sonuç olarak simpson yöntemi en gerçeğe yakın sonuç verir.

Ödev -

1- $\int_0^{\pi} \ln(5-4\cos x)\,dx$, $n=4$, simpson.

2- $\int_0^{1} e^{x^2}\,dx$, $n=6$, simpson.

4. Enterpolasyon Yardımı ile İntegral:

Bir çok problemde $f(x)$ fonksiyonu yerine integrali kolay hesaplanabilen enterpolasyon polinomu kullanılır.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları ve karşılık gelen değerler $y_0, y_1, \ldots, y_n$ olmak üzere $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$ noktalarından geçen ve verilen $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşan enterpolasyon polinomu $p(x)$ olsun.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p(x)\,dx$$

olur.

9. BÖLÜM

ADİ TÜREVLİ DİF. DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Adi türevli pek çok dif. denklemin analitik çözüm yöntemi olmasına karşılık birçoğunun da bilinen yöntemler yardımıyla çözümü mümkün değildir. Değişkenlerine ayrılabilir. Hepten olsa bile bazı dif. denklemlerde elemonter yöntemler yardımıyla integral hesabı yapmak zordur. Bu nedenle analitik çözümlere yakın sonuçlar veren birçok sayısal yöntem ortaya konmuştur.

Bu bölümde

$$y' = f(x,y) \quad , \; y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin sayısal çözümleri incelenecektir.

1. Euler Yöntemi

x_0 verilen başlangıç koşulu olmak üzere, h adım uzunluğu ise

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_1 + h$$
$$\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} + h$$

ile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktaları belirlenir.

$$y' = f(x,y)$$

diferansiyel denkleminin her iki yanının (x_0, x_1) aralığında integralini alalım:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \quad , \; y' = \frac{dy}{dx} \text{ tir.}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dy}{dx} \cdot dx = y \Big|_{x_0}^{x_1} = y(x_1) - y(x_0) = y_1 - y_0.$$

olduğundan

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx.$$

elde edilir.

(x_0, x_1) aralığında $f(x,y)$ fonksiyonu yavaş değişen bir fonksiyon ise veya (x_0, x_1) aralığını çok küçülterek

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_1} f(x_0,y_0)\,dx$$

alınabilir. O halde

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0,y_0)\,dx$$

$$= y_0 + f(x_0,y_0)\int_{x_0}^{x_1} dx$$

$$= y_0 + f(x_0,x_0)\cdot h$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = y_0 + h\, f(x_0,y_0)}$$ elde edilir.

Diğer alt aralıklar için benzer işlemler uygulanarak dif. denklemi $x_2, x_3, \ldots, x_n$ noktalarındaki çözümünün değerleri

$$y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1,y_1)$$

$$- - -$$

$$y_n = y_{n-1} + h\cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

elde edilir.

Örnek. $y' = -\dfrac{y}{1+x}$, $y(0)=1$

başlangıç değer probleminin çözümünde $h=0.2$ alarak y_2 değerini hesaplayınız. $(y_2 = y(x_2))$

Çözüm:

$$y' = -\frac{y}{1+x} = f(x,y) \quad , \quad y(0) = 1.$$

$$y_1 = y_0 + h.f(x_0,y_0) = 1 + 0.2\left(-\frac{y_0}{1+x_0}\right) = 0.8$$

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0+h) = y(0.2) = 0.8.$$

$$y_2 = y_1 + h.f(x_1,y_1) = 0.8 + 0.2\left(-\frac{y_1}{1+x_1}\right) = 0.67$$

Gerçek çözüm:

$$y' = -\frac{y}{1+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x}$$

$$\Rightarrow \ln y = -\ln(1+x) + \ln c$$

$$\Rightarrow y = \frac{c}{1+x} \quad , \quad y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{1+x}}$$ başlangıç değer prob. çözü

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$ $(h = 0.2)$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.4) = \frac{1}{1+0.4} = 0.71$$

Örnek: $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$ olmak üzere $h = 0{,}1$ alarak $y_2 = ?$ $(y_1 = 1.5,\ y_2 = 2.19)$

2. Heun Yöntemi

Düzeltilmiş Euler yöntemi olarak da bilinir. Euler yönteminde (x_0, x_1) aralığında $f(x,y)$ yerine integralde $f(x_0,y_0)$ alınmıştı. Eğer bu değerin yerine $f(x_0,y_0)$ ve $f(x_1,y_1)$ değerlerinin aritmetik ortalaması alınırsa daha hassas sonuçlar elde edilir. Fakat bunu uygulamak için x_1 ve y_1 değerlerinin önceden biliniyor olması gerekir. Bu nedenle y_1 değeri önce Euler yöntemi ile bulunur. Bu değer kullanılarak Heun yönteminin ilk iterasyonu elde edilir:

$$y_1^{(1)} = y_1 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1)}{2}\, dx$$

$$= y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1)\right)$$

elde edilir. Burada y_1 Euler yönteminden bulunan ilk çözümdür. İkinci yaklaşık nokta için Euler yönteminden y_2 bulunur. Bunu kullanarak

Eulerdeki değil, Heundeki

$$y_2^{(2)} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)\right)$$ yaklaşık ~~olabilir~~ alınır

elde edilir. Diğer $y_3^{(3)}, \ldots$ çözümleri benzer şekilde bulunur.

Örnek: $y' = 2x + y$; $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminde $h = 0.2$ alarak $y(0.2)$ ve $y(0.4)$ çözümlerini bulunuz. (Heun yönt. ile.)

Çözüm: $f(x,y) = 2x + y$, $y(0) = 1$ ($0 \to x_0$, $1 \to y_0$)

$h = 0.2 \Rightarrow x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4$

Euler yönteminden

$$y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$$

$$= 1 + 0{,}2.(2x_0 + y_0)$$

$$= 1{,}2.$$

Heun yöntemiyle.

$$y_1^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}.\left(f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1)\right)$$

$$= 1{,}2 + 0{,}2.\left(\frac{2x_0 + y_0 + 2x_1 + y_1}{2}\right)$$

$$= 1{,}26$$

2. iterasyon

Euler ile.

$$y_2 = y_1 + h.\ f(x_1, y_1)$$

$$= 1{,}26 + 0{,}2.\ (2x_1 + y_1^{(1)})$$

Buna 1.2 de olabilirdi. Ama en son bulunan daha yaklaşık olduğundan böyle yazdık

$$= 1{,}592.$$

Heun yöntemiyle;

$$y_2^{(2)} = y_2 + h\left(\frac{f(x_1,y_1^{1}) + f(x_2,y_2)}{2}\right)$$

$$= 1{,}592 + 0{,}2.\left(\frac{2x_1 + y_1^{(1)} + 2x_2 + y_2}{2}\right)$$

$$= 1{,}665$$

Örnek. $y' = 1 + 3y$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}05$ alarak

$y(0{,}1)$ çözümünü bulunuz.

Çözüm; $f(x,y) = 1 + 3y$, $y(\underset{x_0}{0}) = \underset{y_0}{1}$

X_2

Y_4

X

$x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}1$

Euler den $y_1 = 1.2 \Rightarrow y_1^{(1)} = 1.215$ bulonur.

$y_2 = 1.447 \Rightarrow y_2^{(2)} = 1.465$ elde edilir.

3. Taylor Seri Yöntemi

Bilindiği gibi eğer x_0 noktası $y(x)$ fonksiyonunun bir tekil noktası değilse x_0 noktası komşuluğunda $y(x)$-in Taylor seri açılımı:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

idi. Burada $y(x)$ fonksiyonu $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin çözümüdür. Bu seri açılımında ilk terim:

$$y(x_0) = y_0$$

başlangıç koşulundan bilinmektedir.

2. terimdeki $y'(x_0)$ değeri diferansiyel denklemde $f(x,y)$ de x ve y yerine x_0, y_0 koyarak bulunan değerdir. Yani

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) \text{ dır.}$$

$y' = f(x,y)$ nin her iki yanının x-e göre türevi alınırsa ve bulunan ifade de x yerine x_0, y yerine y_0 yazılarak $y''(x_0)$ değeri bulunur. Bu da seri açılımındaki toplamdaki üçüncü terimin katsayısıdır. $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$, ... terimleri de ardışık türev alarak ve alınan türevlerde x yerine x_0, y yerine y_0 koyarak bulunabilir. Sonuç olarak başlangıç değer probleminin çözüm fonksiyonu olan $y(x)$-in seri açılımı bulunmuş olur. Yöntemi uygulayabilmek için $f(x,y)$ fonksiyonunun istenilen mertebeye kadar türevlerinin olması ve x_0, y_0 değerleri için tanımlı olması gerekir.

Örnek: $y' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$. başlangıç değer problemin yaklaşık çözümü nedir?

Çözüm: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\underset{x_0}{y(-1)} = \underset{y_0}{2}$

$y(x)$ çözüm olmak üzere:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

dir.

$y(x_0) = y_0 \rightarrow$ Başlangıç koşulundan $y(x_0) = 2$ dir.

$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ dif. denk.den. $y'(x_0) = x_0^2 + y_0^2 =$

$y' = x^2 + y^2 \Rightarrow$ x-e göre türev alalım.

$$y'' = 2x + 2y.y'$$

$$y''(x_0) = 2x_0 + 2y_0.y'(x_0)$$

$$= 2.(-1) + 2.2(5)$$

$$= \underline{\underline{18}}$$

$$y''' = 2 + 2y'.y' + y''.2y$$

$$y'''(x_0) = 2 + 2(y'(x_0))^2 + y''(x_0).2.y(x_0)$$

$$= 2 + 2.5^2 + 18.2.2$$

$$= \underline{\underline{124}}$$

Çözüm:

$$y(x) = 2 + 5(x+1) \cdot \frac{18}{2!}(x+1)^2 + \frac{124}{3!}(x\cdot$$

$+ \dots$

SEVAL KARACAN

26 Mart
Cuma

4. Picard Yöntemi

Ardışık yerine koyma yöntemi olarak da bilinen bu yöntemde her adım sonunda bir yaklaş elde edilir. Böylece $y_1, y_2, \dots y_n$ şeklinde bir fon dizisi bulunur. Bu fonk. dizisi diferansiyel denklemin çözümü olan $y(x)$'e yakınsar.

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Kabul ede ki: $f(x,y)$ fonksiyonu x,y koor. düzleminde başlangıç noktasını içine alan bir B bölgesinde tek değ ve üstten sınırlı olsun. Bu durumda verilen denkle

$y' = f(x,y)$ nin

integrali alınırsa

$$\int_{y_0}^{y} y' \cdot dx = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \quad , \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \Rightarrow$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \quad \text{elde edilir.}$$

Bu formül kullanılarak Picard yöntemi aşağıdaki gibi düzenlenir

$$y(x_0) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx$$

bulunur. $y_n(x) \to y(x)$ dur.

Örnek: $y' + y = x^2$; $y(0)=1$ Picard yöntemi ile yaklaşık çözümü bulunuz.

Çözüm: $y' = x^2 - y$, $f(x,y) = x^2 - y$, $\underset{x_0}{y(0)} = \underset{y_0}{1}$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx$$

$$= 1 + \int_0^x f(x,1)\,dx = 1 + \int_0^x (x^2 - 1)\,dx$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - x$$

$$= 1 - x + \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left[x^2 - 1 + x - \frac{x^3}{3}\right] dx$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(x^2 - 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) dx$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}$$ elde edilir.

$y_3 \cong y(x)$ tir.

Gerçek Çözüm

$y = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$ dir. e^{-x} seriye açılırsa;

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \underbrace{\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}}\ ---$$

karşılaştırırsak aynı sonuç bulu

Çözümün seri açılımıdır.

$y_3(x) \cong y(x)$ dir. İşlemlere devam edilirse,

$y_n(x) \to y(x)$ olduğu görülür.

Örnek: $y' = x - y$, $y(0) = -2$, Picard yöntemi ile

Çöz: $f(x,y) = x - y$ $x_0 = 0$ $y_0 = -2$.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

$$= -2 + \int_0^x (x+2)\, dx = -2 + \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$= -2 + 2x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx$$

$$= -2 + \int_0^x \left(x + 2 - 2x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= -2 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

elde edilir. $y_2(x) \cong y(x)$ tir.

Ödev: $y' - 2xy = 0$ $y(0) = 1$, $y_3(x) = ?$ (Picard ile)

10. BÖLÜM

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

n bilinmeyenli n denklemden oluşan aşağıdaki lineer denk. sis. ele alalım.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\cdots \cdots \qquad (1)$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Bu denklem sis. den 1. denk. den x_1, 2. denk. den x_2, ——, n. denk. den x_n çekilerek aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n\right) \\ &\cdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(1) ile gösterilen denklem sis. nin yaklaşık çözümünü 2 yoldan yapabiliriz.

1. Jacobi Yöntemi (Basit İterasyon Yöntemi)

Bu yönteme başlamak için bir başlangıç çözüm vektörü alınır. Bu vektör $X^{(0)}$ olsun. Bu $X^{(0)}$ vektörünü (2) denklemlerinde eşitliklerin sağ yanında x_i-lerin yerine yazarak ilk yaklaşık çözüm $X^{(1)}$ elde edilir. $X^{(1)}$ aynı şekilde kullanılarak $X^{(2)}$ çözüm vektörü bulunur. İşlemlere bu şekilde devam edilerek $X^{(3)}, X^{(4)}$, --- yaklaşık çözümleri elde edilir. Bu yolla bulunan yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme yaklaşması için yakınsama koşulları denilen

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

koşullarının sağlanması gerekir. Ancak bu koşullar yakınsama için yeterli koşullardır. Gerekli değildir.

Yani bu koşullar sağlanırsa yaklaşık çözümler gerçek çözüme mutlaka yaklaşır. Sağlanmazsa yaklaşmayabilir. Sağlanmadığı durumda çözüme yaklaşan örnekler mevcuttur.

Örnek:

$$11x + 2y - z + t = 16$$
$$2x - 13y + z - 2t = -25$$
$$x - y + 9z + t = -10$$
$$3x - 2y - 2z + 15t = 1$$

denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulunuz. $X_0^T = [0, 0, 0, 0]$ başlangıç çözüm vektörünü kullanınız.

Çözüm: Başlangıç çözümü $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$ d

Denklem sisteminden 1. den x'i, 2. den y'yi, 3. den z yi 4. den t yi çekelim.

$$x = \frac{1}{11}(16 - 2y + z - t)$$

$$y = \frac{1}{+13}(25 + 2x + z - 2t)$$

$$z = \frac{1}{9}(-10 - x + y - t)$$

$$t = \frac{1}{15}(1 - 3x + 2y + 2z)$$

1. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{11}(16 - 2y_0 + z_0 - t_0) = \frac{16}{11} = 1,4545$$

$$y_1 = \frac{1}{13}(25 + 2x_0 + z_0 - 2t_0) = \frac{25}{13} = 1,9231$$

$$z_1 = \frac{1}{9}(-10 - x_0 + z_0 - t_0) = \frac{-10}{9} = -1,1111$$

$$t_1 = \frac{1}{15}(1 - 3x_0 + 2y_0 + 2z_0) = \frac{1}{15} = 0,0667$$

2. iterasyon.

x_1, y_1, z_1, t_1 değerlerini kullanarak aşağıdakileri buluruz.

$$x_2 = \frac{1}{14}(16 - 2y_1 + z_1 - t_1) = 0,9978$$

$$y_2 = \frac{1}{13}(25 + 2x_1 + z_1 - 2t_1) = 2,0511$$

$$z_2 = \frac{1}{9}(-10 + x_1 + y_1 - t_1) = -1,0665$$

$$t_2 = \frac{1}{15}(1 - 3x_1 + 2y_1 + 2z_1) = -0,1160$$

işlemleri devam edilirse 5. iterasyonda

$x_5 = 0,995$, $y_5 = 1,9997$, $z_5 = -1,0004$, $t_5 = 0,000$

elde edilir. Gerçek çözüm ise;

$x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, $t = 0$ dır.

Yakınsama koşulları

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\underset{2}{|a_{12}|} + \underset{-1}{|a_{13}|} + \underset{1}{|a_{14}|} < \underset{11}{|a_{11}|} \qquad (i=1)$$

$$\underset{2}{|a_{21}|} + \underset{1}{|a_{23}|} + \underset{-2}{|a_{24}|} < \underset{-13}{|a_{22}|} \qquad (i=2)$$

$$\left.\begin{array}{l} |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| < |a_{33}| \\ |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| < |a_{44}| \end{array}\right\} \text{sağlanır}$$

2. Gauss - Seidel Yöntemi:

Gauss - Seidel iterasyonu Jacobi iterasyonundan farklı olarak herhangi bir aşamada elde edilen bilinmeyen değerin takip eden kademede kullanılması ile çözüme ulaşılır.

jacobi yönteminden daha kısa zamanda gerçek çözüme yaklaşır.

Örnek: $6x - 2y + z = 11$ $\quad$ $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0$

$-2x + 7y + 2z = 5$ $\quad$ başlangıç verilerini kulla

$x + 2y - 5z = -1$ $\quad$ narak yaklaşık çözüm

2 iterasyonla bulunuz.

Çözüm: 1. denkden x, 2. denk. y, 3. denk z çekilirse

$$x = \frac{1}{6}(2y - z + 11)$$

$$y = \frac{1}{7}(5 + 2x - 2z)$$

$$z = \frac{1}{5}(1 + x + 2y)$$

1. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{6}(11 + 2y_0 - z_0) = 1,8333$$

$$y_1 = \frac{1}{7}(5 + 2x_1 - 2z_0) = 1,2381$$

$$z_1 = \frac{1}{5}(1 + x_1 + 2y_1) = 1,0619$$ bulunur

2. iterasyon

$$x_2 = \frac{1}{6}(11 + 2y_1 - z_1) = 2,0681$$

$$y_2 = \frac{1}{7}(5 + 2x_2 - 2z_1) = 1,0021$$

$$z_2 = \frac{1}{5}(1 + x_2 + 2y_2) = 1,0147$$ elde edilir.

6. iterasyonda;

$x_6 = 2,000$ $\quad$ $y_6 = 1,000$ $\quad$ $z_6 = 1,000$

çözüm elde edilir.

Örnek: $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 6$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 0$

$x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 0$

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ olarak Jacobi ve Gauss-Seidel iterasyonu ile bulunuz.

11. BÖLÜM

ÖZ DEĞERLER VE ÖZVEKTÖRLER

A bir $n \times n$ kare matris olsun.

$A.x = \lambda.x$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı x vektörü varsa, λ ya A matrisinin özdeğeri veya karakteristik değeri denir. x vektörüne de λ ya karşılık gelen özvektör denir.

$Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda x - Ax = 0$

$(\lambda I - A)x = 0$ homojen denk. sistem elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı bir çözümü olması için

$|\lambda I - A| = 0$ olmalıdır.

Bu denklem n. dereceden λ bilinmeyenli bir polinom verir. Bu polinom, A matrisinin karakteristik poli. denir.

$|\lambda I - A| = 0$

denkleminin kökleri, A matrisinin özdeğerlerini verir. Bulunan bir λ_i özdeğeri $(\lambda I - A)x = 0$ homojen sisteminde yerine yazılarak sistemin çözümüyle λ_i ye karşılık gelen özvektörler bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ özdeğerlerini ve özvek. = ?

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda = 1$, $\lambda = 2$ özdeğerlerdir.

$\lambda = 2$ ye karşılık gelen özvektörü bulalım.

$(\lambda I - A).x = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ için

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} 1.x + 0.y &= 0 \\ -3.x + 0.y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= k \end{aligned}$$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k = 1$ için bulunan

$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü özvektördür.

$\lambda = 1$ için benzer bulunur.

Bu kısımda bir A matrisinin en büyük ve en küçük özdeğerleri yaklaşık olarak bulunacaktır. Diğer özdeğerler boyut küçültme yöntemi denilen bir yöntemle bulunabilir.

Kuvvet İterasyon Yöntemi

Bu yöntemde bir başlangıç özvektör seçilir. Bu özvektöre X_0 diyelim. 1. iterasyonda $\underset{n\times n}{A}.\underset{n\times 1}{X_0} = n\times 1$ çarpımı yapılır. Elde edilen vektörün en büyük bileşeni parantezine alınır.

$A.X_0 = \lambda_1 . X_1$ biçimindedir. λ_1 ilk yaklaşık en büyük özdeğerdir. X_1 de buna karşılık gelen özvektördür. 2. iterasyonda $A.X_1$ çarpımı yapılır. En büyük bileşeni parantezine alınır.

$A.X_1 = \lambda_2 . X_2$ elde edilir.

λ_2 en büyük özdeğerin yaklaşık ifadesidir. X_2 karşılık gelen özvektördür.

İşlemler bu şekilde devam edilerek λ_{max} ve karşılık gelen özvektör elde edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin en büyük özdeğerini;

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: $Ax_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \underset{\lambda_1}{5}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_1}$

2. iterasyon:

$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 13/5 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{13}{5}}_{\lambda_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/13 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_2}$

3. iterasyon:

$Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 \\ 29/13 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{29}{13}}_{\lambda_3}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/29 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_3}$

$\lambda_{max} = \lambda_3 = \frac{29}{13} \cong 2,2$

Karşılık gelen özvektör $\begin{bmatrix} 1/29 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

En Küçük Özdeğerin Hesaplanması

Bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ise A^{-1} matrisinin özdeğerleri $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ dir.

A^{-1} matrisinin en büyük özdeğeri μ_{max} o.ü. A matrisinin en küçük özdeğeri

$\lambda_{min} = \frac{1}{\mu_{max}}$ olarak elde edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin en küçük özdeğerini bulunuz.

Çözüm: $|A| = 2 \neq 0$ dır ve A^{-1} matrisi vardır.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

minörler

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

A^{-1} in en büyük özdeğerini bulalım, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ seçe

$A^{-1} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{1}_{\mu_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{x_1}$

$A^{-1} \cdot x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{1}_{\mu_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{x_2}$

$A^{-1} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \underbrace{1}_{\mu_3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix}}_{x_3}$

$\mu_{max} \cong \mu_3 = 1$, A^{-1} matrisinin en büyük özdeğeri

A matrisinin en küçük özdeğeri $\lambda_{min} = \frac{1}{\mu_{max}} \cong 1$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - 2(4) + 1(-1) = -8 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 4 - 1(2-4) = 6$$

$4 - 1(2) + 2(2) = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ +2 & 1 & -2 \\ +2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$