örnek – $x + \ln x - 5 = 0$ denkleminin $(3.2, 4)$ aralığındaki kökünü bulunuz.

Çözüm – $(\underset{a}{3.2}, \underset{b}{4})$, $f(x) = x + \ln x - 5$

$f(a) = f(3.2) = -0.637$

$f(b) = f(4) = 0.386$,

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$= 3.698$ bulunur.

$f(3.698) = 0.0058 \Rightarrow (\underset{a}{3.2}, \underset{b}{3.698})$ arasında kök var. seçersek;

$$x_2 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$= 3.694$.

$f(x_2) = f(3.694) = 0.0007 \Rightarrow (\underset{a}{3.2}, \underset{b}{3.694})$ aralığında kök var. seçersek

$x_3 = 3.693$ bulunur.

$f(3.693) = -0.0001$

Kök $(\underset{a}{3.693}, \underset{b}{3.694})$ aralığındadır.

---

3. BÖLÜM

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

$f(x,y) = 0$

$g(x,y) = 0$

biçiminde iki bilinmeyen iki denklemden oluşan lineer olmayan denklem sisteminin çözümü yapılacaktır. Bilinmeyen sayısının ve denklem sayısının daha çok olması durumunda yöntem ler genişletilebilir.

1. Basit İterasyon Yöntemi:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

sistemi verilsin. Birinci denklemden x, ikinci denklemden y çekilerek

$$x = F(x,y)$$
$$y = G(x,y)$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Bu eşitlikler

$$x_{k+1} = F(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = G(x_k, y_k)$$

biçiminde iterasyon formüllerine dönüştürülür. Bu yöntemde iterasyona başlamak için x_0 ve y_0 başlangıç kökleri alınır. (seçilir) Seçilen F, G, x_0, y_0 için elde edilecek yaklaşık köklerin gerçek köke yaklaşması için yakınsama koşulları denilen aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerekir:

$$|F_x'(x_0,y_0)| + |F_y'(x_0,y_0)| < 1$$

$$|G_x'(x_0,y_0)| + |G_y'(x_0,y_0)| < 1$$

ÖRNEK - $0.1x^2 + 0.1y^2 - x + 0.8 = 0$

$0,1xy^2 + 0.1x - y + 0.8 = 0$

denklem sisteminin yaklaşık kökünü $x_0 = 0,5$, $y_0 = 0,5$ başlangıç verilerini kullanarak bulunuz.

Çözüm - $f(x,y) = 0,1x^2 + 0,1y^2 - x + 0,8 = 0$

$g(x,y) = 0,1xy^2 + 0,1x - y + 0,8 = 0$

1. denklemden

$$x = 0{,}1x^2 + 0{,}1y^2 + 0{,}8 = F(x,y)$$

2. denklemden

$$y = 0{,}1xy^2 + 0{,}1x + 0{,}8 = G(x,y)$$

olsun.

$$F_x' = 0{,}2x \quad , \quad F_y' = 0{,}2y \Rightarrow |F_x'(x_0,y_0)| + |F_y'(x_0,y_0)| = 0{,}1+0{,}1 = 0{,}2$$

$$G_x' = 0{,}1y^2 + 0{,}1 , \quad G_y' = 0{,}2xy \Rightarrow |G_x'(x_0,y_0)| + |G_y'(x_0,y_0)| = 0{,}075 < 1$$

yakınsama koşulları sağlanır

$$x_{k+1} = 0{,}1x_k^2 + 0{,}1y_k^2 + 0{,}8$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

$$y_{k+1} = 0{,}1x_k y_k^2 + 0{,}1x_k + 0{,}8$$

iterasyon formülleridir.

$$x_1 = 0{,}1 \cdot x_0^2 + 0{,}1 \cdot y_0^2 + 0{,}8 = 0{,}85$$

$$y_1 = 0{,}1 \cdot x_0 \cdot y_0^2 + 0{,}1x_0 + 0{,}8 = 0{,}8625$$

bulunur

$$x_2 = 0{,}1x_1^2 + 0{,}1y_1^2 + 0{,}8 = 0{,}9466$$

$$y_2 = 0{,}1x_1 \cdot y_1^2 + 0{,}1x_1 + 0{,}8 = 0{,}9482$$

$$x_3 = 0{,}9795$$

$$y_3 = 0{,}9798$$

elde edilir

Örnek: $x^2 - 2x - y + 0{,}5 = 0$

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

$(x_0, y_0) = (0,1)$ alarak yaklaşık çözümü bulun

Çözüm: 1. denklemden

$$x = \frac{1}{2}(x^2 - y + 0{,}5) = F(x,y)$$

2. denklemden

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} = G(x,y)$$

ikinciye y elde ederken $x^2+4y^2-4+y-y=0 \Rightarrow y = x^2+4y^2-4+y$ yazabilirsin. Sonuç değişmez, Yakınsama koşulları

$$|F'_x(x_0,y_0)| + |F'_y(x_0,y_0)| = 0,5 < 1$$

$$|G'_x(x_0,y_0)| + |G'_y(x_0,y_0)| = \left|\frac{-x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\right| + 0 < 1$$

sağlanır. İterasyon formülleri

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k^2 - y_k + 0,5)$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x_k^2} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

1. İterasyon:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0^2 - y_0 + 0.5) = -0,25$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4-x_0^2} = 1$$

2. İterasyon:

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1 + 0,5) = -0.219$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4-x_1^2} = 0.992$$

3. İterasyon:

$$x_3 = -0.222$$

$$y_3 = 0.996 \ //$$

2) Sistemler için Newton-Raphson Yöntemi :

$$f(x,y) = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

denklem sistemini ele alalım. Denklem sisteminin kesin çözümünün x_{i+1}, y_{i+1} olduğunu varsayalım. f ve g-nin (x_i, y_i) noktasında Taylor seri açılımını yapalım.

$$f(x,y) = f(x_i,y_i) + f'_x(x_i,y_i).(x-x_i) + f'_y(x_i,y_i)(y-y_i) +$$

$$+ \frac{1}{2!} f''_{xx}(x_i,y_i)(x-x_i)^2 + f''_{xy}(x_i,y_i)(x-x_i)(y-y_i) +$$

$$+ \frac{1}{2!} f''_{yy}(x_i,y_i)(y-y_i)^2 + \ldots$$

x_{i+1} ve y_{i+1} kesin çözümü olduğundan $f(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$, $g(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$ 'dır. Taylor açılımında x yerine x_{i+1}, y yerine y_{i+1} yazarsak

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0 = f(x_i, y_i) + f'_x (x_{i+1} - x_i) + f'_y (y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{2!} f''_{xx} (x_{i+1} - x_i)^2 + f''_{xy} (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{2!} f''_{yy} (y_{i+1} - y_i)^2 + \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= x_{i+1} - x_i \cong 0 \\ \Delta y &= y_{i+1} - y_i \cong 0 \end{aligned}\right\} \text{dır}$$

Ayrıca $(x_{i+1} - x_i)^2$, $(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)$, $(y_{i+1} - y_i)^2$ ve diğer kuvvetler sıfıra oldukça yakındır. Bu terimler gözardı edilirse seri açılımı

$$0 \cong f(x_i, y_i) + f'_x(x_i, y_i) \cdot \Delta x + f'_y(x_i, y_i) \cdot \Delta y$$

olur veya

$$\boxed{f'_x(x_i, y_i) \cdot \Delta x + f'_y(x_i, y_i) \cdot \Delta y = -f(x_i, y_i)}$$

elde edilir.

$g(x, y)$ nin Taylor açılımından da benzer olarak;

$$\boxed{g'_x(x_i, y_i) \cdot \Delta x + g'_y(x_i, y_i) \, \Delta y = -g(x_i, y_i)}$$

bulunur. Bu son iki eşitlikte Δx ve Δy -yi bilinmeyen olarak alırsak ve Cramer kuralı ile çözülürse;

$$\Delta x = \frac{\begin{vmatrix} -f & f'_y \\ -g & g'_y \end{vmatrix}_{(x_i, y_i)}}{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}_{(x_i, y_i)}}, \quad \Delta y = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & -f \\ g'_x & -g \end{vmatrix}_{(x_i, y_i)}}{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}_{(x_i, y_i)}}$$

$$J = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}, \quad J_x = \begin{vmatrix} f & f'_y \\ g & g'_y \end{vmatrix}, \quad J_y = \begin{vmatrix} f'_x & f \\ g'_x & g \end{vmatrix}$$

33 denirse;

$\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ve $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ kullanılırsa

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{J_x}{J}} \quad , \quad \boxed{y_{i+1} = y_i - \frac{J_y}{J}}$$

elde edilir. Verilen (x_0, y_0) başlangıç değeri kullanılarak bu formüllerle gerçek köke adım adım yaklaşılır.

Örnek – $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$

$g(x,y) = 1 - e^x - y = 0$

denklem sisteminin $(x_0, y_0) = (1, -1.7)$ yakınlarındaki kökünü yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm –

$f(x_0, y_0) = 0.11$

$g(x_0, y_0) = -0.00183$

$f'_x = -2x \quad , \quad f'_x(x_0, y_0) = -2$

$g_x = -e^x \quad , \quad g_x(x_0, y_0) = -2.7183$

$f'_y = -2y \quad , \quad f'_y(x_0, y_0) = 3.4$

$g'_y = -1 \quad , \quad g'_y(x_0, y_0) = -1$

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} -2 & 3.4 \\ -2.7183 & -1 \end{vmatrix} = 11.2422$$

$$J_x(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0.11 & 3.4 \\ -0.0183 & -1 \end{vmatrix} = -0.0478$$

$$J_y(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} -2 & 0.11 \\ -2.7183 & -0.0183 \end{vmatrix} = 0.3356$$

bulunur.

$$x_1 = x_0 - \frac{J_x(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)} = 1 - \frac{-0.0478}{11.2422} = 1.0043$$

$$y_1 = y_0 - \frac{J_y(x_0,y_0)}{J(x_0,y_0)} = -1,7 - \frac{0,335}{-11.2422} = -1,7299$$

2. İterasyon;

$f_x(x_1,y_1) = -2,0086$ $\quad$ $f_y(x_1,y_1) = 3,4598$

$g_x(x_1,y_1) = -2,73$ $\quad$ $g_y(x_1,y_1) = -1$

$$f(x_1,y_1) = -0,0012$$

$$g(x_1,y_1) = -0,001$$

$$J(x_1,y_1) = \begin{vmatrix} -2.0086 & 3.4598 \\ -2,73 & -1 \end{vmatrix} = 11,4539$$

$$J_x(x_1,y_1) = \begin{vmatrix} -0.0012 & 3,4598 \\ -0,001 & -1 \end{vmatrix} = 0,0015$$

$$J_y(x_1,y_1) = \begin{vmatrix} -2.0086 & -0.0012 \\ -2.73 & -0.001 \end{vmatrix} = -0,0031$$

$$x_2 = x_1 - \frac{J_x}{J}(x_1,y_1) = 1.0043 - \frac{0.0015}{11.4539} = 1.0042$$

$$y_2 = y_1 - \frac{J_y}{J}(x_1,y_1) = -1,7299 - \frac{-0.0031}{11,4539} = -1.7296$$

$f(x_2,y_2) = 6.62.10^{-5}$

$g(x_2,y_2) = -1.22.10^{-4}$

Bu ikisi 0 olsa idi gerçek kökü bulmuş olurduk

ÖRNEK–

$$x^2 + xy - 10 = 0$$

$$y + 3xy^2 - 57 = 0$$

$x_0 = 1,5$, $y_0 = 3,5$ yakınındaki kökünü yaklaşık olarak bulunuz

35

31.03.06.

4. BÖLÜM

SONLU FARKLAR

Fonksiyonların analitik olarak verildiği durumlarda istenilen noktadaki fonksiyonun değerini hesaplamak, fonksiyonun istenilen mertebedeki türevinin o noktadaki değerini bulmak ya da fonksiyonun belirli aralıklarda integralini hesaplamak kolaylıkla yapılabilir.

ÖRNEK – $f(x) = x \cdot e^x$

$$f(1), \quad f''(1), \quad \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$$

kolaylıkla hesaplanabilir. Çünkü fonk. belli.

Ancak fonksiyon belirli olmadan fonksiyonun bazı noktalardaki değerleri belli iken bu tür hesaplamalar sonlu farklar aritmetiği kullanılarak yaklaşık olarak yapılabilir.

ÖRNEK Bir $f(x)$ fonksiyonunun geçtiği nokta

$(0,2)$, $(1,4)$, $(2,5)$ ise.

$$f(1{,}5) = ? \quad f''(2{,}1) = ? \quad , \quad \int_0^4 f(x)dx$$

hesaplamaları sonlu farklar ile yapılır.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları verildiğinde

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + h$$

olsun. Buradaki h-ya adım uzunluğu, artma miktarı denir. x_i-lere karşılık gelen $f(x_i)$ değerleri

$$y_i = f_i = f(x_i)$$

olarak gösterilecektir.

1. İleri Fark Operatörü :

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu için

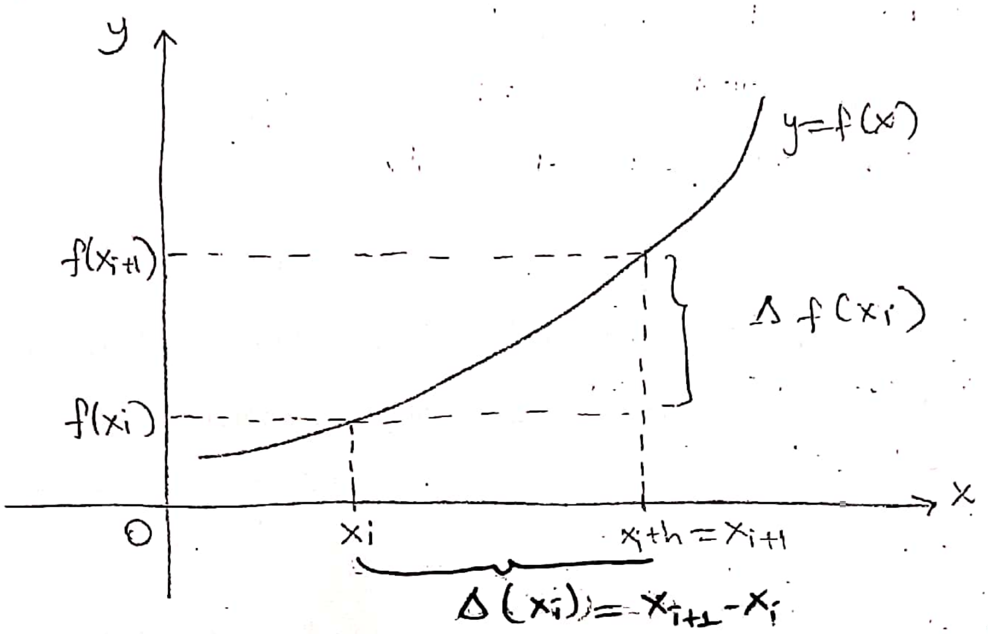
$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

biçiminde verilen Δ operatörüne ileri fark oper. denir.

x yerine x_i yazılırsa bu operatör:

$$\Delta f(x_i) = \Delta y_i = f(x_i+h) - f(x_i) =$$
$$= f(x_{i+1}) - f(x_i) =$$
$$= y_{i+1} - y_i$$

yani $\boxed{\Delta y_i = y_{i+1} - y_i}$ biçimindeki operatöre ileri fark operatörü denir.



ikinci mertebeden ileri fark işlemi:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i)$$

olarak tanımlanır. Daha açık olarak

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) \overset{\text{Alineer}}{=} \Delta y_{i+1} - \Delta y_i =$$
$$= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) =$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

olur.

Benzer olarak r-inci mertebeden ileri fark işlemi

$$\Delta^r y_i = \Delta(\Delta^{r-1} y_i) = \Delta^{r-1}(\Delta y_i)$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK-

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	3	5	7	8	11	12

tablosu veriliyor.

$\Delta^3 y_2 = ?$

Çözüm.

x_i	$1 = x_0$	2	3	4	5	6
y_i	3	5	7	8	11	12

Lineer

$$\Delta^3 y_2 = \Delta^2(\Delta y_2) = \Delta^2(y_3 - y_2) = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 =$$
$$= \Delta(\Delta y_3) - \Delta(\Delta y_2) = \Delta(y_4 - y_3) - \Delta(y_3 - y_2) =$$
$$= \Delta y_4 - \Delta y_3 - \Delta y_3 + \Delta y_2 =$$
$$= y_5 - y_4 - y_4 + y_3 - y_4 + y_3 + y_3 - y_2 =$$
$$= y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2 = 12 - 3.11 + 3.8 - 5 =$$
$$= -4$$

ÖRNEK- $f(x) = 2x^2$ fonksiyonu için $[1,5]$ aralığında $h=1$ alarak İleri fark tablosunu oluşturunuz.

Çözüm- $[1,5]$, $1 = x_0$

$x_1 = x_0 + h = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_0 = 1$	$y_0 = 2$				
		$6 = \Delta y_0$			
2	8		4		
		$10 = \Delta y_1$		$0 = \Delta^3 y_0$	
3	18		4		$\Delta^4 y_0 = 0$
		$14 = \Delta y_2$		$0 = \Delta^3 y_1$	
4	32		4		
		$18 = \Delta y_3$			
$x_4 = 5$	$y_4 = 50$				

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 2$

$y_1 = f(x_1) = f(2) = 8$

⋮

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 8 - 2 = 6$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 18 - 8 = 10$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 32 - 18 = 14$

$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 50 - 32 = 18$

$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 10-6 = 4$

$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 14-10 = 4$

$\Delta^2 y_2 = \Delta(\Delta y_2) = \Delta(y_3 - y_2) = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 18-14 = 4$

$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(\Delta y_1 - \Delta y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta y_0.$

ÖRNEK $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu için $[1,9]$ aralığında $h=2$ alarak ileri fark tablosunu yapınız.

Çözüm-

* Virgülden sonra 2 ondalık alarak kullanıldı.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_0=1$	$y_0=1$				
		$0.73 = \Delta y_0$			
$x_1=3$	$y_1=1.73$		$-0.21 = \Delta^2 y_0$		
		0.51		$0.12 = \Delta^3 y_0$	
$x_2=5$	$y_2=2.24$		-0.1		$-0.08 = \Delta^4 y_0$
		0.41		0.04	
$x_3=7$	$y_3=2.65$		-0.06		
		0.35			
$x_4=9$	$y_4=3$				

2 Geri fark Operatörü :

f fonksiyonunun x_i noktasındaki geri farkı

$$\boxed{\nabla y_i = y_i - y_{i-1}}$$

ile tanımlanır. Buradaki ∇ (ters delta) operatörüne geri fark operatörü denir. İkinci mertebeden geri fark

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i).$$

ve r-inci mertebeden geri fark işlemi

$$\nabla^r y_i = \nabla(\nabla^{r-1} y_i) = \nabla^{r-1}(\nabla y_i)$$

biçiminde tanımlanır.

ÖRNEK- $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $[0,3]$ aralığında $h=1$ alarak geri fark tablosunu yapınız.

Çözüm-

39

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$			
$x_1 = 1$	$y_1 = 1$	$\nabla y_1 = 1$		
$x_2 = 2$	$y_2 = 8$	$\nabla y_2 = 7$	$\nabla^2 y_2 = 6$	
$x_3 = 3$	$y_3 = 27$	$\nabla y_3 = 19$	$\nabla^2 y_3 = 12$	$\nabla^3 y_3 = 6$

$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}$ değeri tabloda bulunmaz

$\nabla y_1 = y_1 - y_0 = 1$

$\nabla y_2 = y_2 - y_1 = 7$

$\nabla y_3 = y_3 - y_2 = 19$

$\nabla^2 y_1 = \nabla(\nabla y_1) = \nabla(y_1 - y_0) = \nabla y_1 - \nabla y_0$ yok tabloda bulunmaz

$\nabla^2 y_2 = \nabla(\nabla y_2) = \nabla(y_2 - y_1) = \nabla y_2 - \nabla y_1 = 6$

ÖRNEK_ $f(x) = 4x$, $[0,2]$ aralığında $h = \frac{1}{2}$ alarak geri fark tablosu yapalım.

Çözüm_

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
0	0				
0.5	2	2			
1	4	2	0		
1.5	6	2	0	0	
2	$y_4 = 8$	$2 = \nabla y_4$	$0 = \nabla^2 y_4$	$0 = \nabla^3 y_4$	$0 = \nabla^4 y_4$

3. Kaydırma Operatörü :

E sembolü ile gösterilen bu operatör $y = f(x)$ fonksiyonuna

$$E\, f(x) = f(x+h)$$

işlemini yaptırır x_i deki değeri ise

$$E\, f(x_i) = E y_i = y_{i+1}$$

dir.

ikinci ve r-inci mertebeden kaydırma işlemi

$$E^2 y_i = y_{i+2}$$
$$E^r y_i = y_{i+r}$$

olur. Burada r bir rasyonel sayı da olabilir

$$E^{\frac{1}{2}} y_i = y_{i+\frac{1}{2}} \quad , \quad E^{-1} y_i = y_{i-1}$$

olarak yazılabilir.

İleri fark operatörü ile arasındaki bağıntı şudur;

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = E y_i - y_i = (E-1) y_i \Rightarrow \boxed{\Delta = E-1}$$

olur.

Geri fark operatörü ile ilişkisi şudur:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} = y_i - E^{-1} y_i = (1-E^{-1}) y_i \Rightarrow \boxed{\nabla = 1-E^{-1}}$$

olur.

4) Merkezi Fark Operatörü :

Bir f(x) fonksiyonunda bağımsız değişkenin yarım adım ilerisindeki değer ile yarım adım gerisindeki değer arasındaki farka merkezi fark denir. Merkezi fark operatörü δ ile gösterilir.

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

dır. xi-ye uygularsak

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

olarak yazılır.

İkinci ve r-inci mertebe merkezi fark işlemi

$$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i)$$

ve

$$\delta^r y_i = \delta(\delta^{r-1} y_i)$$

biçiminde yazılır.

4

ÖRNEK $\delta^2 y_2 = ?$

Çözüm:

$$\delta^2 y_2 = \delta(\delta y_2) = \delta\left(y_{2+\frac{1}{2}} - y_{2-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \delta\left(y_{\frac{5}{2}} - y_{\frac{3}{2}}\right) = \delta y_{\frac{5}{2}} - \delta y_{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left(y_{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} - y_{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\right) - \left(y_{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} - y_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= y_3 - y_2 - y_2 + y_1$$

Kaydırma operatörü ile ilişkisi;

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$= E^{1/2} y_i - E^{-1/2} y_i$$

$$= \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) y_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}} \quad \text{olur}$$

5) Ortalama Operatörü :

μ ile gösterilen ortalama operatörü

$$\mu y_i = \frac{1}{2} \cdot \left(y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

biçiminde tanımlanır. İkinci ve r-inci mertebe ortalama işlemi

$$\mu^2 y_i = \mu(\mu y_i)$$

$$\mu^r y_i = \mu(\mu^{r-1} y_i)$$

olarak tanımlanır.

E operatörü ile arasındaki bağıntı:

$$\mu y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) y_i$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} E^{1/2} + E^{-1/2} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEKLER

① – $(3\Delta+2)(2E-1)\,x^2 = ?$

Çözüm –

$$(3\Delta+2)(2E-1)f(x) = (3\Delta+2)\,(2Ef(x)-f(x))$$
$$= (3\Delta+2).\,(2.f(x+h)-f(x))$$
$$= 6\,\Delta f(x+h) - 3\,\Delta f(x) + 4f(x+h) - 2f(x)$$
$$= 6.\,(f(x+2h)-f(x+h)) - 3(f(x+h)-f(x))$$
$$+4\,f(x+h) - 2f(x)$$

$f(x) = x^2$.

$$= 6\,[(x+2h)^2-(x+h)^2] - 3(x+h)^2 + 3x^2$$
$$+4(x+h)^2 - 2x^2$$
$$= 6\,(x+2h)^2 - 5\,(x+h)^2 + x^2$$

② – $\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm –

Bu tip sorularda tanımlar ya da kaydırma operatörü kullanılır.

I. yol $\mu^2 y_i$ = tanımdan hesaplanır. } eşitliği gösterilir.
$1+\frac{1}{4}\delta^2 y_i$ = tn.dan hesaplanır

II. yol $\mu = \frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2}) \Rightarrow \mu^2 = \frac{1}{4}(E^1+E^{-1}+2)$

$$1+\frac{1}{4}\delta^2 = 1+\frac{1}{4}(E^{1/2}-E^{-1/2})^2 = 1+\frac{1}{4}(E^1+E^{-1}-2)$$

$$\frac{4+E+E^{-1}-2}{4} = \frac{E+E^{-1}+2}{4}$$

Sonuç: $\mu^2 = 1+\frac{1}{4}\delta^2$

③ – $f(x) = x^4$, $\mu.\delta f(x) = ?$

Çözüm –

$$\mu.\delta f(x) = \mu(\delta(f(x))) = \mu\,(f(x+\tfrac{h}{2}) - f(x-\tfrac{h}{2}))$$
$$= \mu f(x+\tfrac{h}{2}) - \mu f(x-\tfrac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+h)+f(x)\right) - \frac{1}{2}\left(f(x)+f(x-h)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x+h)^4 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}(x-h)^4$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+h)^4 - (x-h)^4\right)$$

4)

x	2	4	6	8	10	12
y	$-4 = y_0$	$-1 = y_1$	$3 = y_2$	$5 = y_3$	$6 = y_4$	$8 = y_5$

tablosu veriliyor.

$\mu^2\delta^2 y_2 = ?$

Çözüm

$$\mu^2\delta^2 y_2 = \mu^2\delta(\delta y_2) = \mu^2\delta\left(y_{2+\frac{1}{2}} - y_{2-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \mu^2\delta\left(y_{\frac{5}{2}} - y_{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \mu^2\left(\delta y_{\frac{5}{2}} - \delta y_{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \mu^2\left(y_{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} - y_{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} - y_{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \mu^2\left(y_3 - y_2 - y_2 + y_1\right)$$

$$= \mu\left(\mu y_3 - 2\mu y_2 + \mu y_1\right)$$

$$= \mu\frac{1}{2}\left(y_{7/2} + y_{5/2} - 2y_{5/2} - 2y_{3/2} + \right.$$

$$\left. + y_{3/2} + y_{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu y_{7/2} - \mu y_{5/2} - \mu y_{3/2} + \right.$$

$$\left. + \mu y_{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(y_4 + y_3 - y_3 - y_2 - y_2 - y_1 + y_1 + y_0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(y_4 - 2y_2 + y_0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(6 - 2.3 + (-4)\right) = -1$$

✯ FARK DENKLEMLERİ

Uygulamalı bilimlerde bir probleme karşılık gelen

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

olarak verilen diferansiyel denklemlerle sık karşılaşılır.

Bu problemlerin çözümlerinde $y(x)$ çözüm fonksiyonu çok nedeli bir fonksiyon olarak alındığından bazen çözüme çok güç varılmakta, bazen ise çözüm bulunamamaktadır. Bunun yerine x'in sürekli olmadığını göz önüne alarak aranan kesikli $y(x)$ çözümünün bulunması kolaylık sağlar. Bu durumda da fark denklemleri karşımıza çıkar.

Tanım – x bağımsız, y de bağımlı değişken olmak üzere x, y ve y'nin değişik mertebeden ileri farklarını bulunduran denklemlere FARK DENKLEMLERİ denir.

Örnek

$$2\,\Delta y_k + 3\,\Delta^2 y_k - \Delta^3 y_k = 0$$

$$y_{k+3} - 2y_{k+1} + y_k = 0$$

gibi denklemler birer fark denklemidir.

Genel olarak fark denklemleri:

$$F(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n}) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Fark denklemleri özellikle değişkenin zaman değişkeni olarak ele alınması durumunda ve zaman aralıklarının çok küçülmesi durumunda diferansiyel denklemlere dönüşürler.

Tanım – (Bir fark denkleminin mertebesi)

Fark denklemlerinin mertebesi denklemdeki bağımlı değişkenin en büyük ve en küçük indisleri arasındaki farktır.

Örnek

$$3y_{k+2} - 2y_{k+1} + 4y_k = f(k)$$

mertebesi $= (k+2) - (k) = 2$ dir.

07.04.06.

LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Verilen bir fark denkleminde bağımlı değişkenin kuvveti 1 ise fark denklemine lineer fark denklemi denir.

Genel olarak lineer fark denklemi

$$y_{k+n} + a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} + \dots + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f(k)$$

biçiminde gösterilir. Eğer $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ katsayıları sabit ise sabit katsayılı, değişken ise değişken katsayılı lineer fark denklemi adını alır.

$$y_{k+3} + 2y_{k+1} - 3y_k = 2^k$$

Sabit katsayılı lineer fark denklemi, 3. mertebedendir.

$$y_{k+2} - 4y_{k+1}^2 + 3y_k = 0.$$

Lineer olmayan fark denklemi

$$y_{k+5} - k\,y_{k+2} + 3k^2 \cdot y_k = \sin(2k)$$

Değişken katsayılı lineer fark denklemi, 5. mertebeden

Genel fark denkleminde;

$$f(k) = 0$$

ise denkleme homojen fark denklemi denir.

Homojen Lineer Fark Denklemleri

$$y_{k+n} + a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0$$

biçiminde yazılır. Bu denklem n-inci mertebeden homojen sabit katsayılı, lineer fark denklemidir. Bu tip denklemlerin çözümü

$$y_k = r^k$$

biçimindedir.

Bu tip çözüm varsa bu çözümler denklemi sağlar. Denklemde yerine yazalım:

$$y_k = r^k, \quad y_{k+1} = r^{k+1}, \quad y_{k+2} = r^{k+2}, \ldots, \quad y_{k+n} = r^{k+n}$$

$$r^{k+n} + a_{n-1} \cdot r^{k+n-1} + \ldots + a_1 r^{k+1} + a_0 \cdot r^k = 0$$

elde edilir. r^k parantezine alınırsa;

$$(r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0) r^k = 0$$

bulunur. $r^k \neq 0$ için

$$r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme homojen lineer fark denkleminin karakteristik denklemi denir.

ÖRNEK - $y_{k+2} - 4 y_{k+1} + 6 y_k = 0$

homojen denklemin çözümü $\boxed{y_k^h = r^k}$ tipindedir.

$$y_{k+1} = r^{k+1}, \quad y_{k+2} = r^{k+2}$$

olur. Bunları fark denkleminde yazalım!

$$r^{k+2} - 4r^{k+1} + 6r^k = 0$$

$$(r^2 - 4r + 6) r^k = 0, \quad r^k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{r^2 - 4r + 6}_{\text{karakteristik denklem}} = 0$$

ÖRNEK - $y_{k+3} - 2 y_{k+1} + y_k = 0$

Karakteristik denklemi; $r^k(r^3 - 2r + 1) = 0$

$r^3 - 2r + 1 = 0$ dır.

Karakteristik denklem n-inci dereceden bir denklemdir. ve tam olarak n-tane kökü vardır. Bu kökler

$$r_1, r_2, \ldots, r_n$$

olsun. Homojen denklemin çözümü aşağıdaki gibi incelenir:

(1) $r_1, r_2, \dots, r_n$ - lerin hepsi birbirinden farklı reel sayı ise genel homojen lineer fark denkleminin çözümü:

$$y_k^h = c_1 . r_1^k + c_2 . r_2^k + \dots + c_n . r_n^k$$

biçimindedir.

ÖRNEK $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$ veriliyor. $y_k^h = ?$

Çözüm-

Karakteristik denklem; $r^2 - 5r + 6 = 0$

kökleri $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ tür.

$$y_k^h = c_1 . r_1^k + c_2 . r_2^k$$
$$= c_1 . 2^k + c_2 . 3^k$$

(2) $r_1, r_2, \dots, r_n$ köklerinden bazıları katlı reel sayı ise ve kalan kökler de farklı reel sayılar ise homojen çözüm;

$r_1 = r_2 = \dots = r_m = r$

ve

$r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n$ -ler farklı reel sayı olsun.

$$y_k^h = (c_1 + c_2 . k + \dots + c_m k^{m-1}) r^k + c_{m+1} . r_{m+1}^k + \dots + c_n . r_n^k$$

çözümdür.

ÖRNEK Karakteristik denkleminin kökleri $r_1 = r_2 = r_3 = -2$, $r_4 = 1$, $r_5 = 3$ olan 5. mertebeden homojen lineer fark denkleminin çözümü:

$$y_k^h = (c_1 + c_2 k + c_3 k^2)(-2)^k + c_4 . 1^k + c_5 . 3^k$$

dır.

(3) $r_1, r_2, \dots, r_n$ köklerinden bazıları kompleks sayı ise örneğin;

$r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$, $r_3, r_4, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ ise

$r_1 = a+ib$ için $R = |r_1| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ bulunur.

Homojen çözüm:

$$y_k^h = (c_1 . \cos k\theta + c_2 . \sin k\theta) . R^k + c_3 . r_3^k + \dots + c_n . r_n^k$$

olur.

ÖRNEK.- $y_{k+2} + 4 y_k = 0$

Karakteristik denklemi:

$$r^2 + 4 = 0$$

kökleri; $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$

$r_1 = 2i$ için $R = |r_1| = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

$$y_k^h = \left(c_1 . \cos \frac{k\pi}{2} + c_2 . \sin \frac{k\pi}{2}\right) . 2^k$$

ÖRNEKLER

① - $y_{k+1} - 2y_k + 2 y_{k-1} = 0$, $y_k^h = ?$

Çözüm -

(Çözümlerde en küçük y_k olacak o yüzden düzenleme yapıcaz)

$k \to k+1$ yazalım.

$$y_{k+2} - 2 y_{k+1} + 2 y_k = 0$$

bulunur.

Karakteristik denklem; $r^2 - 2r + 2 = 0$

Kökleri, $r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \mp i$

$r_1 = 1+i$ için $R = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ olur. Buna göre

$$y_k^h = \left(c_1 . \cos \frac{k\pi}{4} + c_2 . \sin \frac{k\pi}{4}\right) . (\sqrt{2})^k$$

olur.

② $y_{k+3} + 2y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 0$ için. $y_k^h = ?$

Çözüm -

:-)

Karakteristik denklem: $r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$.

$r^2(r+2) - (r+2) = 0$

$(r+2)(r^2-1) = 0$

$r_1 = -2,\ r_2 = -1,\ r_3 = 1$

$y_k^h = c_1 . (-2)^k + c_2 . (-1)^k + c_3 . 1^k$ dır.

③ $y_{k+3} - 7y_{k+2} + 16y_{k+1} - 12y_k = 0 \Rightarrow y_k^h = ?$

Çözüm -

Karakteristik denklem:

$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$.

$r_1 = 3,\ r_2 = 2$.

$$\begin{array}{l|l} r^3 - 7r^2 + 16r - 12 & r-3 \\ \underline{-\ r^3 - 3r^2} & \overline{r^2 - 4r + 4} \\ \quad -4r^2 + 16r - 12 & \\ \quad \underline{-\ -4r^2 + 12r} & \\ \qquad 4r - 12 & \\ \qquad \underline{4r - 12} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$r^2 - 4r + 4$: $r_2 = 2$, $r_3 = 2$

$y_k^h = (c_1 + c_2 k)2^k + c_3 . 3^k$ dır.

④ - $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 4y_k = 0$

karakteristik denklemi

$r^2 - 5r + 4 = 0$: $r_1 = 1$, $r_2 = 4$.

$y_k^h = c_1 . 1^k + c_2 4^k$

$= c_1 + c_2 . 4^k$.

sağlamasını yapalım;

* Her polinom kökleri çarpımı sabit terimi verir.

$y_k = c_1 + c_2 . 4^k$, $y_{k+1} = c_1 + c_2 4^{k+1}$, $y_{k+2} = c_1 + c_2 . 4^{k+2}$

denklemde yazalım.

$$\cancel{c_1} + c_2 . \underbrace{4^{k+2}}_{4^k . 16} - \cancel{5c_1} - 5c_2 . \underbrace{4^{k+1}}_{4 . 4^k} + \cancel{4c_1} + 4c_2 \underbrace{4^k}_{4^k} = 0$$

Homojen Olmayan Lineer Fark Denklemleri

Bu tür denklemlerin genel formu.

$$y_{k+n} + a_{n-1} . y_{k+n-1} + \dots + a_1 . y_{k+1} + a_0 . y_k = f(k)$$

$f(k) \neq 0$.

biçimindedir. Bu tür denklemlerin çözümü de y_k^h homojen kısmının çözümü, $y_k^{ö}$ denklemin bir özel çözümü olmak üzere

$$\boxed{y_k^G = y_k^h + y_k^{ö}}$$

biçimindedir.

$y_k^{ö}$, özel çözümü $f(k)$ fonksiyonunun türüne göre aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$f(k)$	$y_k^{ö}$ nün tipi
$A . r^k$	$B . r^k$
k^n , $n \in \mathbb{N}$	$A_1 k^n + A_2 . k^{n-1} + \dots + A_n k + A_{n+1}$
$\sin(Ak)$ veya $\cos(Ak)$	$A \sin Ak + B . \cos Ak$
$A r^k . k^n$	$C . r^k (A_1 . k^n + \dots + A_n k + A_{n+1})$
$r^k . \sin(Ak)$	ö? $r^k (C . \sin Ak + D . \cos Ak)$

Her ikisi verilerde aynı ancak katsayıları aynı olmalı.

NOT: Eğer $f(k)$ fonksiyonu birkaç fonksiyonun toplamından oluşuyorsa herbir terim için ayrı ayrı özel çözüm bulunup bunların toplamı fark denkleminin özel çözümü olarak alınır.

$f(k)$ fonksiyonu ile bulunan homojen çözümde aynı türden terimler varsa aranılan özel çözüm homojen çöz. (y_k^h) dan farklı lineer bağımsız çözüm içerene kadar k ile çarpılarak özel çözüm aranır.

ÖRNEKLER :

① - $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 3^k$ fark denkleminin genel çözümü nedir?

Çözüm - $r^2 - 3r + 2 = 0$ karakteristik denklem

Kökler $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ olur.

Homojen çözüm :

$$y_k^h = c_1 + c_2 . 2^k$$

$f(k) = 3^k$ dır.

y_k^h ta 3^k tipinden çözüm yok.

Özel çözümü $\boxed{y_k^ö = A.3^k}$ tipinde ararız.

$y_k^ö = A.3^k$, $y_{k+1} = A3^{k+1}$, $y_{k+2} = A3^{k+2}$

fark denk de yazalım.

$$A.3^{k+2} - 3.A.3^{k+1} + 2A.3^k = 3^k$$

$$9.A.3^k - 9A3^k + 2A3^k = 3^k$$

$$\Rightarrow 2A = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ dır.}$$

$y_k^ö = \frac{1}{2}.3^k$ olur. Genel çözüm;

$$y_k^G = y_k^h + y_k^ö = c_1 + c_2.2^k + \frac{1}{2}.3^k \text{ dır.}$$

② $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 2^k \Rightarrow y_k^G = ?$

Çözüm -

$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 3.$

$y_k^h = c_1 . 2^k + c_2 . 3^k.$

$f(k) \; 2^k. \qquad (c_1 = 1, c_2 = 0$ için $y_k^h = 2^k$ olur.$)$

$f(k)$ ile y_k^h lineer bağımlıdır. Ortak terim vardır. O halde

Özel çözüm

$$y_k^ö = A . 2^k . k$$

biçiminde aranır.

$y_k = A . 2^k . k, \quad y_{k+1} = A 2^{k+1} (k+1), \quad y_{k+2} = A . 2^{k+2} (k+2)$

fark denkleminde yerine yazalım.

$$A . 2^{k+2} . (k+2) - 5 . A . 2^{k+1} . (k+1) + 6 . A . 2^k . k = 2^k$$

$$4A . 2^k . (k+2) - 10 A 2^k (k+1) + 6 A 2^k . k = 2^k$$

$$4A . 2^k . k + 8A 2^k - 10 A 2^k . k - 10 A . 2^k + 6 A 2^k . k = 2^k$$

$$-2A . 2^k = 2^k$$

$$\Rightarrow -2A = 1$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$y_k^ö = -\frac{1}{2} . k . 2^k$ olur. Genel çözüm:

$$y_k^G = c_1 . 2^k + c_2 . 3^k - \frac{1}{2} k . 2^k$$ dir.

③ - $y_{k+3} + 3 y_{k+2} - 4 y_k = 18k - 6$ veriliyor.

Genel çözümü bulunuz.

Çözüm -

Karakteristik denklemi, $r^3 + 3r^2 - 4 = 0.$

Kökleri : $r_1 = 1.$

$$\begin{array}{r|l} r^3 + 3r^2 - 4 & r - 1 \\ \underline{r^3 - r^2} & r^2 + 4r + 4 \\ 4r^2 - 4 & \\ 4r^2 - 4r & \end{array}$$

$r_2 = -2$, $r_3 = -2$

Homojen çözüm:

$$y_k^h = c_1 . 1^k + (c_2 + c_3 k)(-2)^k$$

$$y_k^h = c_1 + c_2 . (-2)^k + c_3 . k . (-2)^k$$

$f(k) = 18k - 6$ ($c_1 = -6$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ alınırsa $y_k^h = -6$ dır)
$f(k)$ ile ortak terimi mevcut.

$y_k^ö = Ak + B$ olmalı fakat; ortak terim bulunmasından dolayı;

$y_k^ö = (Ak + B)k$ biçiminde aranır.

$y_k = Ak^2 + Bk$, $y_{k+1} = A(k+1)^2 + B(k+1)$, $y_{k+2} = A(k+2)^2 + B(k+2)$

$y_{k+3} = A(k+3)^2 + B(k+3)$

fark denk. de yerine yazılıp düzenlenirse;

$A = 1$, $B = -1$ bulunur.

B yi kontrol et (-1) mi? (-1) mi?

$y_k^ö = k^2 - k$. olur. Genel çözüm;

$$y_k^G = c_1 + c_2 . (-2)^k + c_3 k . (-2)^k + k^2 - k$$

olur.

(4) .. $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4 . 2^k + k + 2$.

Çözüm-

$y_k^h = c_1 + c_2 . 2^k$ bulunur.

$f(k) = 4 . 2^k + \underbrace{k+2}_{\text{polinom}}$.

$A . 2^k$ tipinde aranır. Fakat y_k^h bu çözümü içerir. O halde $A . 2^k . k$ tipinde aranır.

$k+2$ kısmı için özel çözüm $B . k + C$ tipinde aranır fakat $\{1\}$ çözümü $f(k)$ ve y_k^h da ortak. Bu nedenle özel çözüm $(Bk + C)k$ tipinde aranmalıdır.

O halde

$$y_k^ö = A 2^k . k + Bk^2 + Ck$$

tipinde aranır.

işlemler sonucu $A=2$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{5}{2}$ bulunur.

$$y_k^G = c_1 + c_2 . 2^k + 2.2^k.k - \frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k$$

olur.

⑤- $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k$

Çözüm.

$$y_k^h = c_1.2^k + c_2.k2^k \text{ dır.}$$

$f(k) = 3k + 2^k$

Özel çözüm $3k$ için $Ak+B$ tipinde

2^k için. $c.2^k$ tipinde, fakat 2^k yı y_k^h içerdiğinden. $c.2^k.k$ tipinde aranır. $k.2^k$ teriminide y_k^h içerdiğinden özel çözüm. $c2^k.k^2$ tipinde aranır.

Ohalde.

$$y_k^ö = Ak + B + c.k^2.2^k$$

tipinde olmalıdır.

işlemler sonucu. $A=3$, $B=6$, $C=\frac{1}{8}$ bulunur.

Genel çözüm

$$y_k^G = c_1 2^k + c_2 k 2^k + 3k + 6 + \frac{1}{8}k^2.2^k$$

dır.

☆ $\boxed{\text{5. BÖLÜM.}}$

ENTERPOLASYON

Bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden yararlanarak bu fonksiyonun bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemine. enterpolasyon işlemi denir. Ayrıca. verilmiş bir fonksiyonun. daha basit bir $P(x)$ polinomu ile. gösterilmesi enterpolasyon olarak bilinir. Buradaki $P(x)$ polinomuna enterpolasyon polinomu denir.

55