0$, $z^{-n} = (z^{-1})^n$

Tanım: $(0,1) = i$ ile gösterilir.

Teorem: $i^2 = -1$ dir.

İspat// $i^2 = i \odot i = (0,1) \odot (0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 = -1$ //

Teorem: $(x,y) \in \mathbb{C}$ olduğuna göre $(x,y) = x \oplus (i \odot y)$ dir.

İspat// $(x,y) = (x,0) \oplus (0,y)$

$$i \odot (y,0) = (0,1) \odot (y,0) = (0.y - 1.0, 0.0 + 1.y) = (0,y)$$

$\Rightarrow (x,y) = (x,0) \oplus [i \odot (y,0)]$ $\qquad (x,0) = x \wedge (y,0) = y$

$\Rightarrow (x,y) = x \oplus (i \odot y)$

Sonuç// $\oplus = +$, $\odot = \cdot$ $\Rightarrow (x,y) = x + iy$

Tanım: (x,y) kompleks sayısının $x+iy$ şeklindeki gösterimine kompleks sayının normal (cebirsel) biçimi denir.

Sonuç// $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olduğuna göre,

1- $z + w = (x+u) + (y+v)i$

2- $z - w = (x-u) + (y-w)i$

3- $z . w = (xu - yv) + (xv + yu)i$

4- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Problemler :

1 − $(-3-4i)-(2+3i)$, $(1-2i)^3$, $\frac{(3+5i)}{(1-i)}$, $\frac{(1+i)}{i}$ kompleks sayılarını normal biçimde yazın.

2 − $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2+i}{5i}=?$, $(1-i)^4=?$

3 − $n\equiv r\ (\mathrm{mod}\,4)$ olduğuna göre $i^n=i^r$ olduğunu ispat edin.

4 − $\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$ en basit şekilde yazın.

Çözümler :

1 − $(-3-4i)-(2+3i)=(-3-2)+i(-4-3)=-5-7i$ //

$(1-2i)^3=1^3+3(1)^2(-2i)+3.1\,(-2i)^2+(-2i)^3=-11+2i$ //

$(3+5i):(1-i)=\frac{(3+5i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=-1+4i$ //

2 − • $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2+i}{5i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(2+i)(-i)}{5i(-i)}=\frac{(3-8)+i(4+6)}{3^2+4^2}-\frac{2i-1}{5}$

$=\frac{-5+10i}{25}-\frac{1+2i}{5}=\frac{-1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}=0$ //

• $(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(1-2i+i^2)^2=(1-2i-1)^2=4$ //

3 − $n\equiv r(\mathrm{mod}\,4)\Rightarrow \exists k\in \mathbb{Z},\ n=r+4k$

$\Rightarrow i^n=i^{r+4k}$

$\Rightarrow i^n=i^r.\,i^{4k}$ $\qquad (i^4)^k=1^k=1$

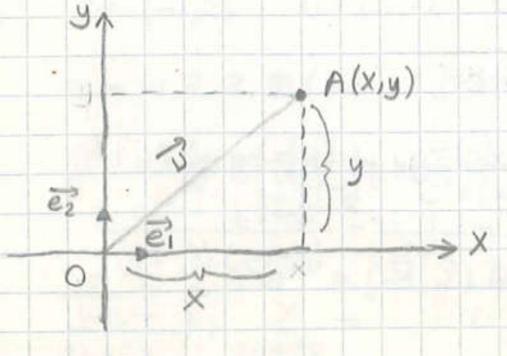
$\Rightarrow i^n=i^r.(i^4)^k \Rightarrow i^n=i^r$ //

4 − $\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$ $\qquad 30\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\Rightarrow i^{30}=i^2=-1$

$\qquad 19\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\Rightarrow i^{19}=i^3=i^2.i=-i$

$=\frac{3.(-1)-(-i)}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}=\frac{(-3+i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)}=\frac{(3+2)+i(6-1)}{1+4}=\frac{5(1+i)}{5}=1+i$ //

Karmaşık Sayıların Geometrik Gösterimi



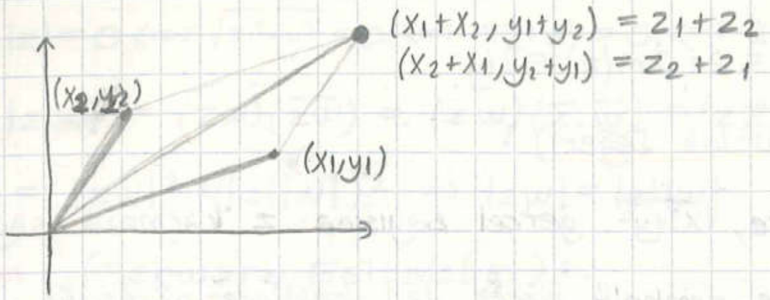
$\vec{u}=(x,y)=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$

$z=(x,y)$ Bu düzleme kompleks düzlem denir.

Ox ekseni : Reel (gerçel) eksen.

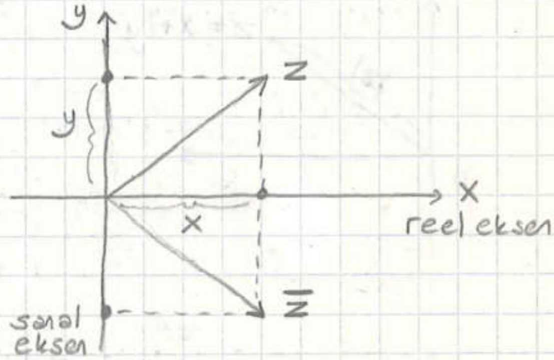
Oy " : imajiner (sanal) " .

$z=x+iy$ kompleks sayısını grafikle çizmek için, bileşenleri x ve y olan iki nokta alırız. Kesişimleri kompleks sayı olan bir nokta bulunur.



Tanım: (eşlenik) : "$z=x+iy$ kompleks (karmaşık) sayısının eşleniği" diye $x-iy$ karmaşık sayısına denir ve $\bar{z}$ ile gösterilir.

$z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$ dir.



Örnek// $z=3-2i$ ise $\bar{z}=3+2i$ dir.

Teorem: $z, w \in \mathbb{C}$ olduğuna göre,

1- $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$

2- $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$

3- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ $\quad (z \neq 0)$

4- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $\quad (w \neq 0)$

5- $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

6- $z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

İspat// $z=x+iy$ ve $w=u+iv$ olsun.

1- $\overline{z+w} = \overline{(x+u)+i(y+v)} = (x+u)-i(y+v) = (x-iy)+(u-iv) = \bar{z}+\bar{w}$

2- $z.w = (x+iy)(u+iv) = xu-yv+i(xv+yu)$

$\overline{z.w} = (xu-yv)-i(xv+yu)$

$\bar{z}.\bar{w} = (x-iy)(u-iv) = xu-yv+i(-xv-yu) = xu-yv-i(xv+yu)$

$\Rightarrow \overline{zw} = \bar{z}.\bar{w}$

3- $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

4- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z.\frac{1}{w}\right)} = \overline{z}\,\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z}\,\frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

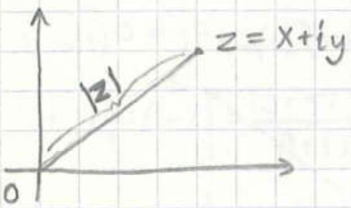
5- $z+\overline{z} = (x+iy)+(x-iy) = 2\,Re(z) = 2x$

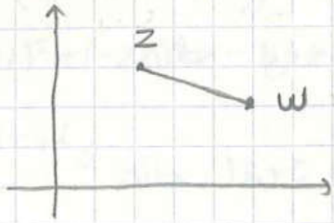
6- $z-\overline{z} = (x+iy)-(x-iy) = 2i\,Im(z) = 2iy$

Tanım: (Karmaşık Sayının Mutlak Değeri):

$z = x+iy$ olduğuna göre, $\sqrt{x^2+y^2}$ gerçel sayısına z karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü) denir ve sembolik olarak $|z|$ şeklinde gösterilir.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ "z modül" veya "modül z" diye okunur.





(iki nokta arasındaki uzaklık)

$$|z-w| = |x+iy-(u+iv)|$$
$$= |(x-u)+i(y-v)|$$
$$|z-w| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

Teorem: $z, w \in \mathbb{C}$ olsun.

1- $|z| = |\overline{z}|$

2- $|z|^2 = z.\overline{z}$

3- $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

4- $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

5- $|z| \geq 0$

6- $|z| = 0 \iff z = 0$

7- $|z.w| = |z|.|w|$

8- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

İspat// $z = x+iy \Rightarrow \overline{z} = x-iy$

2- $\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2+y^2 \\ z.\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |z|^2 = z.\overline{z}$

3- $|z|=\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+0} = \sqrt{|x|^2}$

$\Rightarrow |z| \geqslant |x| \geqslant x \Rightarrow |z| \geqslant |Re(z)| \geqslant Re(z)$

6- $|z|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow z=0$

7- $|z.w|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\overline{z}.\overline{w}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2$

$\Rightarrow |zw|^2 = (|z||w|)^2 \Rightarrow |zw| = |z||w|$

Teorem : (Schwarz Eşitsizliği):

$i \in \{1,2,3,4,\dots,n\}$ için $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)$$

Teorem : (Üçgen Eşitsizliği):

$z, w \in \mathbb{C}$ için

1- $|z+w| \leqslant |z|+|w|$

2- $\big||z|-|w|\big| \leqslant |z-w|$

İspat// 1- $z=x+iy$ $w=u+iv$ olsun.

$|z+w|^2 = |(x+u)+i(y+v)|^2 = (x+u)^2+(y+v)^2$

$= (x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv)$

$(xu+yv)^2$

$n=2$ $x_1=x,\ x_2=y,\ y_1=u,\ y_2=v$

$\left(\sum_{i=1}^{2} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)$

$\Rightarrow (x_1y_1+x_2y_2)^2 \leqslant (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$

$(xu+yv)^2 \leqslant (x^2+y^2)(u^2+v^2)$

$(xu+yv) \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$

$\Rightarrow |z+w|^2 \leqslant (x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$

$\Rightarrow |z+w|^2 \leqslant \left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{u^2+v^2}\right)^2$

$\Rightarrow |z+w|^2 \leqslant (|z|+|w|)^2$

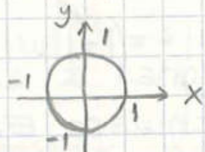
$\Rightarrow |z+w| \leqslant |z|+|w|$

7.6.1994
SALI **Örnek//** $z \in \mathbb{C}$ olduğuna göre aşağıdaki bağıntıları gerçekleyen nokta kümelerini karmaşık düzlemde gösterin.

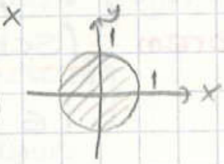
a) $|z|=1$ b) $|z|<1$ c) $|z|\leq 1$ d) $z+\bar{z}=1$ e) $z-\bar{z}=i$ f) $z+\bar{z}=|z|^2$

a- $\{(x,y): x,y\in \mathbb{R} \wedge |z|=1\} = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1\}$

$z=x+iy \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

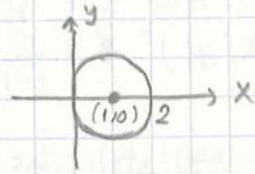


c- $|z|\leq 1$ (çemberin üzerindeki ve içindeki noktaların kümesidir.)



f- $z+\bar{z}=|z|^2$

$\{(x,y): 2x=x^2+y^2\} = \{(x,y): (x-1)^2+y^2=1\}$



$M(1,0)$ $r=1$

Örnek// Aşağıdaki kümeleri karmaşık düzlemde gösterin.

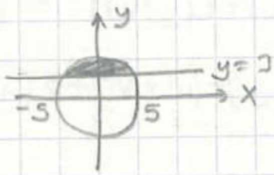
a) $\{z: z\in\mathbb{C},\ |z|=5 \text{ ve } \text{Im}(z)=3\} = M$

b) $\{z: z\in\mathbb{C},\ \text{Im}(z)=1\}$

c) $\{z: z\in\mathbb{C},\ |z-(1+i)|=3\}$

a- $z=x+iy$, $|z|=5 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=5 \Rightarrow x^2+y^2=5^2$

$\text{Im}(z)=3 \Rightarrow y=3$



$M=\{(x,y): x^2+y^2=5^2 \wedge y=3\}$
$=\{(-4,3),(4,3)\}$

Örnek// Aşağıdaki karmaşık sayılardan herbiri için $|z|$, $\bar{z}$, $z.\bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}}$ ifadelerini bulun.

a) $3+2i$ b) $-i$ c) 1 d) $\frac{1}{3+2i}$ e) $i^{15}-1$

a- $z=3+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\Rightarrow \bar{z}=3-2i$

$\Rightarrow z.\bar{z}=|z|^2=13$

$\Rightarrow \frac{z}{\bar{z}}=\frac{3+2i}{3-2i}=\frac{(3+2i)^2}{13}=\frac{5+12i}{13}$ //

Örnek// b belirli bir karmaşık sayı a ve c gerçel sayılar ve $a\neq 0$ ise $az.\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$ bağıntısını gerçekleyen z noktalarının karmaşık düzlemde bir çember üzerinde olduğunu ispatlayın.

İspat// $z = x+iy$, $b = p+iq$ $\quad b\bar{z} = w$ diyelim. $\overline{b.\bar{z}} = \overline{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{w} = \overline{b}.\overline{\bar{z}} = \overline{b}.z$

$\Rightarrow b.\bar{z} + \overline{b}.z = w + \overline{w} = 2Re(w)$

$w = b.\bar{z} = (p+iq)(x-iy)$

$\quad = px + qy + i(-py + qx)$

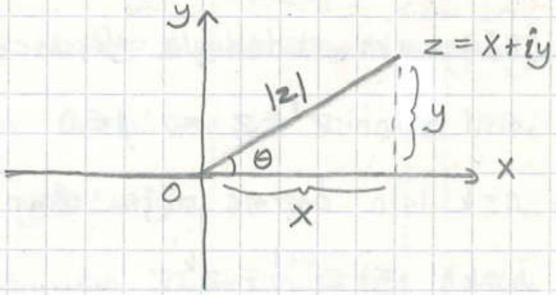
$Re(w) = px + qy$

$a.(x^2+y^2) + 2(px+qy) + c = 0 \Rightarrow x^2+y^2 + 2\frac{p}{a}x + 2\frac{q}{a}y + \frac{c}{a} = 0$

(Çember denklemidir.)

Karmaşık Sayıların Kutupsal Biçimi

$z = (x,y) = x+iy \in \mathbb{C}$



$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ $\quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}$

$\Rightarrow x = |z|\cos\theta \wedge y = |z|\sin\theta$

$\Rightarrow |z| = x+iy$

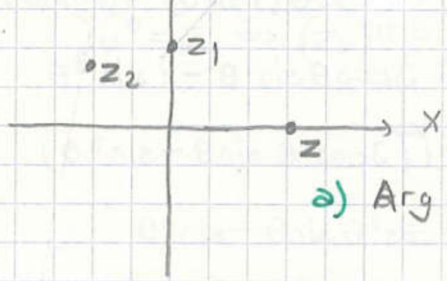
$\quad = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$ (z nin kutupsal biçimi)

θ : z'nin argümenti (açısı) dir.

$0 \leq \theta < 2\pi$ olan açıya z nin asıl argümenti denir. $[0, 2\pi)$

Örnek//



z'nin argümenti özel olarak Arg z, ($[0,2\pi)$ de) genel olarak arg z ile gösterilir.

a) $\text{Arg}\, z = 0$ $\quad$ b) $\text{Arg}\, z_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ c) $\frac{\pi}{2} < \text{Arg}\, z_2 < \pi$

Örnek// Aşağıdaki kompleks sayıların argümentlerini bulalım.

a) 1 $\quad$ b) -1 $\quad$ c) i $\quad$ d) $-i$ $\quad$ e) $-1-i = z$

a) $0°$ $\quad$ b) π $\quad$ c) $\pi/2$ $\quad$ d) $3\pi/2$

e) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Teorem: $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \wedge w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ olduğuna göre

a) $z.w = |z|.|w|\left[\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)\right]$

b) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}\left[\cos(\alpha-\theta) + i\sin(\alpha-\theta)\right]$ dir.

İspat// a) $z.w = |z|.|w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= |z|.|w|\left[\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta + i(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta)\right]$

$= |z|.|w|\left[\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)\right]$

Teorem: (kompleks sayıların tam kuvvetleri – De Moivre Formülü):

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve $n \in Z^+$ olduğuna göre ;

$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$ dır

İspat// (Tümevarım metoduyla yapılacaktır.)

$n=1$ için $z^1 = z \Rightarrow 1 \in D$

$n=k$ için önerme doğru olsun. $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$

$n=k+1 \Rightarrow z^{k+1} = z^k.z$

$= r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\,r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^{k+1} = r^{k+1}\left[\cos k\theta.\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta)\right]$

$= r^{k+1}\left[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\right] \Rightarrow k+1 \in D$

Örnek// $\cos 3\theta$ ve $\sin 3\theta$ 'yı, $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ cinsinden yazınız.

$\left.\begin{matrix} n=3 \\ r=1 \end{matrix}\right\}$ $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta + i\,3\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \wedge \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Ödev// $\cos 5\theta$ ve $\sin 5\theta$ 'yı, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden hesaplayın.

Teorem: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve $n \in Z^+$ olduğuna göre

$z^{-n} = (z^{-1})^n = |z|^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right]$

İspat// z^{-1} yerine değerini yazalım.

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= |z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$\Rightarrow z^{-n} = \{|z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\}^n$$

$$\Rightarrow z^{-n} = |z|^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

Tanım: Katsayıları $\mathbb{C}$ den seçilen bir polinom $P(x)$ olsun. $P(x) = 0$ denklemine bir polinom denklemi, denklemi sağlayan her bir karmaşık sayıya denklemin bir kökü (çözümü) denir.

Teorem: Katsayıları $\mathbb{C}$ den seçilen bir polinom denkleminin en az bir kökü vardır. (ispatı yapılmayacaktır.)

Tanım: $z \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğuna göre $w^n = z$ denklemini sağlayan (gerçekleyen), w kompleks sayılarının herbirine z nin, n'inci kuvvetten bir kökü denir. Ve $z^{1/n}$ ile gösterilir.

Teorem: Sıfırdan farklı bir karmaşık sayının n. kuvvetten farklı n tane kökü vardır.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğuna göre $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ olmak üzere bu kökler,

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]}$$ şeklindedir.

İspat// (Bu teorem ispatlanmayacaktır. Gerçekten $w^n = z$ olduğunu görelim.)

$$w^n = z \Rightarrow (z_k)^n = \left[|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]^n$$

$$= |z|\left[\cos n\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin n\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

$$= |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$$

$$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = z$$

Örnek// $w^4 = -1 \Rightarrow z = -1 = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad |z| = 1$

$\cos\theta = -1 \quad \sin\theta = 0 \qquad z = (\cos\pi + i\sin\pi) = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)$

$\pi = \theta$

$$w^4 = z \Rightarrow w = z^{1/4}$$

$$z^{1/4} = 1^{1/4}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right]$$

$k=0,\ w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=1,\ w_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=2,\ w_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=3,\ w_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Örnek// $\operatorname{Arg}(-3+3i) = ?$

$|-3+3i| = 3\sqrt{2}$ $\quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad \left\} \cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$-3+3i = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \operatorname{Arg}(-3+3i) = \frac{3\pi}{4}$ //

Örnek// $z = (2+2\sqrt{3}i)$ karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazınız.

$|z| = 2\sqrt{1+3} = 4 \qquad z = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$

Örnek// $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$ karmaşık sayısını $x+iy$ şeklinde yazınız.

$z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \qquad |z| = \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1$

$z = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$

$\frac{50\pi}{3} = (48+2)\frac{\pi}{3}$

$= 16\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{100} = \cos 100\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) + i\sin 100\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$

$\Rightarrow z^{100} = \cos\frac{50\pi}{3} + i\sin\frac{50\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{100} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{100} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^{100} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ //

Ödev// (-1) sayısının küpköklerini bulun.

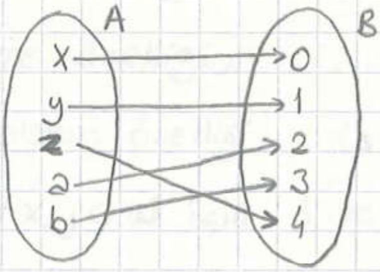
$(-1+i)$ " " " . $\sqrt[3]{1+i}$

$z^5 = -32$ denkleminin $\mathbb{C}$ deki köklerini bulun.

(s: 108 'den devam)

Tanım: Sonlu kümeler ailesinde tanımlanan eşit güçlü olma bağıntısına göre elde edilen ve 0,1,2,3,.... ile gösterilen denklik sınıflarının herbirine bir doğal sayı denir. Bu sayıların kümesine de doğal sayılar kümesi denir.

Doğal sayılar kümesinin bir alt kümesine eşit güçlü olan kümeye sayılabilir küme denir. Sayılabilir olmayan kümeye de sayılamayan küme denir. $A = \{x, y, z, a, b\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ise,



teşkil edilen fonksiyon 1:1 ve örtendir.

$$f: A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B$$

Örnek // Doğal sayılar kümesinin kendisi sayılabilir mi?

Sonuç: Doğal sayılar kümesi sonsuz kümedir.

Tanım: $S = \{1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$

Doğal sayılar kümesi ile sayma sayıları kümesi arasında eşit güçlülük teşkil ediliyorsa, doğal sayılar kümesi sonsuz kümedir.

Tanım: Bir A kümesi $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesine eşit güçlüyse n'ye A kümesinin eleman sayısı denir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.

Tanım: (Doğal Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi):

$x, y \in \mathbb{N}$, x sayısını temsil eden A kümesi ve y sayısını temsil eden ve A ile ayrık olan B kümesinin birleşiminin bulunduğu denklik sınıfına x ve y doğal sayılarının toplamı denir.

$$x \in \overline{A} \text{ ve } y \in \overline{B} \text{ ve } A \cap B = \emptyset \Rightarrow x + y = \overline{A \cup B}$$

Örnek // 2 ve 3 sayılarının toplamını bulalım.

$$\left.\begin{matrix} \overline{A} = 2 & A = \{a, b\} \\ \overline{B} = 3 & B = \{x, y, z\} \end{matrix}\right\} x + y = \overline{A \cup B} = \{a, b, x, y, z\} = 2 + 3 = 5$$

Teorem: $\{\mathbb{N}, +\}$ 'nın aşağıdaki özellikleri vardır:

1- $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x+y \in \mathbb{N}$ (kapalılık)

2- $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x+y = y+x$ (değişme)

3- $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (birleşme)

4- $x, 0 \in \mathbb{N}, \quad x+0 = 0+x = x$ (birim eleman)

İspat// $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x = \overline{A} \wedge y = \overline{B}$ ve $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $z = \overline{C}$

1- $x+y = \overline{A \cup B} \in \mathbb{N}$

2- $x+y = \overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} = y+x$

3- $(x+y)+z = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = x+(y+z)$

4- $x, 0 \in \mathbb{N}$; $x = \overline{A}$ ve $0 = \emptyset$

$x+0 = 0+x = x$ (doğal sayılar kümesinin birim elemanı sıfırdır.)

Teorem: Sonlu iki kümenin kartezyen çarpımı da sonludur.

İspat// ① A ve B iki küme ve bunlardan birisi boş ise $A \times B = \emptyset$ olur.

$\Rightarrow \emptyset$ sonlu ise $A \times B$ de sonludur.

② $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olsun.

$\Rightarrow A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ olsun.

$\Rightarrow A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$

$\Rightarrow A \times B = (\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}) \times B$

$\Rightarrow A \times B = (\{a_1\} \times B) \cup (\{a_2\} \times B) \cup \ldots \cup (\{a_n\} \times B)$

$\Rightarrow A \times B = \{a_1\} \times B \sim B$

Herhangi bir kümeyle bu kümenin herhangi bir elemanının kartezyen çarpımı eşit güçlü bir kümedir denir.

$f : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \{a\} \times B$

$x \longrightarrow f(x) = \{a, x\}$

$\Rightarrow \{a_1\} \times B$ sonludur.

$\Rightarrow \{a_2\} \times B$ "

$\Rightarrow \{a_3\} \times B$ "

Tanım : (Çarpma) :

x ve y iki doğal sayı olsun. $x=\overline{A}$ ve $y=\overline{B}$ olmak üzere $A \times B$ nin bulunduğu denklik sınıfına x ve y doğal sayılarının çarpımı denir.

"$x.y$" ile gösterilir. $x.y = \overline{A \times B}$ dir.

Teorem : Doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin şu özellikleri vardır :

1- Kapalılık özelliği,

2- Değişme özelliği,

3- Birleşme özelliği,

4- Birim eleman özelliği.

İspat: 1- $\forall x,y \in \mathbb{N}$ için A ve B sonlu kümesi ve $x=\overline{A} \wedge y=\overline{B}$

$\Rightarrow A \times B$ sonludur.

$\Rightarrow xy = \overline{A \times B} \in \mathbb{N}$

2- $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $x.y = \overline{A \times B} = \overline{B \times A}$

$$f : A \times B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \times A$$
$$(u,v) \longrightarrow f(u,v)$$

fonksiyonunun 1:1 ve örten olduğunu ispata çalışalım.

$\forall (u_1,v_1),(u_2,v_2) \in A \times B$, $f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$

$\Rightarrow (u_1=u_2) \wedge (v_1=v_2) \Rightarrow (u_1,v_1)=(u_2,v_2)$

sonuç olarak, $\overline{A \times B} = \overline{B \times A}$

3- $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $(xy)z = \overline{(A \times B) \times C} = \overline{A \times (B \times C)} = x(yz)$

$x=\overline{A}$ $y=\overline{B}$ $z=\overline{C}$

4- $x,1 \in \mathbb{N}$, $x=\overline{A} \wedge 1 = \{\overline{a}\}$

$x.1 = \overline{A \times \{a\}} = \overline{\{a\} \times A}$ (eşit güçlüdürler, dolayısıyla denklik sınıfları aynıdır.) $x.1 = 1.x = x$ (1, çarpma işleminde birim elemandır.)

Teorem : $\forall x,y \in \mathbb{N}$ için,

1- $x=y \wedge z=t \Rightarrow (xz=yt)$

2- $x,y,z \in \mathbb{N}$, $x=y \Rightarrow xz=yz$

3- $\forall x,y,z \in \mathbb{N}$, $(xy=yz) \wedge y \neq 0 \Rightarrow x=z$

4- $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$

5- $x(y+z) = xy+xz$

6- $(x+y)z = xz+yz$

İspat// 1- $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow x = \bar{A}, y = \bar{B}, z = \bar{C}, t = \bar{D}$

$(x = y \wedge z = t)$ $\bar{A} = \bar{B} \cap \bar{C} = \bar{D}$ $\Rightarrow (A \sim B \wedge C \sim D)$

$\Rightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \wedge \exists g : C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} D$

$xz = \overline{A \times C} \wedge yt = \overline{B \times D}$

$xz = yt \Rightarrow \overline{A \times C} = \overline{B \times D}$ (Eşit güçlüdürler, yani aralarında 1:1 ve örten fonksiyonlar vardır. O halde bu fonksiyonu bulacak olursak;)

$f : A \times C \longrightarrow B \times D$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (f(x), g(y))$ (Bu fonksiyonu daha önceden tanımlamış ve 1:1 ve örten olduğunu göstermiştik.)

$xz = (\overline{A \times C} = \overline{B \times D}) = yt$

i- $(x = y) \wedge (z = t) \Rightarrow (xz = yt)$

ii- $x = y \Rightarrow xy = yz$

3- $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $(xy = yz \wedge y \neq 0) \Rightarrow x = z$

$x = \bar{A} \wedge y = \bar{B} \wedge z = \bar{C}$ $xy = yz \wedge y \neq 0 \Rightarrow B \neq \emptyset$

(Aksini farzedelim, $x \neq z$ olsun. $\bar{A} \neq \bar{C} \Rightarrow$ iki kümenin denklik sınıfı birbirine eşit değilse, 1:1 ve örten fonksiyon bulunmaz, çünkü eşit güçlü değildirler.)

$\bar{A} \neq \bar{C} \Rightarrow \exists C_1 \subseteq C$, $\bar{A} = \bar{C}$

Sonuç olarak, öyle bir f fonksiyonu vardır ki,

$f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C$

$xy = yz \Rightarrow \overline{A \times B} = \overline{B \times C} = \overline{C \times B}$

$f : A \times B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C_1 \times B$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (f(x), y)$

Sonuç olarak, $A \times B \sim C_1 \times B \Rightarrow A \times B \sim C \times B \wedge A \times B \sim C_1 \times B$

$\Rightarrow C \times B \sim A \times B \wedge A \times B \sim C_1 \times B$ (simetri öz.)

$\Rightarrow C \times B \sim C_1 \times B \wedge C_1 \times B \subseteq C \times B$ $C \times B$ kümesi bir özalt kümesine eşit güçlüdür. O halde $C \times B$ sonsuzdur. $\Rightarrow x = z$ bağıntısı vardır.

4 − $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $(xy=0) \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$

$(x\neq 0 \wedge y\neq 0) \Rightarrow \exists\, A,B \quad x=\overline{A}\ y=\overline{B} \wedge A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset$

olacak biçimde A ve B kümeleri vardır.

$\Rightarrow \exists u\in A \wedge \exists v\in B,\ (u,v)\in A\times B \Rightarrow A\times B\neq\emptyset$

O halde $A\times B\neq\emptyset \Rightarrow \overline{A\times B}=0 \Rightarrow xy\neq 0$

sonuç olarak, $x\neq 0$ ve $y\neq 0$ ise $xy\neq 0$ dır.

Bunun karşıt tersi $xy=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$ doğrudur.

Tanım: $x,y\in\mathbb{N}$ $x=\overline{A}$ ve $y=\overline{B}$ olmak üzere $A\subset B$ ise,

"x doğal sayısı, y doğal sayısından küçüktür" denir. Ve

$x<y$ şeklinde yazılır. x küçük y diye okunur. Eğer $A\subseteq B$ ise

x küçüktür veya eşittir denir ve $x\leq y$ yazılır.

$\underbrace{x<y\ ,\ y<x}_{\text{kuvvetli}}$ $\qquad \underbrace{x\leq y\ ,\ y\leq x}_{\text{zayıf}}$ (doğal sayılarda eşitsizliklerden)

Teorem: $x,y\in\mathbb{N}$ olmak üzere; $x<y$, $y<x$, $x=y$ önermelerinden ancak birisi doğrudur.

İspat// $x,y\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x=\overline{A} \wedge y=\overline{B} \Rightarrow A,B$ kümeleri için

$A\subset B$, $B\subset A$, $A=B$ önermelerinden ancak birisi doğrudur.

Teorem: $x,y\in\mathbb{N} \wedge x+y=0 \Rightarrow (x=0 \wedge y=0)$ olur.

İspat// $x,y\in\mathbb{N}$ ve $x+y=0$ olsun. $\Rightarrow x=\overline{A} \wedge y=\overline{B} \wedge x+y=0$

$\Rightarrow x+y=\overline{A\cup B} \wedge A\cap B=\emptyset$ dir.

$\Rightarrow x+y=\overline{A\cup B} \wedge A\cap B=\emptyset \wedge x+y=0 \Rightarrow \overline{A\cup B}=0 \Rightarrow A\cup B=\emptyset$

$\Rightarrow A=\emptyset \wedge B=\emptyset$ olmalıdır.

$\Rightarrow (x=\overline{A}=\emptyset=0 \wedge y=\overline{B}=\emptyset=0)$ olur.

Teorem: Bir x doğal sayısının y sayısından küçük olması için $(y\in\mathbb{N})$

gerek ve yeter şart, $x+k=y$ olacak şekilde bir tek $k\neq 0$

doğal sayısının var olmasıdır.

sonuç olarak, $x<y \Leftrightarrow x+k=y \wedge k\neq 0$ olmalıdır.

ispat// 1 ⇒ : $x, y \in \mathbb{N} \wedge x<y$ olduğunu varsayalım. Buna göre

$\Rightarrow x=\overline{A} \wedge y=\overline{B}$ olacak şekilde bir A ve B kümeleri vardır ki,

x ve y, A ile B nin denklik sınıflarına eşittir. Ayrıca $x<y$ olduğuna göre

$A \subset B$ dir. Buna göre öyle bir $\exists C \neq \emptyset$ vardır ki,

$A \cup C = B$ dir. (C kümesi $B \setminus A$ ile bulunur.)

$\Rightarrow A \cap C = \emptyset \wedge A \cup C = B$

Sonuç olarak, $\overline{A \cup C} = \overline{B} \Rightarrow x+k=y,\ k=\overline{C}$

Eğer $x<y$ ise en az bir k doğal sayısı vardır. k'nın tek olduğunu ispatlamak için aksini ispat edeceğiz.

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ gibi iki sayı varsa, bu taktirde ;

$x+k_1=y \wedge x+k_2=y$ olur $\Rightarrow x+k_1=x+k_2 \Rightarrow k_1=k_2$ dir.

2 ⇐ : $x+k=y \wedge k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \overset{?}{\Rightarrow} x<y$ (iddianın doğru olmadığını farzedelim.)

i- $y<x$ doğru olabilir. Veya

ii- $x=y$ doğru olabilir.

Önce kabul edelim ki, $y<x$ olsun.

i- $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ y+r=x$ (gerek şarttan dolayı)

$\wedge\ x+k=y \wedge k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (hipotezden)

(2. ifadedeki y değerini 1. ifadede yerine yazarsak)

$\Rightarrow (x+k)+r=x \Rightarrow x+(k+r)=x \Rightarrow k+r=0$ olur.

$\Rightarrow (k=0 \wedge r=0)$ dır. doğru değildir.

Bu bir çelişkidir. Öyleyse $x=y$ nin doğruluğuna bakalım.

ii- $x=y \Rightarrow x=x+k \wedge k\neq 0 \Rightarrow k=0$ olur. Bu da bir çelişkidir.

Doğru değildir. Daha önce söylediğimiz ifade de $x<y$, $x>y$, $x=y$ önermelerinden yalnız birisi doğru olacağına göre ve $y<x$, $x=y$ önermeleri yanlış olduğuna göre $x<y$ önermesi kesinlikle doğrudur. Yani,

$$x<y \Leftrightarrow x+k=y \wedge k\neq 0 \text{ dır.}$$

Teorem: $\forall x, y, z, w \in \mathbb{N}$ için,

1- $x<y \iff x+z<y+z$

2- $x<y \land z<w \Rightarrow x+z<y+w$

3- $x<y \land z \neq 0 \Rightarrow xz<yz$

4- $x<y \land z<w \Rightarrow xz<yw$

ispat// 1- $x<y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x+k=y \Rightarrow y+z=(x+k)+z$

$\Rightarrow (x+z)+k=y+z \land k\neq 0 \Rightarrow x+z<y+z$

4- $x<y \land z<w \Rightarrow (\exists k\neq 0,\ x+k=y) \land (\exists r\neq 0,\ z+r=w)$

$\Rightarrow (x+k)(z+r)=yw \Rightarrow xz+\underbrace{k(z+r)+(x+k)r}_{t}=yw$

$\Rightarrow xz+t=yw \land t\neq 0 \Rightarrow xz<yw$

Teorem: $\forall x,y \in \mathbb{N}$ için $(x<y \Rightarrow x+1 \leq y)$

ispat// $x<y \Rightarrow k\in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ y=x+k$

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{N},\ k=t+1 \land y=x+k$

$\Rightarrow y=x+(t+1) \Rightarrow y=(x+1)+t \land t\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ ($t=0$ olursa $y=x+1$) $\lor$ ($t\neq 0$ olursa $x+1<y$) $\Rightarrow x+1\leq y$ olur.

Teorem: 0 ile 1 doğal sayıları arasında hiçbir doğal sayı yoktur.

ispat// Bu önermenin doğruluk kümesi D olsun.

$D=\{x : x\in\mathbb{N} \land 0<x<1\}$

$=\{x : x\in\mathbb{N} \land 0<x \land x<1\}$ $\quad (x<y \Rightarrow x+1\leq y)$

$=\{x : x\in\mathbb{N} \land 1\leq x \land x<1\}$ bu önerme yanlıştır.

$D=\{x : x\in\emptyset\}=\emptyset$ Bu önermenin doğruluk kümesi $\emptyset$ dir.

Yani 0 ile 1 arasında doğal sayı yoktur.

- Tümevarım İlkesi -

$\mathbb{N}_a$ (Doğal sayıların bir alt kümesi olsun.)

Buradaki a bu kümenin en küçük elemanıdır.

1- $a\in\mathbb{N}_a$ 2- $\forall k\in\mathbb{N}_a \Rightarrow k+1\in\mathbb{N}_a$ $(k>a)$

Uygulaması: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P(n)$ önermesi veriliyor. Ve doğruluğunun ispatlanması isteniyor.

1- $n=a$ için $P(a)$ doğrudur. (ispat)

2- $\forall k \in \mathbb{N} \wedge k > a$ için $P(k)$ doğrudur. (kabul edisin)

3- $P(k+1)$'in doğruluğu. ($P(k)$'nın doğruluğundan yararlanılarak ispatlanıyor.)

Sonuç olarak;

$P(n)$ önermesi, a'dan büyük veya eşit her doğal sayı için doğrudur deniliyor.

Örnek// Sayma sayıları kümesi S olmak üzere,

$\forall n \in S$ için $1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ispatlayalım.

$n=1$ için, doğruluğunu ispatlamak için her iki tarafa n yerine 1 yazılır.

$1 \stackrel{?}{=} \frac{1.2}{2} \Rightarrow 1=1$ $n=1$ için önerme doğrudur.

$n=k$ için, önerme doğru olsun; yani;

$1+2+3+\dots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}$ olsun.

$n=k+1$ için,

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Sonuç olarak, $k+1$ için önerme doğrudur. O halde tümevarım ilkesine göre $\forall n \in S$ için $1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$ önermesi doğrudur.

Tanım: $x \in \mathbb{N}$ olsun.

a- $x \neq 0$ ise $x^0 = 1$

b- $x^1 = x$

c- $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \{1\}$ için $x^{n+1} = x^n . x$

d- x^n ye x'in n. kuvveti denir. ($n \in \mathbb{N}$)

(özel olarak; x^2: x kare, x^3: x küp diye okunur.)

Örnek// $2^3 = 2^2.2 = (2.2).2 = 8$

$2^0 = 1$, $0^1 = 0$, $0^5 = 0$, $0^0 =$ tanımsız.

Teorem : $x, y, m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

a- $x^m, x^n \in \mathbb{N}$ ise $x^m . x^n = x^{m+n}$ dir.

b- $x^n, (x^m)^n \in \mathbb{N}$ ise $(x^m)^n = x^{m.n}$ dir.

c- $(x.y)^n \in \mathbb{N}$, $(xy)^n = x^n . y^n$ dir.

d- $x \neq 0$ ve $m \geqslant n$ ise $x^m : x^n = x^{m-n}$ dir.

İspat // a- $x^m, x^n \in \mathbb{N}$ olsun. $(x=0 \Rightarrow m \neq 0 \wedge n \neq 0)$

$x=0$ ve $x \neq 0$ hallerini ayırt edelim

i- $x \neq 0$ olsun. $x^m . x^n = x^{m+n}$ önermesini doğrulayan n doğal sayılarının kümesi D olsun. Acaba $1 \in D$ midir?

Sol tarafta n yerine 1 yazarak ispatlarız.

$x^m . x^1 = x^m . x = x^{m+1}$

$n=1$ için önerme doğrudur. O halde $1 \in D$ dir.

$n=k$ için $k \in D$ olsun.

$x^m . x^{k+1} = x^m (x^k . x)$ (tanımdan)

$= (x^m . x^k) x$ (birleşme öz.)

$= x^{m+k} x$ (kabulden dolayı)

$= x^{(m+k)+1}$ (tanımdan)

$= x^{m+(k+1)}$ (birleşme öz.)

Sonuç olarak $x^m . x^{k+1} = x^{m+(k+1)} \Rightarrow k+1 \in D$ dir.

Tümevarım ilkesinden dolayı, $x^m . x^n = x^{m+n}$ dir.

Tanım : (Çıkarma) :

$a, b \in \mathbb{N}$ olsun. $x+a=b$ olacak şekilde bir x doğal sayısı varsa bu sayıya b ve a doğal sayılarının farkı denir. (b'den a'nın farkı denir.) Ve $x=b-a$ şeklinde yazılır. Farkı bulmak için yapılan işleme de, doğal sayılarda çıkarma işlemi denir.

Tanım : (Bölme) :

$a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $ax=b$ olacak şekilde bir x doğal sayısı varsa, bu sayıya b'nin a'ya bölümü denir. Bölümü bulmak için yapılan işleme de doğal sayılarda bölme işlemi denir.

$aX = b \Rightarrow X = b : a$ şeklinde gösterilir.

Eğer $aX = b$ ise bu duruma " a, b'yi böler " denir. Ve sembolik olarak a/b şeklinde yazılır. Sonuç olarak,

$$a/b \Longleftrightarrow a,b \in \mathbb{N}, \exists X \in \mathbb{N}, aX = b$$

Teorem: Doğal sayılar kümesinde $(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ bölünebilme bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. (İspatı yapılmayacaktır.)

Problemler:

1- $\sum_{i=1}^{n} (2i) = n(n+1)$ 2- $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$ 3- $\sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{1}{2} n(3n-1)$

4- $\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ 5- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

6- $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ 7- $\forall n \in S,\ 2^n > n$

8- $\forall n \in \mathbb{N},\ 3/n^3+2n$ 9- $\forall n \in \mathbb{N},\ 4/3^{2n}-1$

10- $n \geq 4, n \in \mathbb{N},\ n! > 2^n$ 11- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$

özdeşliklerinin doğru olduğunu ispatlayınız.

Çözümler:

1- $n=1$ için $\sum_{i=1}^{1} (2i) = 2.1 = 2 \qquad 1(1+1) = 2$ doğrudur.

$n=k$ için doğru olsun, yani ;

$\sum_{i=1}^{k} (2i) = k(k+1)$ olsun. $\quad n = k+1, \quad \sum_{i=1}^{k+1} (2i) \overset{?}{=} (k+1)(k+2)$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i) = 2.1 + 2.2 + 2.3 + \ldots + 2k + 2(k+1) = \sum_{i=1}^{k} (2i) + 2(k+1)$$

$$= k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

$(k+1)$ için önerme doğru olduğundan, tüm önerme doğru olur.

2- $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \overset{?}{=} n^2$

$n=1$ için $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = (2.1-1) = 1 \qquad 1^2 = 1 \qquad 1 \in D$

$n=k$ için doğru olsun.

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$$

$\Rightarrow (2.1-1)+(2.2-1)+(2.3-1)+\dots+(2k-1)=k^2$ olsun.

$\Rightarrow 1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ olduğunu kabul ediyoruz.

$n=k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)\overset{?}{=}(k+1)^2$ olduğunu ispatlayacağız.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\underbrace{(2.1-1)+(2.2-1)+(2.3-1)+\dots+(2k-1)}_{k^2}+\underbrace{2((k+1)-1)}_{2k+1}$$

$$=k^2+(2k+1)$$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2 \quad ,(k+1)\in D$$

Önermenin doğruluğu böylece ispatlanmış oldu.

3- $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)\overset{?}{=}\frac{1}{2}n(3n-1)$

$n=1$ için $\sum_{i=1}^{1}(3i-2)=(3.1-2)=1 \qquad \frac{1}{2}1(3.1-1)=\frac{1}{2}.2=1$ doğrudur.

$n=k$ için $\sum_{i=1}^{k}(3i-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$ doğru olsun.

$=(3.1-2)+(3.2-2)+\dots+(3k-2)+\frac{1}{2}k(3k-1)$ olsun.

$n=k+1$ için doğruluğuna bakalım,

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1)\overset{?}{=}\frac{1}{2}(k+1)[3(k+1)-1]$$

$$\overset{?}{=}\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2)=(3.1-2)+(3.2-2)+\dots+(3k-2)+[3(k+1)-2]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(3i-2)+3k+1$$

$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+3k+1$$

$$=\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k+3k+1$$

$$=\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+1$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2) \;/\!/ \quad k+1\in D$$

$$\begin{array}{r|l} 3k^2+5k+2 & k+1 \\ \mp 3k^2 \mp 3k & \overline{3k+2} \\ \hline 2k+2 & \\ \mp 2k \mp 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Önerme $k+1$ için doğru olduğundan, doğru bir önermedir.

4- $\forall n\in\mathbb{N}$, $3/n^3+2n$

$n=1$ için $1^3+2.1=3 \Rightarrow 3/3$ doğrudur.

$n=k$ için $3/k^3+2k$ doğru olsun.

$n=k+1$ için $3/(k+1)^3+2(k+1)$?

$$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+2k+2=\underbrace{(k^3+2k)}_{3q}+(3k^2+3k+3)$$

$$=3q+3k^2+3k+3=3(q+k^2+k+1) \quad , \quad q+k^2+k+1\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow 3/(k+1)^3+2(k+1) \quad k+1\in D \quad$ önerme doğrudur.

5- $n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}$, $n! > 2^n$ olduğunu ispatlayalım.

$n=4$ için, $4! = 4.3.2.1 = 24$ $\quad 2^4 = 16$ $\quad 4! > 2^4$ doğrudur.

$n=k$ için, $k! > 2^k$ doğru olsun.

$n=k+1$ için, $(k+1)! > 2^{k+1}$ olduğunu ispatlayalım.

$(k+1)! = k!(k+1) > 2^k(k+1)$ (kabulden dolayı)

$\Rightarrow 2^k(k+1) > 2^k.2$ ($k+1$ yerine ondan daha küçük olan 2 yazılarak.)

$\Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$ olur. Verilen önerme doğrudur.

6- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\sum_{i=1}^{n} i(i!) \overset{?}{=} (n+1)! - 1$

$n=1$ için, $\sum_{i=1}^{1} i(i!) = 1(1!) = 1$ $\quad (1+1)! - 1 = 1$ $\quad 1 \in D$

$n=k$ için, $\sum_{i=1}^{k} i(i!) = (k+1)! - 1$ doğru olsun.

$n=k+1$ için, $\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) = 1(1!) + 2(2!) + \ldots + k(k!) + (k+1)(k+1)!$

$$= \sum_{i=1}^{k} i(i!) + (k+1)(k+1)!$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$$

$$= (k+1)!\,(1+k+1) - 1$$

$$= (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 \qquad k+1 \in D \ //$$

Doğal Sayıların Çeşitli Tabanlara Göre Yazılışı

Teorem: $X \neq 0$ olmak üzere, $X \in \mathbb{N}$ sayısı ve $a > 1$ olmak üzere bir a doğal sayısı verilsin. $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere $i \neq n$ için $0 \leq X_i < a$ ve $i = n$ için $0 < X_i < a$ olan $n+1$ tane $X_0, X_1, \ldots, X_n$ doğal sayıları vardır. Bu doğal sayılar yardımıyla bir X doğal sayısı tek türlü olarak;

$$X = X_0 + X_1 a + X_2 a^2 + \ldots + X_n a^n$$ şeklinde yazılır.

İspat// Varlığın ispatı;

Bu şekilde yazılabilen X doğal sayılarının kümesi D olsun.

$a^0 = 1 \Rightarrow 1.a^0 = 1$ $\quad X_n a^n = 1$ $\quad n = 0 \Rightarrow 1 \in D$

$2, 3, \ldots, X \in D$ olsun. $\Rightarrow X+1 \overset{?}{\in} D$

$1 < a,\ a < a^2,\ a^2 < a^3, \ldots, a^n < a^{n+1}$

$\Rightarrow a^n < X+1 < a^{n+1}$ $\quad X+1$ sayısını a^n e bölelim.

(Tanımdan sonra devam edecek.)

Tanım : (Kalanlı Bölme) :

a ve b doğal sayıları verildiğinde , $a = bq + r \wedge 0 \leq r < b$ olacak şekilde q ve r doğal sayılarını bulma işlemine, a 'nın b'ye kalanlı olarak bölümü denir. Bu işleme de doğal sayılarda kalanlı bölme denir.

Örnek //
$5,25 \Rightarrow 25 = 5.5 + 0$

$17,9 \Rightarrow 17 = 9.1 + 8 \quad , \quad 0 < 8 < 9$

$9,17 \Rightarrow 9 = 17.0 + 9 \quad , \quad 0 < 9 < 17$

İspatın devamı ; $\Rightarrow x+1 = a^n q + r$ olacak şekilde q ve $r \in \mathbb{N}$ vardır.

$\wedge\ 0 \leq r < a^n \Rightarrow r < x+1$ dir. (sonuç)

$\Rightarrow x+1-r > 0 \Rightarrow a^n q > 0 \Rightarrow q = x_n \Rightarrow a^n q = x_n a^n$

biçiminde ifade edebiliriz.

$\Rightarrow x+1 = x_n a^n + r \wedge r < x+1 \Rightarrow r \in D$

$\Rightarrow r = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k$ olarak yazılabilir.

$\Rightarrow x+1 = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k + x_n a^n$

$x+1 = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k + \underbrace{0 a^{k+1} + 0 a^{k+2} + \dots + x_{n-1} a^{n-1}}_{0} + x_n a^n$

$\Rightarrow x+1 = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n \Rightarrow x+1 \in D$ olur.

Tekliğin İspatı ;

Aksini farzederek,

$x = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$

$y = y_0 + y_1 a + y_2 a^2 + \dots + y_n a^n$ iki şekilde yazılsın.

$\Rightarrow x = x_0 + a(\underbrace{x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1}}_{q_1}) \wedge y = y_0 + a(\underbrace{y_1 + y_2 a + \dots + y_n a^{n-1}}_{q_2})$

$\Rightarrow x = x_0 + a q_1 \wedge y = y_0 + a q_2 \Rightarrow x_0 = y_0 \Rightarrow q_1 = q_2 = q$

$\Rightarrow q = x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1} \wedge q = y_1 + y_2 a + \dots + y_n a^{n-1}$

$\Rightarrow q = x_1 + a(x_2 + \dots + x_n a^{n-2}) \wedge q = y_1 + a(y_2 + \dots + y_n a^{n-2})$

$\Rightarrow x_1 = y_1 , x_2 = y_2 , \dots , x_n = y_n$ elde edilir.

Tanım: $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ olsun. $i \neq n$ için $0 \leq x_i < a$ ve $i=n$ için $0 < x_i < a$ olmak üzere sıfırdan farklı X doğal sayısının,

$x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$ şeklinde yazılmasına "a tabanına göre açılımı" denir. $(x_n x_{n-1} \dots x_2 . x_1 . x_0)_a$ şeklinde yazılır.

Sonuç olarak;

$$X = (x_n x_{n-1} \dots x_3 . x_2 . x_1 . x_0)_a = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n \text{ yazılır.}$$

Örnek// $a=2$ ise sembolleri 0,1 dir.

$a=10$ ise 0,1,2,...,8,9 sembolleri kullanılır.

$a=12$ ise 0,1,2,...,8,9,ω,ν sembolleri kullanılır.

Not: X doğal sayısını a tabanına göre yazarken, burada kullanılan sayılar $x_n, x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0$ doğal sayılarına özel semboller bulunmalıdır.

Bir X sayısını a tabanına göre yazdığımızı farzedelim.

$$X = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = (x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0)_a$$

$$X = x_0 + a(\underbrace{x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1}}_{q}) \quad (q : \text{bölümdür.})$$

$$X = x_0 + aq \quad (x_0 : X\text{'in } a\text{'ya bölümünden elde edilen I. kalandır.})$$

$$q = x_1 + x_2 a + x_3 a^2 + \dots + x_n a^{n-1} \Rightarrow q = x_1 + a(\underbrace{x_2 + x_3 a + \dots + x_n a^{n-2}}_{q_1})$$

$$\Rightarrow q = x_1 + a q_1 \quad (x_1 : q \text{ nun } a \text{ ya bölümündeki II. kalandır.})$$

$$\Rightarrow q_1 = x_2 + x_3 a + \dots + x_n a^{n-2} = x_2 + a(x_3 + \dots + x_n a^{n-3})$$

x_2 : III. kalan x_3 : IV. kalan

Örnek// 97 sayısını 5 tabanında yazınız.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 5 \\ -5 & 19 \,|\, 5 \\ 47 & -15 \,|\, 3 \\ -45 & \;\;4 \\ 2 & \end{array}$$

$97 = (342)_5$

Örnek// 12 sayısını 12 tabanına göre yazınız.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 12 \\ -12 & 1 \,|\, 12 \\ 0 & -0 \,|\, 0 \\ & \;1 \end{array}$$

$12 = (10)_{12}$

Örnek // 3000 sayısını 12 tabanında yazınız.

$$\begin{array}{r|l} 3000 & 12 \\ -24 & 250 \mid 12 \\ 60 & -24 \mid 20 \mid 12 \\ -60 & (10)\ -12 \mid 1 \mid 12 \\ (0) & (8)\ -0 \mid 0 \\ & (1) \end{array}$$

$10 = \cup$ dersek

$3000 = (18\cup0)_{12}$

Çeşitli Sayı Tabanlarına Göre İşlemler

Örnek // $(342)_5$ sayısını 10 tabanında yazınız.

$3.5^2 + 4.5 + 2.5^0 = 75 + 20 + 2 = 97$

$(342)_5 = 97$

Toplama İşlemi =

$(231)_8 + (64)_8 = (315)_8$

Çıkarma İşlemi =

$(4172) - (277) = 3673)_8$

Çarpma İşlemi =

$$\begin{array}{r} (2032)_4 \\ \times\ (312)_4 \\ \hline 10130 \\ 2032 \\ +\,12222 \\ \hline 1313310 \end{array}$$

$(1313310)_4$

Bölme İşlemi =

$$\begin{array}{l|l} (21220111)_3 & (10212)_3 \\ -21201 & (2001)_3 \\ 00012111 & \\ -10212 & \\ 0(1122)_3 & \end{array}$$

Karekök Alma :

$$\begin{array}{r|l} & 15 \\ \sqrt{225} & 1\times2 \rightarrow 25 \\ -1 & \quad \times\ 5 \\ 125 & \quad 125 \\ -125 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 135 \\ \sqrt{(24041)_6} & (1)_6 \times (2)_6 \rightarrow (23)_6 \\ -1 & \quad \times\ (3)_6 \\ (140)_6 & \quad (113)_6 \\ -(113)_6 & \\ \hline 02341 & (13)_6 \times (2)_6 \rightarrow (305)_6 \\ -2341 & \quad \times\ (5)_6 \\ 0 & \quad (2341)_6 \end{array}$$

10 tabanına çevirmeden bir sayıyı başka bir tabana göre yazma :

Örnek // $(3420)_6$ 7 tabanında yazınız.

Önce 10 tabanında verilen 7 sayısını 6 tabanında yazarız.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 6 \\ \hline -6 & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \hline -0 & 0 \\ 1 & \end{array} \qquad 7=(11)_6$$

$$\begin{array}{r|l} (3420)_6 & (11)_6 \\ \hline -33 & (310)_6 \\ 12 & \\ -11 & \\ X_0=(10)_6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (310)_6 & (11)_6 \\ \hline -22 & (24)_6 \\ (50)_6 & \\ -(44)_6 & \\ X_1=(2)_6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (24)_6 & (11)_6 \\ \hline -(22)_6 & (2)_6 \\ X_2=(2)_6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (2)_6 & (11)_6 \\ \hline -(0)_6 & (0)_6 \\ X_3=(2)_6 & \end{array}$$

$$(3420)_6 = \left[(2)_6 (2)_6 (2)_6 (10)_6 \right]_{(11)_6} = (2226)_7$$

Problemler :

1- $(3467)_8$, 7 tabanında yazınız.

$(6u12)_{12}$, 11 " " .

$(100101001)_2$, 10 " " .

2- Çeşitli tabanlara göre verilen aşağıdaki işlemleri yapın.

$(10232)_4 + (3133)_4 = ?$

$(6716)_8 - (717)_8 = ?$

$(7804)_{12} + (uv29)_{12} + (v00u)_{12} = ?$

$(23141)_5 - (11123)_5 = ?$

$(78216)_9 \cdot (348)_9$

$(9uv)_{12} \cdot (u6)_{12} = ?$

3- 10 tabanına göre yazmadan $(24341)_5$ sayısının $(131)_5$ sayısına bölümündeki kalan nedir?

4- $(151) = (227)_t \Rightarrow t = ?$

5- $\sqrt{(21301)_4}$, $\sqrt{(562)_7} = ?$

6- $\{[(1000110)_2 + (10001)_2] - [(101)_2 \cdot 11]\} : (1001)_2 = ?$

7- $a = n^2+1 \Rightarrow n^2+2$, n^2+2n , $(n^2+2)^2$ sayılarını a tabanına göre yazınız?

8- $(xy)_{10} + (18)_{10} = (yx)_{10}$ ve $(xy)_{10} = (yx)_7$ ise $(xy)_{10} = ?$

9- $t > 2 \Rightarrow (121)_t$ sayısı bir tamkare midir?

10- $(x_1x_2x_3x_3x_2x_1)_a$ sayısının $a+1$ ile bölündüğünü gösteriniz.

11- $(abcabc)_{10}$ sayısının $(1001)_{10}$ sayısına bölündüğünü gösteriniz.

Çözümler :

1- • $(\overset{3}{3}\overset{2}{4}\overset{1}{6}\overset{0}{7})_8 = 8^0 \cdot 7 + 8^1 \cdot 6 + 8^2 \cdot 4 + 8^3 \cdot 3 = (1847)_{10}$

$$
\begin{array}{l|l}
1847 & 7 \\
\underline{-14} & 263 \mid 7 \\
\;\;44 \quad -21 & \;\;37 \mid 7 \\
\underline{-42} \quad\; 53 \quad \underline{-35} & \;\;5 \mid 7 \\
\;\;27 \quad \underline{-49} \quad 2 & \underline{-0} \mid 0 \\
\underline{-21} \quad\;\; 4 & \;\;5 \\
\;\;\;6 &
\end{array}
$$

$(5246)_7 = (3467)_8$ //

• $(6U12)_{12} \div (V)_{12}$:

$$
\begin{array}{l|l}
(6U12)_{12} & (V)_{12} \\
\underline{-(65)_{12}} & 756 \\
(51)_{12} & \\
\underline{-(47)_{12}} & \\
(62)_{12} & \\
\underline{-(56)_{12}} & \\
x_0 = (8)_{12} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
(756)_{12} & (V)_{12} \\
\underline{-(74)_{12}} & (81)_{12} \\
(16)_{12} & \\
\underline{-(V)_{12}} & \\
x_1 = (7)_{12} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
(81)_{12} & (V)_{12} \\
\underline{-(74)_{12}} & (8)_{12} \\
x_2 = (9)_{12} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
(8)_{12} & (V)_{12} \\
\underline{0} & 0 \\
x_3 = (8)_{12} &
\end{array}
$$

$(6U12)_{12} = [(8)_{12}(9)_{12}(7)_{12}(8)_{12}](11)_{12} = (8978)_{11}$

• $(\overset{8}{1}\overset{7}{0}\overset{6}{0}\overset{5}{1}\overset{4}{0}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1})_2 = 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^5 \cdot 1 + 2^6 \cdot 0 + 2^7 \cdot 0 + 2^8 \cdot 1$

$= (297)_{10}$

2-

$$
\begin{array}{r}
(10232)_4 \\
+\;(3133)_4 \\
\hline
(20031)_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(7804)_{12} \\
(UV29)_{12} \\
+\;(V00U)_{12} \\
\hline
(2573V)_{12}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(6716)_8 \\
-\;(717)_8 \\
\hline
(5777)_8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(78216)_9 \\
\times\;(348)_9 \\
\hline
(702843)_9 \\
(365866)_9 \\
+\;(256650)_9 \\
\hline
(131237613)_9
\end{array}
$$

3-

$$
\begin{array}{l|l}
(24341)_5 & (131)_5 \\
\underline{-(131)_5} & (140)_5 \\
(1124)_5 & \\
\underline{-(1124)_5} & \\
0(1)_5 &
\end{array}
$$

Kalan : $(1)_5$

4- $(151)_{10} = (\overset{2}{2}\overset{1}{2}\overset{0}{7})_t \Rightarrow 7t^0 + 2t^1 + 2t^2 \Rightarrow 7 + 2t + 2t^2 = 151$

$\Rightarrow 2t^2 + 2t = 144$

$\Rightarrow t^2 + t = 72$

$\Rightarrow t(t+1) = 72$

$\Rightarrow t = 8$ //

5- $\sqrt{(21301)_4}$ | $(121)_4$

$-(1)_4$ | $(1)_4 \times (2)_4 \longrightarrow (22)_4$ → (sürekli 2 ile çarpılır.)

$(113)_4$ | $\times (2)_4$

$-(110)_4$ | $(110)_4$

$(301)_4$ | $(12)_4 \times (2)_4 \longrightarrow (301)_4$

$-(301)_4$ | $\times (1)_4$

0 | $(301)_4$

$$\sqrt{(21304)_4} = (121)_4$$

$\sqrt{(562)_7}$ | $(23)_7$

$-(4)_7$ | $(2)_7 \times (2)_7 \longrightarrow (43)_7$

$(162)_7$ | $\times (3)_7$

$-(162)_7$ | $(162)_7$

0

$$\sqrt{(562)_7} = (23)_7$$

7- $a = n^2+1$

$$\begin{array}{r|l} n^2+2 & n^2+1 \\ \mp n^2 \mp 1 & 1 \\ \hline X_0 = 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & n^2+1 \\ 0 & 0 \\ \hline X_1 = 1 & \end{array} \qquad (n^2+2)_{10} = (11)_a$$

9- $t > 2$ $\quad (\overset{2}{1}\overset{1}{2}\overset{0}{1})_t = t^0.1 + t^1.2 + t^2.1 = 1+2t+t^2 = (t+1)^2$ tamkaredir.

10- $(\overset{5}{x_1}\overset{4}{x_2}\overset{3}{x_3}\overset{2}{x_3}\overset{1}{x_2}\overset{0}{x_1})_a = x_1 a^0 + x_2 a + x_3 a^2 + x_3 a^3 + x_2 a^4 + x_1 a^5$

$$= x_1 + x_2 a + x_3 a^2 + x_3 a^3 + x_2 a^4 + x_1 a^5$$

$$= x_1(1+a^5) + x_2 a(1+a^3) + x_3 a^2 (1+a)$$

$$= x_1(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1) + x_2 a(a+1)(a^2-a+1) + x_3 a^2 (1+a)$$

$$=(a+1)\left[x_1(a^4-a^3+a^2-a+1) + x_2 a(a^2-a+1) + x_3 a^2\right]$$

$$= a+1 / (x_1 x_2 x_3 x_3 x_2 x_1)$$

Devamı (s: 109) da ...

(s: 118 'den devam:)

Tamsayılar Kümesinde Bölme :

Tanım: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ olsun. $b = aX$ olacak biçimde bir X tamsayısı varsa a'ya b'nin bir çarpanı (veya, b'ye a'nın bir katı), X sayısına; b'nin a'ya bölümü denir. Ve $X = b : a$ yazılır.

a sayısı, b nin bir çarpanı ise b sayısı a sayısına bölünebiliyor denir ve a/b olarak yazılarak anlatılır. "a böler b" diye okunur.

Uyarı // Tamsayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir. Neden ?

Tanım: $a,b \in Z$ olsun. x ve y herhangi tamsayılar olduğuna göre $ax+by$ tamsayısına a ve b tamsayılarının bir lineer toplamı denir.

1. Teorem: $a,b,c,x,y \in Z$ olsun.

$$(a/b \wedge a/c) \Rightarrow a/(bx+cy)$$

ispat// $(a/b \wedge a/c) \Rightarrow \exists k,t \in Z, (b=ak, c=at)$

$$\Rightarrow bx+cy = (ak)x+(at)y$$
$$\Rightarrow bx+cy = a(kx+ty)$$
$$\Rightarrow a/kx+ty \Rightarrow a/bx+cy$$

2. Teorem: $a,b \in Z$ olsun.

$$(a/b \wedge b/a) \Rightarrow (b=a \vee b=-a)$$

ispat// $(a/b \wedge b/a) \Rightarrow \exists k,t \in Z,\ b=ak$ ve $c=bt$

$$\Rightarrow ab=abkt$$
$$\Rightarrow 1=kt \Rightarrow k=t=1 \vee k=t=-1$$

Öte yandan $(b=ak$ ve $k=1) \Rightarrow b=a$

$(a=bt$ ve $t=-1) \Rightarrow b=-a$

3. Teorem: $\forall x,y,z \in Z,\ (x/y \wedge y/z) \Rightarrow x/z$

ispat// $(x/y \wedge y/z) \Rightarrow \exists k,t \in Z,\ y=kx$ ve $z=ty$

$$\Rightarrow \exists k,t \in Z,\ z=t(kx)=(kt)x$$
$$\Rightarrow x/z$$

Uyarı// Z'de yukarıda tanımlanmış olan "/" bölme bağıntısı, denklik bağıntısı olmadığı gibi sıralama bağıntısı da değildir.

Tamsayılar Kümesinde Kalanlı Bölme :

Tanım: $a,b \in Z$ ve $b \neq 0$ olsun. a'yı b'ye kalanlı olarak bölmek demek, $a=bq+r$ ve $0 \leq r < |b|$ olacak biçimde bir q tamsayısı ile bir r doğal sayısını bulmak demektir. Bu durumda a'ya bölünen, b'ye bölen q'ya bölüm, r'ye kalan denir.

Örnek// $25 = 6.\underline{4}+\underline{1}$ ve $0<1<6$ olduğundan, 25 sayısının 6'ya bölümünde bölüm 4, kalan 1'dir.

Örnek// $14 = (-4)(\underline{-3}) + \underline{2}$ ve $0<2<|-4|$ olduğundan, 14 sayısının -4 ile bölümünde, bölüm -3, kalan 2 dir.

(Devamı s: 119'da...)