BÖLÜM 4 – ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Giriş problemleri

4-4

Hız alanı, $\vec{V} = (u,v) = \left(a^2 - (b-cx)^2\right)\vec{i} + \left(-2cby + 2c^2xy\right)\vec{j}$ (1)

Durma noktasında, u ve v nin ikiside sıfır olmalı. Akış alanının herhangi bir noktasında (x,y), hız bileşenleri;

$u = a^2 - (b-cx)^2 \qquad v = -2cby + 2c^2xy$ (2)

Bu hızları sıfıra eşitleyip çözüm olursa,

Durma noktası:
$$0 = a^2 - (b-cx)^2 \qquad x = \frac{b-a}{c}$$
$$v = -2cby + 2c^2xy \qquad y = 0 \qquad (3)$$

Bir durma noktası var ve onun yeri, **$x = (b - a)/c, y = 0$**.

Lagrange ve Euler tanımlamaları

4-15

Hız alanı, $\vec{V} = (u,v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$ (1)

İvme alanı bileşenleri,

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + (U_0 + bx)b + (-by)0 + 0$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + (U_0 + bx)0 + (-by)(-b) + 0 \qquad (2)$$

Burada zamana bağlı terimler sıfır çünkü akış daimidir, ve w terimleri sıfırdır çünkü akış iki boyutludur.

Maddesel ivme bileşenleri: $\boxed{a_x = b(U_0 + bx) \qquad a_y = b^2 y}$ (3)

Vektor olarak ifade edeilirse,

Maddesel ivme vektörü, $\boxed{\vec{a} = b(U_0 + bx)\vec{i} + b^2 y\vec{j}}$ (4)

4-17

Hız bileşenleri: $u = 1.1 + 2.8x + 0.65y \qquad v = 0.98 - 2.1x - 2.8y$ (1)

İvme alanı bileşenleri,

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + (1.1 + 2.8x + 0.65y)(2.8) + (0.98 - 2.1x - 2.8y)(0.65) + 0$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + (1.1 + 2.8x + 0.65y)(-2.1) + (0.98 - 2.1x - 2.8y)(-2.8) + 0 \qquad (2)$$

Burada daimi akış için zamana bağlı terimler sıfır, ve w terimleri sıfır çünkü akış 2 boyutludur.

İvme bileşenleri : $\boxed{a_x = 3.717 + 6.475x \qquad a_y = -5.054 + 6.475y}$ (3)

(x,y) = (-2,3), noktasında, ivme bileşenleri,

$a_x = -9.233 \cong \mathbf{-9.23} \qquad a_y = 14.371 \cong \mathbf{14.4}$

4-20

Parabolanın genel denklemi: $u = a + b(x-c)^2$ (1)

İki sınır şartı var, bunlar $x = 0$, $u = u_{\text{entrance}}$ ve $x = L$, $u = u_{\text{exit}}$. Denklem 1 şöyle sağlanır , $c = 0$, $a = u_{\text{entrance}}$ ve $b = (u_{\text{exit}} - u_{\text{entrance}})/L^2$. Böylece denklem 1,

Parabolic hız:

$$\boxed{u = u_{\text{entrance}} + \frac{\left(u_{\text{exit}} - u_{\text{entrance}}\right)}{L^2} x^2} \qquad (2)$$

Akış Desenleri ve Akış Görselleştirme
4-33

Hız alanı:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 1.2x)\vec{i} + (-2.0 - 1.2y)\vec{j} \qquad (1)$$

İki boyutlu akış için, akım çizgileri,

x-y düzlemindeki akım çizgileri:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{along a streamline}} = \frac{v}{u} \qquad (2)$$

Denklem 1 deki u ve v bileşenlerini denklem 2 de konursa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2.0 - 1.2y}{0.5 + 1.2x}$$

Yukardaki diferensiyel denklemi çözersek,

$$\frac{dy}{-2.0 - 1.2y} = \frac{dx}{0.5 + 1.2x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{-2.0 - 1.2y} = \int \frac{dx}{0.5 + 1.2x}$$

Integral alınırsa,

$$-\frac{1}{1.2}\ln(-2.0 - 1.2y) = \frac{1}{1.2}\ln(0.5 + 1.2x) - \frac{1}{1.2}\ln C_1 \qquad (3)$$

Hatırlamak gerekirki,

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, ve $-\ln a = \ln(1/a)$, böylece denklem 3 basitleşir,

Akım çizgileri denklemi,

$$\boxed{y = \frac{C}{1.2(0.5 + 1.2x)} - 1.667}$$

Yeni sabit C farklı değerler alır, ve böylece akım çizgileri Figure 1 deki gibi çizilir.

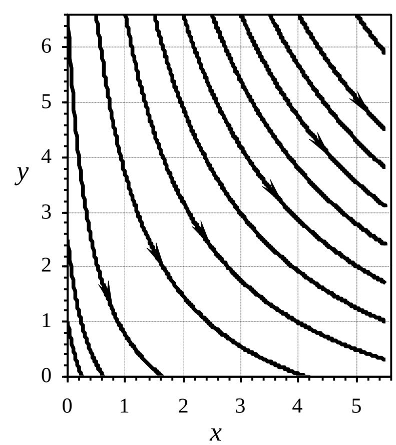

FIGURE 1
Verilen hız alanı için akım çizgileri

Akış yönü u ve v hızlarını bir noktada hesaplayarak bulunur. Bunun için $x = 3$, $y = 3$ seçeriz. Bu noktada, $u = 4.1$ ve $v = -5.6$. Bu noktada hızın yönü sağ alta doğrudur. Bu tüm akım çizgilerinin yönünü verir.

4-39

$u_r = 0$, ve K positive olduğundan, hız hızın θ-bileşeninin mutkak değeri,

Hız: $$V = \sqrt{\underbrace{\cancel{u_r^2}}_{0} + u_\theta^2} = |u_\theta| = \frac{K}{r}$$

Böylece, sabit hız için contour çizgileri sabit yarıçaplı çemberlerdir,

Sabit hızların contour çizgisi: $$r = \frac{K}{V}$$

Mesala, V = 2.0 m/s, için kontur çizgisi 0.50 m yarıçaplı bir çemberdir.

Sabit hızdaki contour çizgisi V = 2.0 m/s: $$r = \frac{1.0\ \text{m}^2/\text{s}}{2.0\ \text{m/s}} = 0.50\ \text{m}$$

0.50 m yarıçaplı bir çember çizip, ve bunu diğer dört V değeri için tekrar ederiz. Merkeze yakın hız merkezden uzak hızdan daha fazladır.

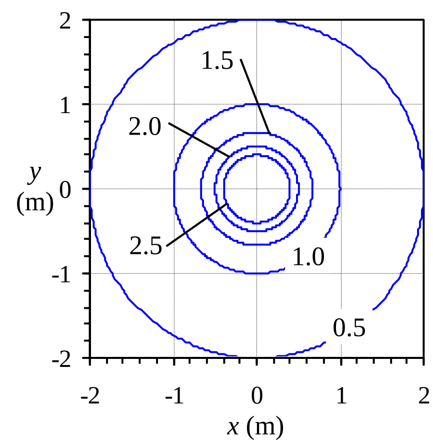

FIGURE 1
Bir vortex çizgisi için mutlak hız contour çizimi. Hız değerleri m/s birimiyle gösterilmiştir.

Akışkan Elamanlarının Haraketleri ve Deformasyonları

4-42

Hız alanı, $$\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j} \qquad (1)$$

Eğer çevrinti sıfır olmazsa akış dönmelidir. Akış iki boyutludur, bu yüzden z yönündeki çevrinti, i.e. ζ_z,

Z yönündeki çevrinti bileşeni: $$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \qquad (1)$$

Çevrinti sıfır olduğundan, bu akış dönmesizdir.

4-51

Akış alanı: $$\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j} \qquad (1)$$

Birim zamandaki hacimsel şekil değiştirme denklemini kartezyen koordinatlarda kullanırız, ve denklem 1 uygulanırsa,

Birim zamandaki hacimsel deformasyon:
$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = b + (-b) + 0 = 0 \qquad (2)$$

Burada akışın heryerinde $\varepsilon_{zz} = 0$, böylece akış sıkıştırılamaz.

4-58

Hız alanı: $$\vec{V} = (u, v) = (a + by)\vec{i} + 0\vec{j} \qquad (1)$$

t + dt deki sol alt köşe: $$\left(x + (a + by)dt, y\right) \qquad (2)$$

Birim zamandaki Linear deformasyon: $$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

(*a*) sağ alt köşedeki akışkan partikülü sol alt köşedeki ile aynı miktarda haraket eder çünkü u y pozisyonuna bağlı değildir. Böylece, *t + d t deki sağ alt köşe*: $$\left(x+dx+\left(a+by\right)dt,y\right) \qquad (4)$$

Benzer şekilde, akışkan partikülün üst iki köşeleri sağa $a + b(y+dy)dt$ hızıyla haraket eder. Böylece,

t + dt deki sol üst köşe: $$\left(x+\left(a+b\left(y+dy\right)\right)dt,y+dy\right) \qquad (5)$$

ve

t + dt deki sağ üst köşe: $$\left(x+dx+\left(a+b\left(y+dy\right)\right)dt,y+dy\right) \qquad (6)$$

(*b*) x- yönündeki birim zamandaki linear deformasyon tanımından, akışkan elemanının alt kenarını dikkate alırız. Uzunluktaki birim zamandaki artışın original uzunluğa bölümü denklem 2 ve 4 den bulunur,

ε_{xx}: $$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{dt}\left[\frac{\overbrace{x+dx+\left(a+by\right)dt-\left(x+\left(a+by\right)dt\right)}^{\text{Length of lower edge at } t+dt}-\overbrace{dx}^{\text{Length of lower edge at } t}}{dx}\right]=0 \qquad (6)$$

Akış elemanın üst kenarını dikkate alarak aynı sonucu elde ederiz. Benzer şekilde, akış elamanının sol kenarını kullanarak ve denklem 2 ve 5 den,

ε_{yy}: $$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{dt}\left[\frac{\overbrace{y+dy-y}^{\text{Length of left edge at } t+dt}-\overbrace{dy}^{\text{Length of left edge at } t}}{dy}\right]=0 \qquad (7)$$

Akış elamanının sağ kenarını alarak aynı sonucu elde ederiz. Böylece, bu akış için, birim zamandaki linear deformasyonun x ve y bileşenleri sıfırdır,

(*c*) denklem 3 den,

Birim zamandaki linear deformasyonlar: $$\boxed{\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=0} \qquad (8)$$

4-67

Çevrinti açısal hızın ik katıdır. Burada,

Açısal hız: $$\vec{\omega}=360\frac{\text{rot}}{\text{min}}\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rot}}\right)\vec{k}=37.70\vec{k}\text{ rad/s} \qquad (1)$$

Burada $\vec{k}$ z yönündeki birim vektördür. Çevrinti,

$$\boxed{\vec{\zeta}=2\vec{\omega}=2\times37.70\vec{k}\text{ rad/s}=75.4\vec{k}\text{ rad/s}} \qquad (2)$$

4-73

Hız alanı,

$$\vec{V}=\left(u,v,w\right)=\left(3.0+2.0x-y\right)\vec{i}+\left(2.0x-2.0y\right)\vec{j}+\left(0.5xy\right)\vec{k} \qquad (1)$$

Çevrinti vektörü,

$$\vec{\zeta}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (2)$$

Hız bileşenleri yerlerine konursa, $u = 3.0 + 2.0x – y$, $v = 2.0x – 2.0y$, ve $w = 0.5xy$ denklem 2 den,

Çevrinti vektörü: $$\boxed{\vec{\zeta}=\left(0.5x-0\right)\vec{i}+\left(0-0.5y\right)\vec{j}+\left(2.0-\left(-1\right)\right)\vec{k}=\left(0.5x\right)\vec{i}-\left(0.5y\right)\vec{j}+\left(3.0\right)\vec{k}} \qquad (3)$$