işlemler sonucu $A=2$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{5}{2}$ bulunur.

$$y_k^G = c_1 + c_2.2^k + 2.2^k.k - \frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k.$$

olur.

⑤- $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k$

Çözüm.

$$y_k^h = c_1.2^k + c_2.k2^k \text{ dir.}$$

$f(k) = 3k + 2^k$

Özel çözüm $3k$ için $Ak+B$ tipinde

2^k için $c2^k$ tipinde, fakat 2^k'yı y_k^h içerdiğinden $c.2^k.k$ tipinde aranır. $k.2^k$ teriminide y_k^h içerdiğinden özel çözüm $c2^k.k^2$ tipinde aranır.

Ohalde

$$y_k^ö = Ak + B + c.k^2.2^k$$

tipinde olmalıdır.

İşlemler sonucu $A=3$, $B=6$, $C=\frac{1}{8}$ bulunur.

Genel çözüm

$$y_k^G = c_1 2^k + c_2 k 2^k + 3k + 6 + \frac{1}{8}k^2.2^k$$

dır.

5. BÖLÜM

ENTERPOLASYON

Bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden yararlanarak bu fonksiyonun bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemine enterpolasyon işlemi denir. Ayrıca verilmiş bir fonksiyonun daha basit bir $P(x)$ polinomu ile gösterilmesi enterpolasyon olarak bilinir. Buradaki $P(x)$ polinomuna enterpolasyon polinomu denir.

Lineer enterpolasyon

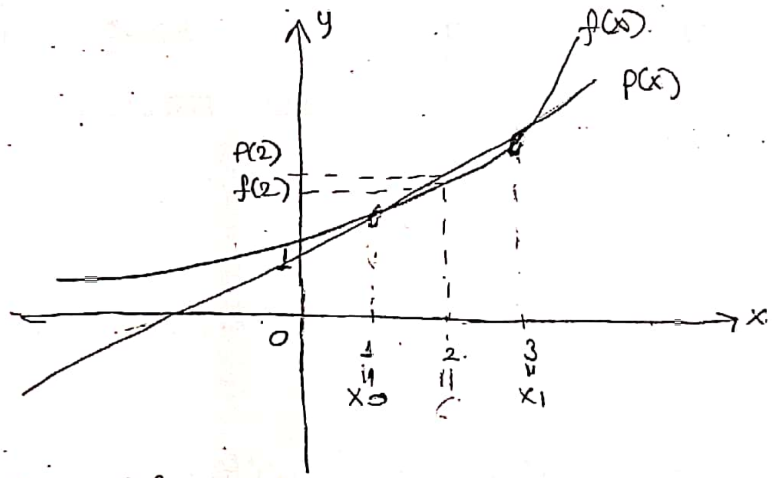
Bir $f(x)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) gibi iki farklı noktadaki değerleri biliniyorsa bu durumda bu iki noktadan geçen birinci dereceden

$$P(x) = Ax + B$$

gibi bir polinom bulunabilir. Ve bu polinom kullanılarak bir $c \in (x_0, x_1)$ noktası için $f(c)$ nin değeri $P(c)$ yardımı ile bulunur. Yani

$$f(c) \cong P(c)$$

dir.



$f(2) \cong P(2)$

ÖRNEK – $e^{0.2} = 1.2214$, $e^{0.3} = 1.34986$ ile

Lineer enterpolasyon polinomunu bularak $e^{0.26}$ değerini hesaplayınız.

Çözüm.

$(0.2, 1.2214)$ ve $(0.3, 1.34986)$

noktalarından geçen doğru denklemi bulunursa.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow y = p(x) \text{ alınırsa}$$

$$P(x) = (1.2846)x + 0.96448$$

bulunur.

$$f(0.26) = e^{0.26} \cong P(0.26) = 1.298456$$

bulunur

Kuadratik enterpolasyon

14.04.06

$f(x)$ fonksiyonunun x_0, x_1 ve x_2 gibi üç noktadaki değeri y_0, y_1 ve y_2 ise bu noktalardan

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

tipinde bir polinom geçer. Bu polinom $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ noktalarının sağlatılması ile elde edilebilir.

ÖRNEK - $\ln 1 = 0$, $\ln 4 = 1{,}386$, $\ln 6 = 1{,}792$ biliniyorken $\ln 2$ değerini kuadratik enterpolasyon ile bulunuz.

Çözüm. - $(1,0)$, $(4, 1.386)$, $(6, 1.792)$ noktalarından geçen polinom $p(x) = a + bx + cx^2$ ise bu polinom bu noktaları sağlar.

$$y = a + bx + cx^2.$$

$$0 = a + b + c$$

$$1.386 = a + 4b + 16c$$

$$1.792 = a + 6b + 36c$$

denklem sistemi çözülürse $c \cong -0.017$, $b \cong 0.549$, $a \cong -0.531$ bulunur. O halde bu üç noktadan geçen polinom:

$$p(x) \cong -0.531 + 0.549x - 0.017x^2.$$

elde edilir

$f(x) = \ln x$ $$f(2) \cong p(2) = -0.531 + 0.549.(2) - (0.017).4$$

Buradan $\ln 2 \cong 0.497$ bulunur.

İleri Fark Enterpolasyonu (Newton İleri fark Enterpolasyonu)

(x_0, y_0), (x_1, y_1) gibi iki noktadan geçen polinomu

$$p(x) = ax + b$$

olarak yazılmıştı. İki noktadan geçen doğru denklemi yazılırsa

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

yazılabilir

57

$x_1 - x_0 = h$, $y_1 - y_0 = \Delta y_0$ yazılırsa

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$$

enterpolasyon polinomu olur.

Benzer olarak kuadratik enterpolasyon polinomu (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktalarından geçecek şekilde yazılırsa;

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \cdot \Delta^2 y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = h$, $x_2 - x_0 = 2h$

olur. Bu polinom.

$x = x_0$ için $y = y_0$

$x = x_1$ için $y = y_1$ $(x_1 - x_0 = h)$

$x = x_2$ için $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0) + \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{h^2}$.

$$= y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{\cancel{h}} \cdot 2\cancel{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2h \cdot h}{h^2} \cdot (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$= \cancel{y_0} + \cancel{2y_1} - \cancel{2y_0} + y_2 - \cancel{2y_1} + \cancel{y_0}$$

$$= y_2$$

eşitliklerini sağlar. Bu genelleştirilirse (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) gibi $(n+1)$ tane noktadan geç n-inci dereceden ileri fark enterpolasyon polinomu.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0) \cdot (x - x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3! \, h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n! \, h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

olur. Bu polinomu $\boxed{s = \frac{x - x_0}{h}}$ kısaltması yaparak daha kullanışlı biçimde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$P_n(x) = \binom{s}{0} y_0 + \binom{s}{1} \Delta y_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 y_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n y_0$$

Burada $\binom{s}{r} = \dfrac{s!}{(s-r)!\,r!}$ binom katsayısıdır.

$P_n(x)$ in katsayıları;

$$\binom{s}{0} = 1 \quad , \quad \binom{s}{1} = s = \frac{x-x_0}{h}$$

$$\binom{s}{2} = \frac{s.(s-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0-h}{h}\right) \longrightarrow x-(x_0+h) = x-x_1$$

$$= \frac{1}{2h^2}(x-x_0).(x-x_1)$$

biçimindedir.

Yukarıdaki $P_n(x)$ polinomuna Newton ileri fark enterpolasyon polinomu denir.

ÖRNEK – $(0,1)$, $(1,-2)$, $(2,7)$, $(3,40)$ noktalarından geçen üçüncü dereceden polinomu bulunuz.

$h = x_1 - x_0$ sabit olacak. Bu soruda 0-1-2 yazdır -1,0,1 de yazabilirdik (x_2, y_2)

Çözüm –

$$P_3(x) = \binom{s}{0} y_0 + \binom{s}{1} \Delta y_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{s}{3} \Delta^3 y_0$$

İleri fark tablosu:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
$x_0 = 0$	$1 = y_0$			
		$-3 = \Delta y_0$		
1	-2		$12 = \Delta^2 y_0$	
		9		$12 = \Delta^3 y_0$
2	7		24	
		33		
3	40			

O halde;

$$P_3(x) = 1 + s.(-3) + \frac{s.(s-1)}{2}.12 + \frac{s.(s-1)(s-2)}{6}.12$$

$$s = \frac{x-x_0}{h} \quad , \quad x_0 = 0 \, , \quad h = x_{i+1} - x_i = 1 \quad \Rightarrow s = x$$

$$2(x^2-x) = (2x^2-2x)$$

$$P_3(x) = 1-3x+6x(x-1)+2x(x-1)(x-2)$$

$$= 1-3x+\cancel{6x^2}-6x+2x^3-\cancel{6x^2}-\cancel{2x}+4x$$

$$= 2x^3-5x+1$$

ÖRNEK –

x	2	4	6	8
y	5	7	11	20

tablosundaki veriler bir $f(x)$ fonksiyonunun geçtiği noktalardır. İleri fark ent. ile $f(3)$ değerini bulunuz.

(4 nokta verili 3. der.)

Çözüm.

$$P_3(x) = y_0 + s\,\Delta y_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 y_0$$

X	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_0=2$	$5=y_0$			
		$2=\Delta y_0$		
4	7		$2=\Delta^2 y_0$	
		4		$3=\Delta^3 y_0$
6	11		5	
		9		
8	20			

$$h = x_{i+1}-x_i = 2$$

$$x_0 = 2$$

$$s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-2}{2}$$

$$P_3(x) = 5+2s+2\cdot\frac{s(s-1)}{2}+3\cdot\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

Eğer polinomun bulunması gerekmezse, doğrudan $f(3)$ değeri istenirse (sorudaki gibi) polinomu bulmadan doğru olan sonucu buluruz.

$s=\frac{x-2}{2}$ idi $x=3$ için $s=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ dir

$$f(3) \cong P_3(3) = 5+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2}$$

$$= 5+1-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}$$

$\simeq 61-$ 95 % ~ - n %

Newton Geri fark Enterpolasyonu

(x_0, y_0), (x_1, y_1) noktalarından geçen polinom (doğru denklemi)

$$\frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \Rightarrow y = y_1 + \frac{y_0 - y_1}{x - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$\Rightarrow y = y_1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_1)$$

$$x_1 - x_0 = h \quad , \quad y_1 - y_0 = \nabla y_1 \Rightarrow y = y_1 + \frac{\nabla y_1}{h} (x - x_1)$$

elde edilir. Benzer işlemlerle n-inci mertebeden geri fark enterpolasyon polinomu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ noktalarından geçmek üzere;

$$P_n(x) = y_n - \binom{u}{1} \nabla y_n + \binom{u}{2} \nabla^2 y_n - \ldots + (-1)^n \binom{u}{n} \nabla^n y_n$$

olarak bulunur. Burada $u = \frac{x_n - x}{h}$ dır.

Bu polinoma göre

$$P_1(x) = y_1 - \binom{u}{1} \cdot \nabla^1 y_1 = y_1 - u \cdot \nabla y_1 = y_1 - \frac{x_1 - x}{h} \cdot \nabla y_1$$

$$P_2(x) = y_2 - \binom{u}{1} \nabla y_1 + \binom{u}{2} \nabla^2 y_2 = y_2 - u \cdot \nabla y_1 + \frac{u(u-1)}{2} \nabla^2 y_2$$

olur.

ÖRNEK – $(0,1)$, $(1,-2)$, $(2,7)$, $(3,40)$ noktalarından geçen polinomu geri fark enterpolasyonu ile bulunuz.

ÇÖZÜM – $P_3(x) = y_3 - \binom{u}{1} \nabla y_3 + \binom{u}{2} \nabla^2 y_3 + \binom{u}{3} \nabla^3 y_3$

Geri fark Tablosu:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
$x_0 = 0$	$1 = y_0$			
		$-3 = \nabla y_1$		
1	-2		$12 = \nabla^2 y_2$	
		-9 ∇y_2		$12 = \nabla^3 y_3$
2	7		$24 = \nabla^2 y_3$	
		$-33 = \nabla y_3$		
$x_3 = 3$	$40 = y_3$			

$x_n = x_3 = 3 \ , \ h=1 \qquad u = \frac{x_n - x}{h} = \frac{3-x}{1} = 3-x$

$$P_3(x) = 40 - 33u + 24.\frac{u.(u-1)}{2} - 12.\frac{u(u-1)(u-2)}{6}$$

$$= 40 - 33.(3-x) + 12.(3-x).(2-x) - 2(3-x)(2-x)(1-x)$$

$$= 40 - 99 + 33x + (36-12x)(2-x) - (6-2x)(2-3x+x^2)$$

$$= -59 + \cancel{33x} + 72 - \cancel{36x} - \cancel{24x} + 12x^2 - \cancel{12} + \cancel{18x} - 6x^2 +$$
$$\cancel{4x} + 6x^2 + 2x^3$$

$$= 2x^3 - 5x + 1$$

ÖRNEK -

x_i	0	1	2
y_i	1	2	4

tablosu veriliyor. $f(1,5)$ değerini bulunuz.
(Tablo değerleri $f(x)$-in geçtiği üç noktadır.)

Çözüm.

$$P_2(x) = y_2 - u \, \nabla y_2 + \frac{u(u-1)}{2} \nabla^2 y_2$$

$y_2 = 4.$

$\nabla y_2 = 4-2 = 2$

$\nabla^2 y_2 = \nabla(\nabla y_2) = \nabla y_2 - \nabla y_1 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = 4 - 4 + 1 = 1$

$P_2(x) = 4 - 2u + \frac{1}{2}.u(u-1) \quad , \ u = \frac{x_2 - x}{h} = \frac{2-x}{1} = 2-x$

$$= 4 - 2.(2-x) + \frac{1}{2}(2-x).(1-x)$$

$$= \cancel{4} - \cancel{4} + 2x + \frac{1}{2}(2-3x+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 1$$

$$f(1,5) \cong P_2(1,5) = \frac{9}{8} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{23}{8} = 2.875$$

$\left(\frac{3}{2}\right)$

Lagrange enterpolasyonu.

(x_0,y_0), (x_1,y_1) noktalarından geçen polinom (doğru denklemi)

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \Rightarrow y = y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x_1-x_0}{x_1-x_0}.y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.y_1 - \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.y_0$$

$$y = \overbrace{\frac{x_1-x}{x_1-x_0}}^{A}.y_0 + \overbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}^{B}.y_1$$

$$y = Ay_0 + By_1$$

Benzer olarak (x_0,y_0), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) noktalarından geçen polinom

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}.y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}y_1 + ... + \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}.y_n$$

olarak bulunur. Bu polinom daha kısa olarak

$$P_n(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + y_2.L_2(x) + ... + y_n.L_n(x)$$

olarak yazılır. Bu polinoma lagrange enterpolasyon polinomu denir. Burada $L_i(x)$ katsayıları şunlardır:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)...(x-x_{i-1}).(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

dir. Bu katsayılara da Lagrange çarpanları denir.

NOT: İleri fark ve geri fark enterpolasyonları eşit adımlı veriler için, Lagrange enterpolasyonu ise eşit olan veya olmayan veriler için kullanılır.

Örnek - $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$ noktalarından geçen polinomu bulunuz.

63

Çözüm.

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= 1 . L_0(x) + 2 . L_1(x) + 4 . L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1).(x-2)}{(-1).(-2)} = \frac{1}{2}(x^2-3x+2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0).(1-2)} = -(x^2-2x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0).(2-1)} = \frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-3x+2) - 2(x^2-2x) + 4 . \frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

ÖRNEK.

x	2	4	6	8
y	5	7	11	20

tablosu veriliyor. $f(5)$ değerini lagrange ent. kullanarak bulunuz

Çözüm.

$$P_3(x) = 5L_0(x) + 7L_1(x) + 11L_2(x) + 20L_3(x)$$

tir. Polinom bulmaya gerek yoktur. Doğrudan $f(5)$ değerini bulalım.

$$f(5) \cong P_3(5) = 5L_0(5) + 7L_1(5) + 11L_2(5) + 20.L_3(5)$$

tir.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_0(5) = \frac{(5-4)(5-6)(5-8)}{(2-4)(2-6)(2-8)} = \frac{1.(-1)(-3)}{(-2)(-4)(-6)} = -\frac{3}{48} = \cdot$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_1(5) = \frac{(5-2)(5-6)(5-8)}{(4-2)(4-6)(4-8)} = \frac{3(-1).(-3)}{2.(-2).(-4)} = \frac{9}{16}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_2(5) = \frac{(5-2).(5-4)(5-8)}{(6-2)(6-4)(6-8)} = \frac{3.1.(-3)}{4.2.(-2)} = \frac{9}{16}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$L_3(5) = \frac{(5-2).(5-4)(5-6)}{(8-2)(8-4)(8-6)} = \frac{3.1.(-1)}{6.(4)(2)} = -\frac{3}{48} = -\frac{1}{16}$$

$$f(5) \cong P_3(5) = 5\left(-\frac{1}{16}\right) + 7.\frac{9}{16} + 11.\frac{9}{16} - 20.\frac{1}{16}$$

$$= \frac{-5+63+99-20}{16}$$

$$= \frac{137}{16}$$

$$\cong 8,56$$

Ters Enterpolasyon.

Normal enterpolasyon işlemlerinde $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ noktalarından geçen enterpolasyon polinomu kullanılarak bir $a \in (x_0, x_n)$ için $f(a)$ nın değeri bulunur.

x	x_0	x_1	$\ldots$	a	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	?	$\ldots$	y_n

Ters enterpolasyonda ise y-nin (y_0, y_n) aralığında verilen bir değeri için x-in alması gereken değer sorulur.

x	2	4	6	?	8
y	5	7	11	15	20

Ters enterpolasyon ile ilgili soruları çözmek için tablodaki sayılar yer değiştirilir. Ve normal enterpolasyon işlemi uygulanır.

Örnek_

x	0	1	2
y	1	2	4

tablosu veriliyor. $y=3$ değeri alabilmesi için x hangi değeri almalıdır? Lagrange enterpolasyonu ile bulunuz. ($f(x)=3$ ise x ne olmalıdır da diyebilirdi.)

Çözüm_

x	0	1	?	2
y	1	2	3	4

Ters enterpolasyondur.

Çözüm için sayıları yer değiştirelim.

x	1	2	3	4
y	0	1	?	2

Normal enterpolasyon işlemidir.

$$y(3) \cong P_2(3) = 0.L_0(3) + 1.L_1(3) + 2.L_2(3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_1(3) = \frac{(3-1)(3-4)}{(2-1).(2-4)} = \frac{2(-1)}{1.(-2)} = 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_2(3) = \frac{(3-1)(3-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{2.1}{3.2} = \frac{1}{3}$$

$y(3) = P_2(3) = 1.1 + 2.\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \cong 1,67$ olur.

Sorunun çözümü $y=3$ ise $x=1.67$ olmalıdır.

21.04.06.

6. BÖLÜM

EĞRİ UYDURMA - EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Sonlu farklar ve lagrange enterpolasyon formüllerinde $p(x)$ yaklaşım fonksiyonu daima bir polinomdur ve verilen noktalardan geçer. $f(x)$ fonksiyonuna bu tip bir polinom ile yaklaşmanın iki sakıncası vardır. Alınan nokta sayısı fazla olduğunda işlem sayısı artar. Çünkü bulunan polinomun derecesi verilen nokta sayısından bir eksiktir. Bu nedenle nokta sayısı fazla olan problemler için bu yaklaşım kullanışlı değildir. Enterpolasyon polinomu $f(x)$ fonksiyonunu sadece verilen noktaların arasında tanımlar.

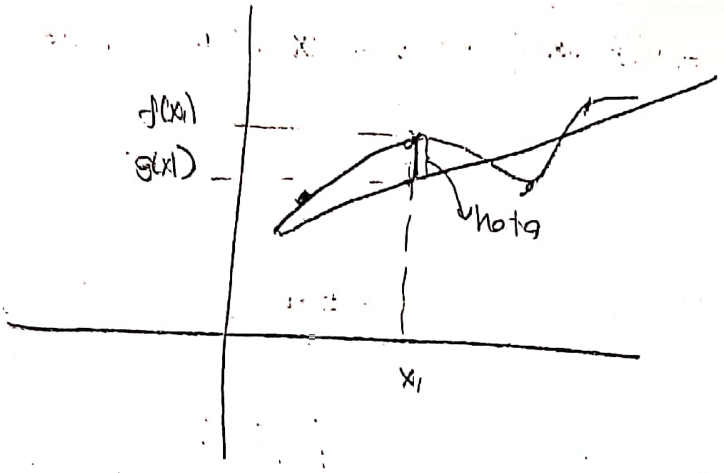
$f(x) \cong p(x)$ $\qquad\qquad$ $f(x) \ncong p(x)$

Bazı durumlarda gerçek fonk. ile enterpolasyon polinomu verilen noktaların dışında çok farklıdır. Bu da $f(x)$-in yaklaşık değerinin bulunmasında hatayı artırır. Verilen noktalar yardımıyla $f(x)$-e uygun bir yaklaşım fonksiyonunun belirlenmesi işlemine eğri uydurma denir. Eğri uydurma için en iyi yaklaşım en küçük kareler yöntemidir.

En Küçük Kareler Yöntemi:

(x_0,y_0), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) noktaları verilsin. $f(x)$-e en uygun yaklaşan fonksiyon $g(x)$ olsun.

67



Gerçek fonksiyon $f(x)$ ile yaklaşım fonksiyonu $g(x)$-in x_i noktalarındaki farkı hatayı verir.

$$r_i = g(x_i) - f(x_i)$$

dir. (r_i i-inci hata.)

Bu hataların bazısı negatif bazısı pozitiftir. Biz toplam hatanın en küçük olmasını isteriz. Bu nedenle hataların kareleri toplamı alınarak bu toplam minumum olacak şekilde $g(x)$ belirlenir.

$$\sum_{i=0}^{n} r_i^2$$

minumum yapılmalıdır.

$$\sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]^2$$

olur. $g(x)$ fonksiyonu lineer bağımsız $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x)$ gibi k tane fonksiyonun lineer birleşimi olarak yazıldığını varsayalım. Bu durumda

$$g(x) = c_1 . g_1(x) + c_2 . g_2(x) + \ldots + c_k . g_k(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g_i(x)$ ler bilinen fonksiyonlardır. c_i-ler bilinmeyen katsayılardır. Buna göre;

$$\sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [c_1 g(x_i) + c_2 g(x_i) + \ldots + c_k g(x_i) - f(x_i)]^2$$

elde edilir.

Bu ifade $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bilinmeyenli bir çok değişkenli fonksiyondur.
Bu fonksiyonu minumum yapan c_i katsayıları

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\sum r_i^2\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

eşitliklerinden elde edilen lineer denklem sisteminin çözümünden bulunurlar. Böylece;

$$g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots + c_k \cdot g_k(x)$$

elde edilmiş olur.

Örnek -

x_i	0	2	4	6	8	10
y_i	1	5,1	9	13	17	21

tabloda verilen değerleri kullanarak bu noktalardan geçen $f(x)$ fonksiyonuna $g(x) = c_1 x + c_2$ gibi bir doğru denklemi uydurunuz.

Çözüm -

$r_i = g(x_i) - f(x_i)$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{5} r_i^2 = \sum_{i=0}^{5} (c_1 x_i + c_2 - y_i)^2 = S$$

olur. Burada S c_1 ve c_2 bilinmeyenli bir fonksiyondur. S-yi yani hataların kareleri toplamını minumum yapacak c_1 ve c_2 sayıları bulunacak.

S nin c_1 ve c_2 ye göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenecek.

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = \frac{\partial}{\partial c_1}\left(\sum_{i=0}^{5} (c_1 x_i + c_2 - y_i)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{5} \frac{\partial}{\partial c_1} (c_1 x_i + c_2 - y_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{5} 2 \cdot (c_1 x_i + c_2 - y_i)(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=0}^{5} (c_1 x_i^2 + c_2 x_i - y_i x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{5} c_1 x_i^2 + \sum_{i=0}^{5} c_2 \cdot x_i - \sum_{i=0}^{5} y_i \cdot x_i = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \sum_{i=0}^{5} x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} y_i . x_i$$

Verilenlerden ;

$$\sum_{i=0}^{5} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 220$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i . y_i = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 = 470,2$$

O halde ilk denklem

$$220c_1 + 30c_2 = 470.2 \quad ----(1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial c_2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{5} (c_1 x_i + c_2 - y_i) . 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sum c_1 x_i + \sum_{i=0}^{5} c_2 - \sum y_i = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \sum x_i + 6c_2 = \sum y_i$$

Verilerden;

$$\sum y_i = 1 + 5.1 + 9 + 13 + 17 + 21 = 66.1 \text{ dir.}$$

Ohalde ikinci bir denklem

$$30c_1 + 6c_2 = 66,1 \quad ---- (2)$$

dır.

(1) ve (2) çözülürse

$$220c_1 + 30c_2 = 470,2$$

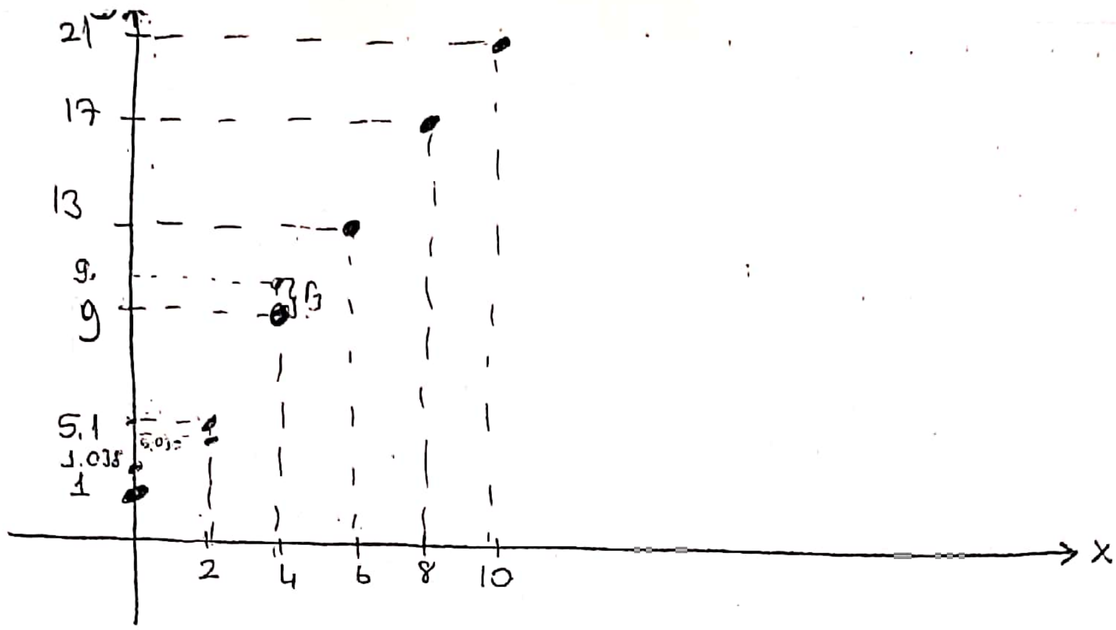
$$30c_1 + 6c_2 = 66,1$$

$$c_1 = 1.996 \qquad c_2 = 1.038$$

elde edilir.

Ohalde $f(x)$-e uydurulan eğri

$$g(x) = 1,996\, x + 1.038 \quad \text{olur.}$$



Örnek.. $(-3,3)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$ noktalarına

$$y = a + bx + cx^2$$

tipinde öyle bir eğri uydurunuzki yapılan hataların kareleri toplamı minumum olsun.

Çözüm.

$$S = \sum_{i=0}^{3} r_i^2 \quad , \quad r_i = g(x_i) - f(x_i)$$

$$g(x) = a + bx + cx^2$$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=0}^{3} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2 \quad \text{olur.}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=0}^{3} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{3} a + b \sum_{i=0}^{3} x_i + c \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=0}^{3} y_i \quad \text{---(1)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=0}^{3} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=0}^{3} x_i + b \sum_{i=0}^{3} x_i^2 + c \sum_{i=0}^{3} x_i^3 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i \quad \text{---(2)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=0}^{3} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=0}^{3} x_i^2 + b \sum_{i=0}^{3} x_i^3 + c \sum_{i=0}^{3} x_i^4 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i^2 \quad \text{...(3)}$$

denklemleri elde edilir. Katsayıları hesaplayalım.

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	$x_i \cdot y_i$	x_i^4	$y_i \cdot x_i^2$
-3	3	9	-27	-9	81	27
0	1	0	0	0	0	0
2	1	4	4	2	16	4
4	3	16	64	12	25	48
$\Sigma x_i = 3$	$\Sigma y_i = 8$	$\Sigma x_i^2 = 29$	$\Sigma x_i^3 =$	$\Sigma x_i y_i = 5$	$\Sigma x_i^4 = 353$ 122	$\Sigma x_i^2 y_i = 79$

Denklemler:

$$4a + 8b + 29c = 8$$

$$3a + 29b + 45c = 5$$

$$29a + 45b + 353c = 79$$

elde edilir. Denklem sistemi çözülürse

$$a \cong 0.85$$

$$b \cong -0.19$$

$$c \cong 0.18$$

elde edilir. Buna göre

$$f(x) \cong g(x) = 0.85 - 0.19x + 0.18x^2$$

elde edilir.

Lineer Hale Dönüştürülebilen Modeller

Bazı durumlarda verilen noktalara doğrusal bir denklem uydurulamaz.

$$y = a \cdot e^{bx}, \quad y = a \cdot x^b,$$

$$y = \frac{a}{x+b}$$

gibi lineer olmayan modeller karşımıza çıkabilir. Bu durumda en küçük kareler yöntemini doğrudan uygulayamayız. Çünkü çözülecek denklemler lineer olmayan ve çözümü bazen çok zor bazen de çözümsüz olan denklemlerdir.

Örneğin; $y = a\,e^{bx}$ uydurulacak eğri ise.

$$\sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (a\,e^{bx_i} - y_i)^2 = S$$

olur.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum 2(a\,e^{bx_i} - y_i).\,e^{bx_i} = 0$$

$$\Rightarrow a\sum e^{2bx_i} - \sum y_i\,e^{bx_i} = 0$$

$i=1,2$ için.

$$a.\,e^{2bx_1} + a\,e^{2bx_2} - (y_1 e^{bx_1} + y_2 e^{bx_2}) = 0$$

ve $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ dan elde edilen denklem ile birlikte çözümü

zordur.

Bu nedenle bu tip lineer olmayan modeller çeşitli işlemlerle lineer hale getirilir ve çözümü yapılır.

$$y = a\,e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a\,e^{bx} = \ln a + bx.$$

$\ln y = Y$, $\ln a = A$ dersek.

$$Y = A + bx.$$

elde edilir. Bu lineer model için çözüm yapıldıktan sonra a ve b bilinmeyenleri elde edilir.

Bazı Lineerleştirme işlemleri :

g(x) uyd. eğri

1) $y = a\,x^b \Rightarrow \underbrace{\ln y}_{Y} = \ln a\,x^b = \underbrace{\ln a}_{A} + b\underbrace{\ln x}_{X}$

$$\Rightarrow Y = A + bX \quad \text{lineer.}$$

2) $y = \dfrac{1}{ax+b} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = ax+b.$, $\dfrac{1}{y} = Y$ dersek.

$$Y = ax+b \quad \text{lineer}$$

3) $y = \frac{a}{x} + b \Rightarrow \frac{1}{x} = X$ dersek

$y = aX + b$ lineer

4) $y = \frac{a}{x+b} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x+b}{a} = \frac{x}{a} + \frac{b}{a}$

$\frac{1}{y} = Y$, $\frac{1}{a} = A$, $\frac{b}{a} = C$ dersek

$Y = Ax + C$ lineer.

5) $y = ax\,e^{-bx} \Rightarrow \ln y = \ln ax\,e^{-bx} = \ln a + \ln x - bx$

$\Rightarrow \ln y - \ln x = \ln a - bx$

$\Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln a - bx$

$\ln \frac{y}{x} = Y$, $\ln a = A$, $-b = B$ denilirse

$Y = A + Bx$ lineer

ÖRNEK.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.5	2.5	3.5	5.0	7.5

tablosuna $y = c.e^{ax}$ tipinde öyle bir eğri uydurunuz ki yapılan hataların kareleri toplamı en küçük olsun.

Çözüm. $y = c.e^{ax}$ lineer model değil

$\ln y = \ln c.e^{ax}$

$\underbrace{\ln y}_{Y} = \underbrace{\ln c}_{B} + ax$

$\Rightarrow Y = B + ax$ lineer modeli elde ed

$$\sum_{i=0}^{4} r_i^2 = \sum_{i=0}^{4} (B + a x_i - (y_i))^2 = S \quad \text{olur.}$$

↳ burası önemli y_i değil Y_i yazdık dikkat

$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{4} (B + a x_i - Y_i)\, x_i = 0$$

$$\Rightarrow B \sum x_i + a \sum x_i^2 = \sum x_i Y_i \quad \text{----(1)}$$

$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{4} (B + a x_i - Y_i) \cdot 1 = 0.$

$$5B + a \sum_{i=0}^{4} x_i = \sum_{i=0}^{4} Y_i \quad \text{--- (2)}$$

$\sum x_i = 10$

$\sum x_i^2 = 30$

$\sum_{i=0}^{4} Y_i = \sum_{i=0}^{4} \ln y_i = \ln y_0 + \ln y_1 + \ln y_2 + \ln y_3 + \ln y_4$

$= 6.198$

$\sum_{i=0}^{4} x_i Y_i = \sum_{i=0}^{4} x_i \ln y_i = x_0 \ln y_0 + x_1 \ln y_1 + x_2 \ln y_2 + x_3 \ln y_3 + x_4 \ln y_4$

$= 16.309.$

Lineer denklemler:

$$10B + 30a = 16.309$$

$$5B + 10a = 6.198$$

çözülürse;

$B = 0.457$, $a = 0.3913$ bulunur.

$\ln c = B \Rightarrow \ln c = 0.457 \Rightarrow c = e^{0.457} = 1.579$

bulunur. O halde uydurulacak eğri:

$$y = 1.579 \cdot e^{0.3913x}$$

olur.

ÖRNEK -

x_i	0	2	3	4
y_i	0.71	0.48	0.3	0.27

verilerine uygun $y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}}$ tipindeki eğriyi bulunuz.

adbuyun.- $y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}}$ lineer model değil

$$y^2 = \frac{1}{a+bx} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = a+bx$$

$\frac{1}{y^2} = Y$ dersek

$Y = a+bx$ lineer modeli elde edilir.

$$S = \sum_{i=0}^{3} r_i^2 = \sum_{i=0}^{3} (a+bx_i - Y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{3} (a+bx_i - Y_i) = 0$$

$$\Rightarrow 4a + b\sum_{i=0}^{3} x_i = \sum_{i=0}^{3} Y_i \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{3} (a+bx_i - Y_i)(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow a\sum_{i=0}^{3} x_i + b\sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot Y_i \quad \text{--- (2)}$$

$\sum x_i = 9$, $\sum Y_i = \sum \frac{1}{y_i^2} = 31,152$, $\sum x_i^2 = 29$

$\sum x_i \cdot Y_i = 96.881$

O halde 1. denklem

$$4a + 9b = 31.152$$

2. denklem

$$9a + 29b = 96.881$$

İki denklem çözülürse;

$$a = 0,901 \quad \text{(yuvarlatılırsa)}$$
$$b = 3.061$$

bulunur. O halde uydurulacak eğri

$$y = \frac{1}{\sqrt{0.901 + 3.061x}}$$

örnek:

x	1	3	4	7
y	3.4	0.218	0.106	0.0262

uydurulacak eğri $y = a x^{-b}$

örnek:

x	0.5	1	2	4
y	0.625	0.5	4	32

, $y = ab^x$

örnek:

x	0.5	0.8	1.1	1.8	4.0
y	7.1	4.4	3.2	1.9	0.9

, $y = \frac{a}{x} + b$

28.04.06

7. BÖLÜM

SAYISAL TÜREV

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi noktalarda değerleri bilinen bir $y = f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir noktasındaki türevinin değerini türev almadan yaklaşık olarak hesaplayabiliriz.

1- Sonlu Farklar ile Türev Hesabı:

(i) – İleri Farklar ile Türev Hesabı

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası komşuluğunda Taylor seri açılımı:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i).(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \ldots$$

dır. Bu açılımda x yerine $x_{i+1} = x_i + h$ yazalım.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_i + h - x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i).(x_i + h - x_i)^2 + \ldots$$

elde edilir.

$$y_{i+1} = y_i + h.f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

dir. Bu eşitlikten $f'(x_i)$ çekilirse;

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{2!} \cdot f''(x_i) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) - \dots$$

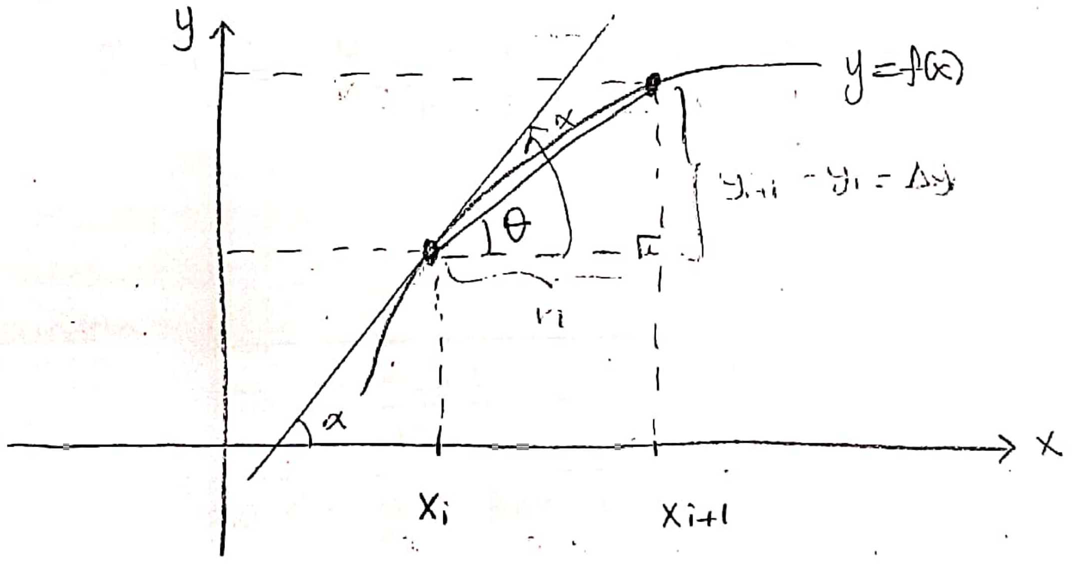
bulunur. $h, h^2, h^3, \dots$ sayıları sıfıra yakın sayılardır. Bu sayıl içeren terimler ihmal edilirse (atılırsa) kesme hatası oluşur. Mertebesi h dır.

$$f'(x_i) = \frac{\Delta y_i}{h} + O(h)$$

olur. $O(h)$ ihmal edilirse.

$$\boxed{f'(x_i) \cong \frac{\Delta y_i}{h}}$$

elde edilir. Buna ileri fark yaklaşımı ile $f'(x_i)$ nin hesabı denir.



$$f'(x_i) \cong \tan\theta = \frac{\Delta y_i}{h} \quad \text{dır.}$$

Gerçek değer : $f'(x_i) = \tan\alpha$ dır.

Örnek. $y = \tan x$ $y'(1)$ değerini $h = 0{,}1$ olarak ileri fark yaklaşımı ile hesaplayınız.

Çözüm. $\underset{x_i = 1}{f'(x_i) = f'(1)} \cong \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

$x_i = 1$ ise $y_i = \tan 1 = 1{,}56$ dır.

$x_{i+1} = x_i + h = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$, $y_{i+1} = \tan 1{,}1 =$

$$f'(1) \cong \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1{,}96-1{,}56}{0.1} = 4$$

Gerçek değer: $y' = 1+\tan^2 x$, $y'(1) = 3.43$

(ii)- Geri Fark Yaklaşımı

$y=f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası komşuluğunda Taylor seri açılımında x yerine x_{i-1} yazılırsa.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i).(x_{i-1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i-1}-x_i)^2 + \dots$$

bulunur.

$x_{i-1} = x_i - h$ olduğundan

$$y_{i-1} = y_i + (-h).f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}.(-h)^2 + \dots$$

bulunur.

$f'(x_i)$ çekilirse

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \underbrace{\frac{h}{2!}.f''(x_i) - \frac{h^2}{3!}f'''(x_i) + \dots}_{c(1,1) \quad \text{kesme hatası}}$$

olduğundan

$$\boxed{f'(x_i) \cong \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \frac{\nabla y_i}{h}}$$

elde edilir. Buna da geri fark yaklaşımı ile türev hesabı denir.

ÖRNEK- $y=\tan x$, $h=0.1$ o.ü. $y'(1) \cong ?$

Çözüm. $x_i = 1$, $y_i = 1.56$

$$x_{i-1} = x_i - h = 1-0.1 = 0.9$$

$$\Rightarrow y_{i-1} = \tan(0.9) \overset{\text{radyan dikkat!}}{=} 1.26$$

$$f'(1) \cong \frac{\nabla y_i}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \frac{1.56-1.26}{0.1} = 3$$

Gerçek değeri: 3.43.

(iii) Merkezi Fark Yaklaşımı:

$y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki Taylor seris önce x yerine x_{i+1}, sonra x yerine x_{i-1} yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x_i) + \dots$$

$$y_{i-1} = y_i - h\, f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \dots$$

elde edilmişti. 2. eşitliği -1 ile çarpalım ve 1. ile toplayalım.

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2h\, f'(x_i) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots$$

elde edilir. $f'(x_i)$ çekilirse:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) - \dots$$

bulunur.

h^2 den bağlandığı için

Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci ve sonraki terimler $O(h^2)$ kesme hatası olarak atılırsa

$$f'(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

elde edilir. Buna da merkezi fark yaklaşımı denir.

ÖRNEK- $y = \tan x$, $h = 0.1$, $y'(1) = ?$

Çözüm.

x	$x_{i-1} = 0{,}9$	$x_i = 1$	$x_{i+1} = 1.1$
y	$y_{i-1} = 1.26$	$y_i = 1{,}56$	$y_{i+1} = 1.96$

$$f'(1) \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Gerçek değer: $3{,}43$

$$= \frac{1.96 - 1{,}26}{2 \times 0.1}$$

$$= 3{,}5$$

Birinci mertebeden türevlerin üstteki yöntemlerle hesabında iki nokta kullanılmıştır. Üç veya daha fazla nokta kullanılarak aşağıdakiler gibi türev formülleri de elde edilebilir.

Üç Noktalı Türev Formülleri:

$y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki Taylor seri açılımında x yerine x_{i+1} ve x yerine x_{i+2} yazarak aşağıdakileri buluruz.

$$y_{i+1} = y_i + h.\,f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots$$

$$y_{i+2} = y_i + 2h.\,f'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots$$

1. denklemi -4 ile çarpıp 2. denklem ile toplarsak

$$y_{i+2} - 4\,y_{i+1} = -3y_i - 2h\,f'(x_i) + \frac{4h^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots$$

bulunur. $f'(x_i)$ çekilirse

$$f'(x_i) = \frac{4y_{i+1} - y_{i+2} - 3y_i}{2h} + O(h^2)$$

elde edilir. Buradan

$$\boxed{f'(x_i) \cong \frac{4y_{i+1} - y_{i+2} - 3y_i}{2h}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde x yerine x_{i-1} ve x_{i-2} yazılarak

$$\boxed{f'(x_i) = f_i' \cong \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 3y_i}{2h}}$$

bulunur.

Bu formüllere ileri ve geri fark yaklaşımları ile üç noktalı türev formülleri denir.

Benzer işlemlerle x yerine x_{i+1} ve x yerine x_{i-1} yazılarak uygun katsayılar ile düzenleme sonucu merkezi fark yaklaşımı da elde edilebilir.

Bunları ezberleme. Hoca sorarsa formül çıkartma sorarmış.

İkinci Türevler için Formüller

$y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası komşuluğunda Taylor açılımında x yerine x_{i+1} ve x yerine x_{i+2} yazarak aşağıdakileri buluruz:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots$$

$$y_{i+2} = y_i + 2h\, f'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots$$

Bu eşitliklerden birinci türev yok edilirse; (1. denklemi -2 ile çarpıp 2. eşitlik ile toplayalım) şunu elde ederiz

$$y_{i+2} - 2y_{i+1} = -y_i + \frac{2h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{6h^3}{6!} f'''(x_i) + \dots$$

bulunur. $f''(x_i)$ çekilirse.

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + O(h)$$

elde edilir. $O(h)$ ihmal edilirse

$$\boxed{f''(x_i) \cong \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}}$$

bulunur. Bu formül ikinci türev için ileri fark yaklaşımı denir.

Benzer olarak;

Geri fark yaklaşımı (x yerine x_{i-1} ve x yerine x_{i-2} yazıp $f'(x_i)$ leri yok ederek)

$$\boxed{f''(x_i) \cong \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}}$$

Merkezi fark yaklaşımı ($x \to x_{i-1}$, $x \to x_{i+1}$ yazıp $f'(x_i)$ yok ederek)

$$\boxed{f''(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}}$$

elde edilir.

3. ve daha yüksek türevler veya daha fazla nokta kullanarak sonlu farklar ile türev hesapları yapılabilir.

Örnek- $f(x) = 2x^3$ fonksiyonu için $h = 0{,}5$ olarak merkezi fark yaklaşımları ile $y'(2)$ ve $y''(2)$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm. $f'(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

x	$x_{i-1} = 1{,}5$	$x_i = 2$	$x_{i+1} = 2{,}5$
y	$y_{i-1} = 6{,}75$	$y_i = 16$	$y_{i+1} = 31{,}25$

$$f'(2) = f'(x_i) = \frac{31{,}25 - 6{,}75}{(0{,}5)\times 2} = 24{,}5$$

$$f''(2) = \frac{31{,}25 - 32 + 6{,}75}{(0{,}5)^2} = 24.$$

Gerçek değerler:

$f(x) = 2x^3$ > $f'(x) = 6x^2$, $f'(2) = 24$

$f''(x) = 12x$, $f''(2) = 24$

2- Enterpolasyon Yardımıyla Türev Hesabı

Bazı durumlarda sayısal türevi hesaplanacak olan $y = f(x)$ fonksiyonuna $p(x)$ gibi bir enterpolasyon polinomu karşılık getirip bu polinomun türevi yardımıyla fonksiyonun türevi hesaplanabilir.

Örnek

x	2	5	6
y	5	26	39

tablosu veriliyor. $y'(4)$ değerini hesaplayınız..

Çözüm. Verilen noktalardan geçen enterpolasyon polinomu Lagrange enterpolasyonu kullanılarak (çünkü noktalar eşit aralıklı değil.)

$$p(x) = x^2+1$$

bulunur.

[$y'(10)$ sorulsaydı hata çok olur. Bu yönt. kullanılmaz. 2-6 arasında olması kabul olsa indirger.]

$$y'(4) \cong p'(4) = 8$$

(Bu soru sonlu farklarla yapılamaz. h eşit değil.

Eşit olsa da yapılamaz

2	4	6
5	17	37

$y'(3)$ sorsaydı $x_i \to y_i'$ bilmemiz gerekirdi

$y(x_i)$ değeri verilmediği için sonlu farklar kullanılamayabi

8. BÖLÜM

SAYISAL İNTEGRASYON

Belirli bir aralıkta hesaplanması istenen integral ilkel fonksiyonu bilinen yöntemler yardımıyla hesaplanarak her zaman mümkün olmayabilir.

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \dots$$

$\frac{x^3}{3}$, x^2 nin ilkeli

$$\int_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$$

$\frac{\sin x}{x}$ in ilkeli yok üstteki yöntemle sonuç bulunamaz.

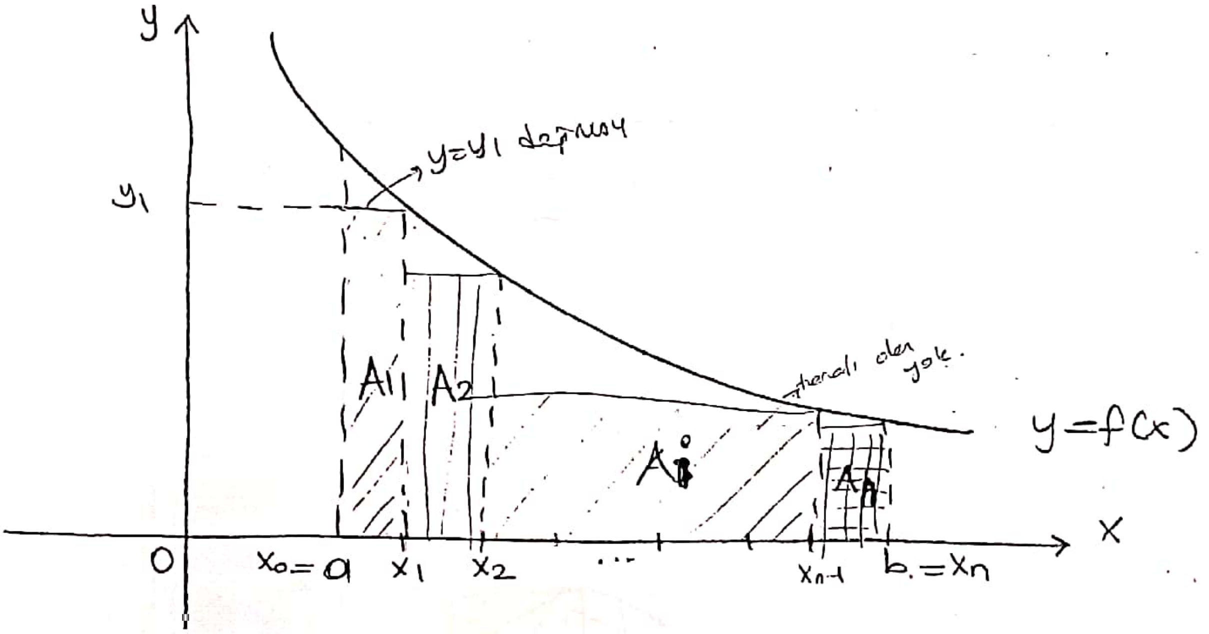
Böyle durumlarda integrasyon aralığını parçalara bölerek herbir alt aralıkta fonksiyonun integralini almak yerine sabit doğruların ya da parabollerin integralleri hesaplanarak yaklaşık hesaplama yoluna gidilir. Bilindiği gibi $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali bir alan hesabıdır.

1 Dikdörtgenler Yöntemi

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Aralığı n parçaya bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

olsun.



$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k$$ olur. A_k-ların herbiri bir dikdörtgendir.

$x_{i+1} - x_i = h$ olarak seçersek.

$$A_1 = h \cdot y_1 \;,\; A_2 = h \cdot y_2 \;,\; \dots \;,\; A_n = h \cdot y_n$$ olur.

Ayrıca A_1 alanı:

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} y_1 \cdot dx = y_1 x \Big|_{x_0}^{x_1} = y_1 (x_1 - x_0) = y_1 \cdot h.$$

biçimindedir. Diğerleri de aynı şekilde hesaplanabilir.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k$$

85 eşitliği ile integral hesabına dikdörtgenler yöntemi denir.

... dan da başlayabiliriz. Eğri durumuna göre değ.

Alt dikdörtgenler yerine üst dikdörtgenler de kullanılabilir.

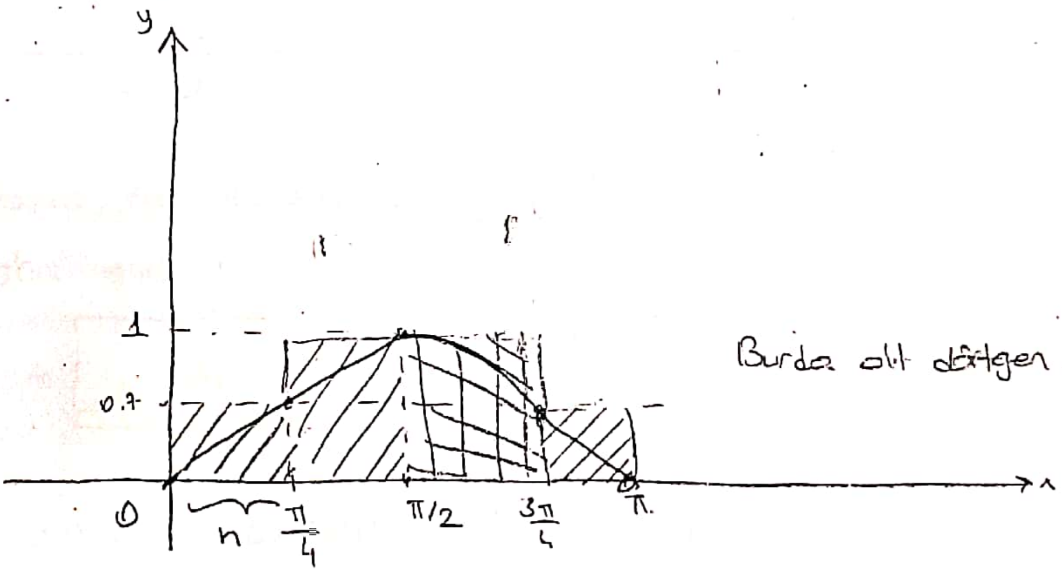
Örnek $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$. integralini $n=4$ olarak dikdörtgenler yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm. $n=4$ ise $[0, \pi]$ ($0 \to a$, $\pi \to b$)

(rastgele de alabilir; ama eşit seçelim)

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4} \quad , \quad f(x) = \sin x.$$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$	1	0,7	0



Burda alt dörtgen olmaz.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= h.y_1 + h y_2 + h.y_2 + h.y_3$$

$$= \frac{\pi}{4}.(0{,}7 + 1 + 1 + 0{,}7)$$

$$= \frac{(3{,}4).\pi}{4} = 2{,}67 \ (?)$$

Gerçek değer.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$$

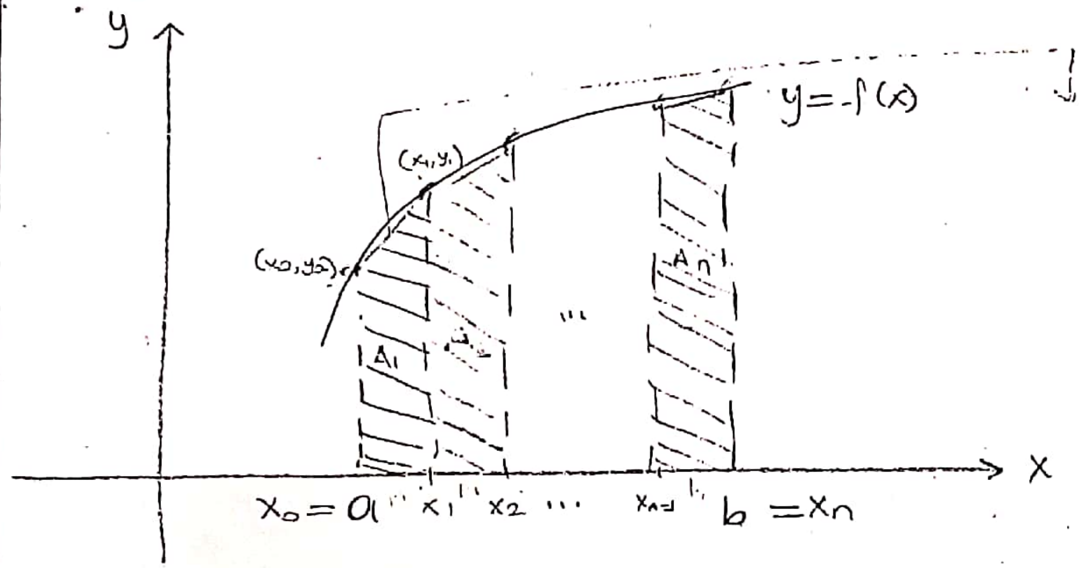
$$= 1 + 1 = 2$$

2. Yamuk Yöntemi

$\int_a^b f(x)dx$ integralini bu yöntem ile çözmek için (a,b) aralığı n parçaya ayrılır.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

olsun.



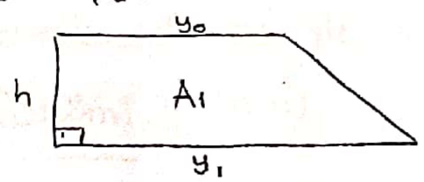
Bu iki noktadan geçen doğru denklemi

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ bölgeleri birer yamuktur.

A_1-in alanı şudur.:



$$\boxed{A_1 = \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h}$$ dır.

Diğer yamukların alanları da benzer olarak

$$\boxed{A_k = \frac{y_{k-1}+y_k}{2} \cdot h} \qquad k = 2,3,\dots,n$$

dır. Buna göre

$$\int_a^b f(x)dx \cong A_1 + A_2 + \dots + A_n = \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1+y_2+\dots+y_{n-1}) + y_n\right]}$$

elde edilir

84

Bu eşitlik yamuk yönteminin ana formülüdür. Bu yöntem ile herbir alt aralıkta, $f(x)$-in integralini hesaplamak yerine bir doğrunun integrali hesaplanarak alan bulunmuştur. Örneğin

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \cong A_1 = \int_{x_0}^{x_1} [\underset{\substack{\downarrow \\ \text{doğru} \\ \text{denklemi}}}{\quad}]\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) + y_0\right] dx$$

$$= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(\frac{x^2}{2} - x_0 \cdot x\right) + y_0 x \Big|_{x_0}^{x_1}$$

$(x_1-x_0=h)$

$$= \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h$$

dir.

Örnek: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cos x) \cdot \sin^2 x\,dx$ integralini $n=4$ alarak yamuk yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm: $(a,b) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$$f(x) = \sin(2\cos x) \cdot \sin^2 x$$

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
y	0	0.1409	0.4939	0,5913	0

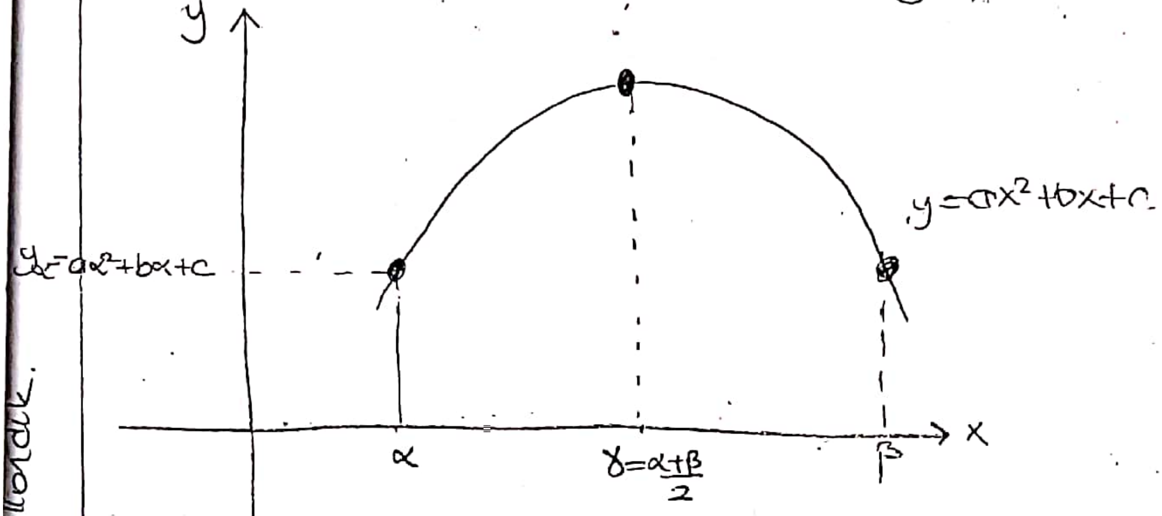
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{h}{2} \cdot \left[y_0 + 2(y_1+y_2+y_3) + y_4\right]$$

$$= 0.4815$$

* Burda da radyan aldık. Derece kullanımda için $\int_0^{90°} f(x)\,dx$ vermesi lazımdı.

3. Simpson Yöntemi

Bu yöntemde de $f(x)$ in integrali yerine parabollerin integrali alınarak alan hesabı yapılır. Önce herhangi bir parabolün altında kalan alanı sınırları cinsinden yazalım.



$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx = ?$$

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_\alpha^\beta$$

$$= \frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3) + \frac{b}{2}\cdot(\beta^2-\alpha^2) + c\cdot(\beta-\alpha)$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)}{6}\left[2a\cdot(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2) + 3b(\beta+\alpha) + 6c\right]$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6}\left[a\cdot(\alpha^2+4\gamma^2+\beta^2) + b\alpha + b\beta + 4b\gamma + 6c\right]$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6}\left[a\alpha^2+b\alpha+c + 4(a\gamma^2+b\gamma+c) + a\beta^2+b\beta+c\right]$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6}\left[y_\alpha + 4y_\gamma + y_\beta\right]$$

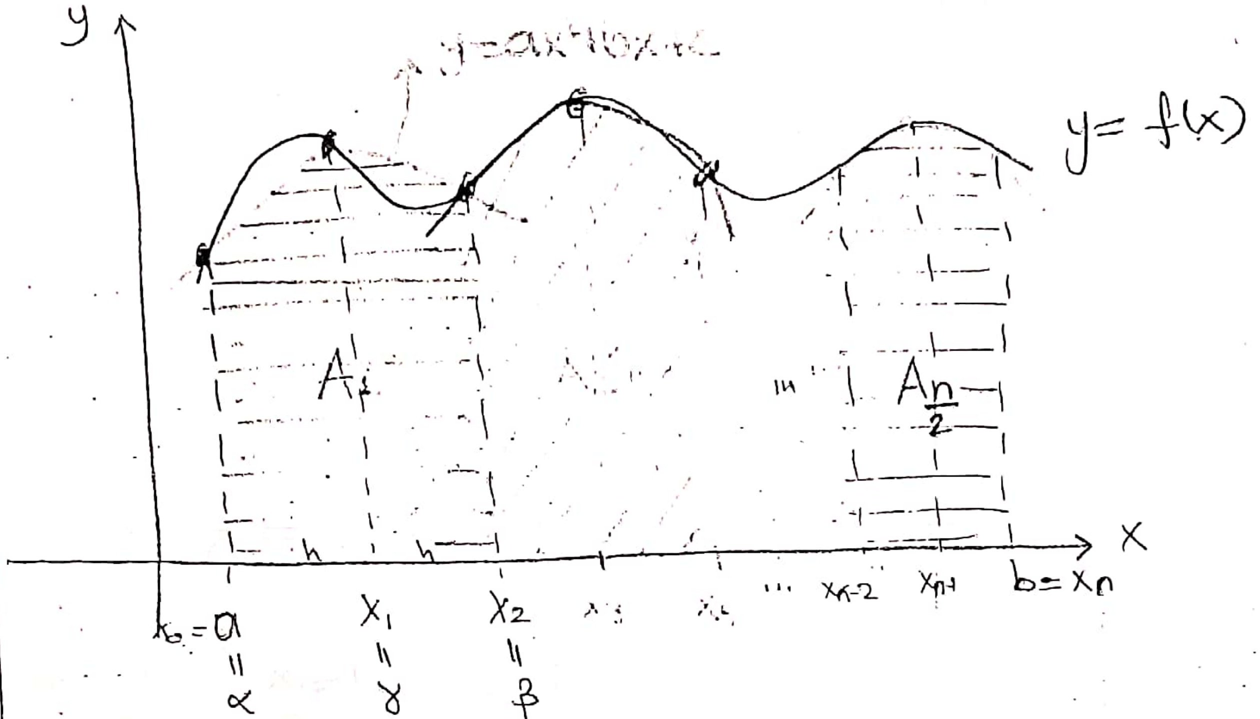
elde edilir. Çünkü α, β, γ noktaları parabol üzerindeki

$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow (2\gamma)^2 = (\alpha+\beta)^2 = 4\gamma^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ kullandık.

89

noktaların apsisleridir

Bu eşitliği aşağıdaki gibi kullanalım.



x! orta nokta dikkat!

Önceki eşitlikten;

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_2} (ax^2+bx+c)\,dx$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

olur.

Benzer olarak (x_2, x_4), (x_4, x_6) ..., (x_{n-2}, x_n) aralıklarına bu yöntem uygulanırsa;

$$A_2 = \frac{x_4-x_2}{6}\left[y_2+4y_3+y_4\right], \ldots, A_{\frac{n}{2}} = \frac{x_n-x_{n-2}}{6}\left[y_{n-2}+4y_{n-1}+\ldots\right.$$

elde edilir. O halde

$x_2-x_0=2h$

$x_4-x_2=2h$

⋮

$x_n-x_{n-2}=2h$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong A_1+A_2+\ldots+A_n$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[y_0+4y_1+y_2\right] + \frac{x_4-x_2}{6}\left[y_2+4\ldots\right.$$

$$+\ldots+\frac{x_n-x_{n-2}}{6}\left[y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\cdot\left[y_0 + 4(y_1+y_3+\dots+y_{n-1}) + 2(y_2+y_4+\dots + y_{n-2}) + y_n\right]$$

bulunur.

Bu eşitlik de simpson yönteminde kullanılacak temel formüldür.

Örnek: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$ integralini $n=4$ alarak simpson yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}$ $\Rightarrow$ $(a,b) = (0,4)$, $h = \frac{4-0}{4} = 1$

x	$x_0=0$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$
y	$0.5=y_0$	$0.447=y_1$	$0.289=y_2$	$0.18=y_3$	$0.122=y_4$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}} \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1+y_3) + 2y_2 + y_4\right] = 1.236$$

olur.

Örnek: $\int_2^8 \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}\,dx$, $n=6$, simpson yöntemi ile hesapla

Çözüm: $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}$, $h = \frac{8-2}{6} = 1$

x	2	3	4	5	6	7	8
y	$1 = y_0$	$1.296 = y_1$	$1.474 = y_2$	$1.627 = y_3$	$1.754 = y_4$	$1.864 = y_5$	$1.96 = y_6$

$$\int_2^8 f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5) + 2(y_2+y_4) + y_6\right]$$

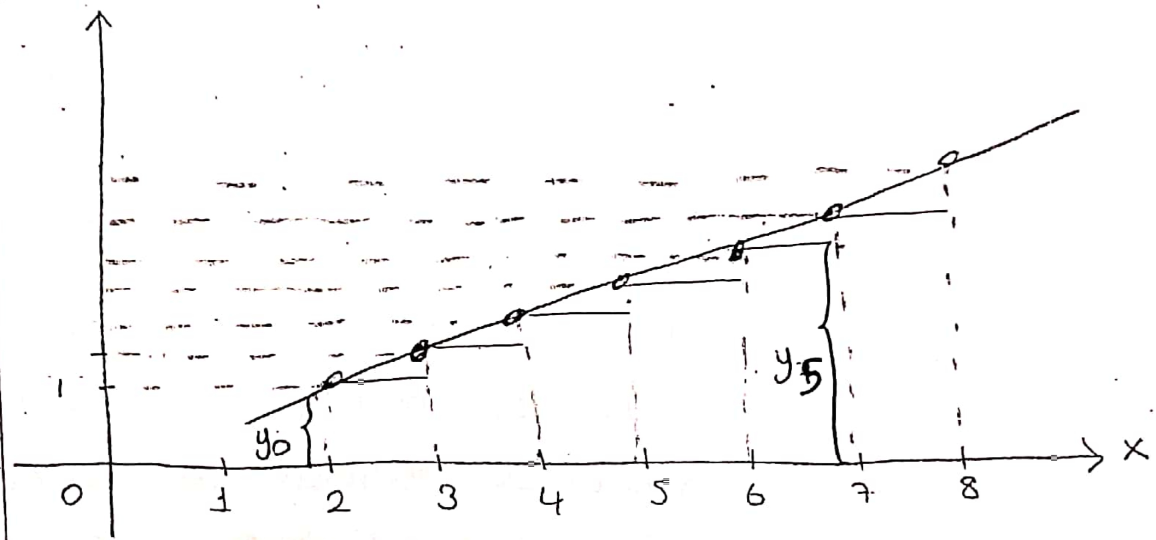
$$= 9.495$$

Yamuk yöntemi ile:

$$\int_2^8 f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5) + y_6 \right]$$

$$= 9.475$$

Dikdörtgenler yöntemi ile.



$$\int_2^8 f(x)\,dx \cong h\,(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)$$

$$= 8.995$$

Gerçek değeri

$$\int_2^8 \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}\,dx$$

$t^2 = 4+x^2$, $\cancel{2}t\,dt = \cancel{2}x\,dx$.

$$\int_2^8 f(x)\,dx = \int \frac{t\,dt}{t^{2/3}} = \int t^{1/3}\,dt =$$

$$= \frac{3t^{4/3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(4+x^2)^2}\Big|_2^8 =$$

$$= \frac{3}{4}\left(68^{2/3} - 4\right) = 9.49493\ldots$$

sonuç olarak simpson yöntemi en gerçeğe yakın sonuç verir.

Ödev -

1- $\int_0^{\pi} Ln(5-4\cos x)\,dx$, $n=4$, simpson.

2- $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$, $n=6$, simpson.

4. Enterpolasyon Yardımı ile İntegral :

Bir çok problemde $f(x)$ fonksiyonu yerine integrali kolay hesaplanabilen enterpolasyon polinomu kullanılır.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları ve karşılık gelen değerler $y_0, y_1, \ldots, y_n$ olmak üzere $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$ noktalarından geçen ve verilen $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşan enterpolasyon polinomu $p(x)$ olsun.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p(x)\,dx$$

olur.

9. BÖLÜM

ADİ TÜREVLİ DİF. DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Adi türevli pek çok dif. denklemin analitik çözüm yöntemi olmasına karşılık birçoğunun da bilinen yöntemler yardımıyla çözümü mümkün değildir. Değişkenlerine ayrılabilir. Tipten olsa bile bazı