

DENEYSEL BULGULARIN ANALİZİ

Deneysel Bulguların Analizi (Hata Analizi)

Deneysel çalışmaların tümü, çeşitli nedenlerden dolayı hata içerir. Deneysel çalışmalarda yapılan bu hatalar genellikle üç grupta toplanabilir.

1- Dikkatsizlik ve tecrübesizlikten kaynaklanan hatalar

Örnek : Ölçme cihazlarının yanlış seçiminden veya ölçme sistemlerinin yanlış tasarımından kaynaklanan hatalar

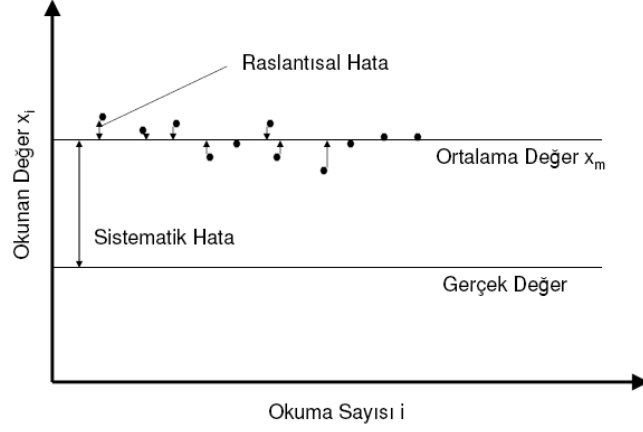
2- Sabit ve sistematik hatalar

Örnek : Tekrar edilen okumalarda görülen ve nedenleri çoğunlukla tespit edilemeyen hatalar

3- Rastgele hatalar

Örnek : Deneyi yapan kişilerin değişmesinden, deneyi yapanların dikkatlerinin zamanla azalmasından, elektrik geriliminin değişmesinden, ölçme aletlerindeki histerizis olaylarından veya cihazların ısınması nedeniyle elektronik ölçme aletlerinde oluşan salınımlardan kaynaklanan hatalar

Deneysel Bulguların Analizi (Hata Analizi)



Deneysel Bulguların Analizi (Hata Analizi)

Deneyisel sonuçların geçerliliğinin belirlenebilmesi için mutlaka bir hata analizi yapmak gerekmektedir. Deneylerden elde edilen veriler kullanılarak hesaplanan parametrelere ait hata miktarlarının/oranlarının tespiti için pratikte bir kaç yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler içerisinde

1- Akılcı Yaklaşım

2- Belirsizlik Analizi

yöntemleri en çok kullanılanıdır.

Son yıllardaki çalışmalarda hata analizinde; ilk olarak Kline ve McClintock tarafından ortaya atılan ve diğerlerine göre daha hassas bir yöntem olan belirsizlik analizi yöntemi daha çok tercih edilmektedir.

Hata Analizinde Akılcı Yaklaşım

Bu hata analiz yönteminde, ölçme sisteminde bulunan bütün ölçüm cihazlarının aynı anda (*pozitif veya negatif yönde*) maksimum hatayı yaptığı kabul edilir.

Örnek olarak; bir elektrik devresindeki güç, gerilim ve akım şiddeti çarpımı olan; $P = EI$ bağıntısı yardımıyla hesaplanmak istensin.

Elektrik gerilimi ve akım şiddetini ölçen cihazların sabit hata miktarları (*belirsizlikleri*) sırasıyla, $\pm w_E$ ve $\pm w_I$ şeklinde verilmiş olsun.

Bu durumda; ölçme esnasında elektrik gerilimi e olarak ve elektrik akımı da i olarak okunmuş ise, E ve I için şu ifadeler yazılabilir.

$$E = e \pm w_E \quad I = i \pm w_I$$

Böyle bir deney sonucundan hareketle akılcı yaklaşıma göre elde edilebilecek en hatalı iki değer:

$$P_{maks.} = (e + w_E)(i + w_I) \quad P_{min.} = (e - w_E)(i - w_I)$$

Hata Analizinde Akılcı Yaklaşım

Örnek Bir elektrik devresindeki gücün tespiti için, bu devredeki gerilim ve akım ölçülmek isteniyor. Söz konusu devredeki gerilim ve akım değerleri belirsizlikleri ile beraber aşağıdaki şekilde verildiğine göre; gücün nominal değerini bularak, akılcı yaklaşımın kullanılması durumunda bu devredeki gücün maksimum ve minimum değerlerini tespit ediniz. Ayrıca; akılcı yaklaşıma göre yapılan hata miktarlarını yüzdesel olarak bulunuz.

$$E = 100 V \pm 2 V \quad ; \quad I = 10 A \pm 0.2 A$$

Çözüm Akılcı yaklaşıma göre çözüm:

$$P_N = (100)(10) = 1000 [W]$$

$$P_{maks.} = (100 + 2)(10 + 0.2) = 1040.4 [W] \quad ; \quad P_{min.} = (100 - 2)(10 - 0.2) = 960.4 [W]$$

$$\% W_{P_{maks.}} = \frac{P_{maks.} - P_N}{P_N} \cdot 100 = \frac{1040.4 - 1000}{1000} \cdot 100 = \% + 4.04$$

$$\% W_{P_{min.}} = \frac{P_{min.} - P_N}{P_N} \cdot 100 = \frac{960.4 - 1000}{1000} \cdot 100 = \% - 3.96$$

Hata Analizinde Belirsizlik Analizi Yöntemi

Herhangi bir deney tesisatı aracılığı ile tespit edilmesi/hesaplanması gereken büyüklük R , bu büyüklüğe etki eden n adet bağımsız değişkenler ise; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ olsun. Bu durumda; $R = R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ yazılabilir. Deneylerde etkili olan her bir bağımsız değişkene ait sabit hata miktarları (*belirsizlikler*); $\pm w_{x_1}, \pm w_{x_2}, \pm w_{x_3}, \dots, \pm w_{x_n}$ olsun. R büyüklüğünün sabit hata miktarı (*belirsizliği*) $\pm w_R$ ise;

$$w_R = \frac{\partial R}{\partial x_1} w_{x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} w_{x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} w_{x_3} + \dots + \frac{\partial R}{\partial x_n} w_{x_n}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda, R büyüklüğüne ilişkin maksimum belirsizlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$w_{R_{maks.}} = \left| \frac{\partial R}{\partial x_1} w_{x_1} \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial x_2} w_{x_2} \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial x_3} w_{x_3} \right| + \dots + \left| \frac{\partial R}{\partial x_n} w_{x_n} \right|$$

Hata Analizinde Belirsizlik Analizi Yöntemi

Bu durum, mümkün olabilecek en kötü durum olup, olasılığı en küçüktür. Bu durumu iyileştirebilmek için, Pythagorean Teoremine göre belirsizlik aşağıdaki gibi yazılır.

$$w_R = \pm \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} w_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} w_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} w_{x_3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} w_{x_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Yukarıdaki bağıntı dikkatle incelendiği zaman, belirsizlik analizi yönteminin diğer yöntemlere göre en önemli üstünlüklerinden birinin, deneylerde en büyük hataya neden olan değişkenin hemen tespit edilebilmesinin olduğu görülecektir. Böylece hatayı azaltmak için, söz konusu bu değişkenin ölçümünde kullanılan cihaz üzerine yoğunlaşılabilir. Ayrıca, yukarıdaki bağıntıda yer alan terimlerin eş boyutluluk ilkesi açısından uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir.

Hata Analizinde Belirsizlik Analizi Yöntemi

Örnek: Önceki örnek problemdeki verileri kullanarak belirsizlik analizinin kullanılması durumunda gücün tespitinde yapılacak hata miktarını yüzdesel olarak tespit ediniz. ($E = 100 \text{ V} \pm 2 \text{ V}$ ve $I = 10 \text{ A} \pm 0,2 \text{ A}$)

Çözüm

Belirsizlik analizine göre çözüm:

$$P_N = (100)(10) = 1000 \text{ [W]}$$

$$w_P = \pm \left[\left(\frac{\partial P}{\partial E} w_E \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} w_I \right)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklinde yazılabilir. Buna göre;}$$

$$\frac{\partial P}{\partial E} = I = 10 \text{ [A]} ; \quad \frac{\partial P}{\partial I} = E = 100 \text{ [V]} \text{ yazılabilir. Bu durumda;}$$

$$w_P = \pm \left[(I \cdot w_E)^2 + (E \cdot w_I)^2 \right]^{1/2} = \pm \left[(10 \cdot 2)^2 + (100 \cdot 0,2)^2 \right]^{1/2} \cong \pm 28,28427 \text{ [W]}$$

$$\%w_P = \frac{w_P}{P} \cdot 100 \cong \frac{\pm 28,28427}{1000} \cdot 100 \cong \% \pm 2,82843 \text{ bulunur. Böylece; } P = 1000 \pm 28,28427 \text{ [W]}$$

Hata Analizinde Belirsizlik Analizi Yöntemi

Örnek: Bakır bir çubuğun direnci şu eşitlikle belirlenmektedir:

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - 20)]$$

Burada $R_0 = 6 \Omega \pm \%0,3$, 20°C 'deki direnç, $\alpha = 0,004 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \pm \%1$ direncin sıcaklık katsayısıdır. Telin sıcaklığı ise $T = 30 \pm 1^\circ\text{C}$ olarak verilmektedir. Bakır telin direncini ve bu değerdeki belirsizliği hesaplayın.

Çözüm: $R = 6[1 + (0,004)(30 - 20)] = 6,24 \Omega$

$$\frac{\partial R}{\partial R_0} = 1 + \alpha(T - 20) = 1 + (0,004)(30 - 20) = 1,04$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = R_0(T - 20) = (6)(30 - 20) = 60$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} = R_0 \alpha = (6)(0,004) = 0,024$$

$$w_{R_0} = (6)(0,003) = 0,018 \Omega$$

$$w_\alpha = (0,004)(0,01) = 4 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$w_T = 1^\circ\text{C}$$

Böylece direnç değerindeki belirsizlik:

$$w_R = \left[(1,04)^2 (0,018)^2 + (60)^2 (4 \times 10^{-5})^2 + (0,024)^2 (1)^2 \right]^{1/2} \\ = 0,0305 \Omega \text{ veya } 0,49 \%$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

Örnek Bir otomobilin belirli bir süre aralığındaki *ortalama hızı* ($v = x/t$) hesaplanmak istenmektedir. Buna göre; t söz konusu zaman aralığını, x de bu zaman aralığında alınan yolu göstermek üzere;

a) $x = 10$ [km] ve $t = 500$ [s] olarak verildiğine göre; bu otomobilin *ortalama hızının nominal değerini* (v_n) m/s cinsinden hesaplayınız.

b) $x = 10$ [km] \pm % 5 ve $t = 500 \pm 5$ [s] olarak verildiğine göre; *akılcı yaklaşımın* kullanılması durumunda, bu otomobilin *ortalama hızının hesaplanmasında* yapılacak hata miktarlarını *yüzdesele* olarak bulunuz.

c) Yukarıdaki veriler geçerli olmak üzere; *belirsizlik analizinin* kullanılması durumunda, bu otomobilin *ortalama hızının hesaplanmasında* yapılacak hata miktarını *yüzdesele* olarak bulunuz.

$$R = R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ ise; } w_R = \pm \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} w_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} w_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} w_{x_3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} w_{x_n} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklindedir.}$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

Çözüm

a) Otomobilin ortalama hızının nominal değerinin bulunması:

$$x = 10 \text{ [km]} = 10000 \text{ [m]} \text{ ve } t = 500 \text{ [s]} \Rightarrow v_n = \frac{x}{t} = \frac{10000}{500} = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ bulunur.}$$

b) Akılcı yaklaşıma göre çözüm: $x = 10$ [km] \pm % 5 ve $t = 500 \pm 5$ [s] olarak verildiğinden;

$$w_x = \pm(10000)(0.05) = \pm 500 \text{ [m]} \text{ ve } w_t = \pm 5 \text{ [s]} \text{ bulunur. Buna göre;}$$

$$v_{\text{maks.}} = \frac{x + w_x}{t - w_t} = \frac{10000 + 500}{500 - 5} \cong 21.21212 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ ve}$$

$$\% \text{ Hata } v_{\text{maks.}} = \frac{v_{\text{maks.}} - v_n}{v_n} \cdot 100 = \frac{21.21212 - 20}{20} \cdot 100 \cong \% + 6.06061 \text{ bulunur.}$$

$$v_{\text{min.}} = \frac{x - w_x}{t + w_t} = \frac{10000 - 500}{500 + 5} \cong 18.81188 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ ve}$$

$$\% \text{ Hata } v_{\text{min.}} = \frac{v_{\text{min.}} - v_n}{v_n} \cdot 100 = \frac{18.81188 - 20}{20} \cdot 100 \cong \% - 5.94059 \text{ bulunur.}$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

c) Belirsizlik analizine göre çözüm:

$v = \frac{x}{t}$ olduğundan; $w_v = \pm \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} w_x \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} w_t \right)^2 \right]^{1/2}$ şeklinde olacaktır. Buna göre;

$$w_v = \pm \left[\left(\frac{1}{t} w_x \right)^2 + \left(-\frac{x}{t^2} w_t \right)^2 \right]^{1/2} = \pm \left[\left(\frac{1}{500} (500) \right)^2 + \left(-\frac{10000}{500^2} (5) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$w_v \cong \pm 1.01980 \left[\frac{m}{s} \right] \text{ ve}$$

$$\% \delta w_v = \frac{w_v}{v_n} \cdot 100 = \frac{\pm 1.01980}{20} \cdot 100 \cong \% \pm 5.09902 \text{ bulunur.}$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

Örnek Bir klima santralının dikdörtgen kesitli kanalından akmakta olan nemli havanın kütleli debisi, $\dot{m} = \rho A v$ [kg/s] bağıntısı ile hesaplanacaktır. Burada; ρ nemli havanın yoğunluğunu [kg/m^3], A kanalın kesit alanını [m^2] ($A=a \cdot b$ şeklindedir) ve v kanaldaki ortalama hızı [m/s] göstermektedir. Yapılan ölçümlerde; $\rho = 1.28$ [kg/m^3] \pm %2, $a = 0.30 \pm 0.003$ [m], $b = 0.40 \pm 0.004$ [m] ve $v = 3$ [m/s] \pm %3 şeklinde bulunmuştur. Buna göre;

- Kütleli debinin nominal değerini (\dot{m}_n) hesaplayınız.
- Akılcı yaklaşımın kullanılması durumunda yapılan hata miktarlarını yüzdesel olarak bulunuz.
- Belirsizlik analizinin kullanılması durumunda yapılan hata miktarını yüzdesel olarak bulunuz.

Çözüm

$$\dot{m}_n = \rho A v \Rightarrow \dot{m}_n = ? \quad w_m = ?$$

- Kütleli debinin nominal değerinin (\dot{m}_n) bulunması:

$$\text{Yani; } \dot{m}_n = \rho A v \Rightarrow \dot{m}_n = ?$$

$$\dot{m}_n = \rho A v = 1.28 \cdot (0.30 \cdot 0.40) \cdot 3 = 0.4608 \text{ [kg/s]}$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

b) Akılcı yaklaşıma göre çözüm:

$$\rho = 1.28 \text{ [kg/m}^3\text{]} \pm \%2 \text{ olarak verildiğinden; } w_\rho = \pm(1.28)(0.02) = \pm 0.0256 \text{ [kg/m}^3\text{]},$$

$$v = 3 \text{ [m/s]} \pm \%3 \text{ olarak verildiğinden; } w_v = \pm(3)(0.03) = \pm 0.09 \text{ [m/s]} \text{ bulunur. Buna göre;}$$

$$\dot{m}_{\max.} = (\rho + w_\rho)(A + w_A)(v + w_v) \quad A = ab \text{ olduğundan; } \dot{m}_{\max.} = (\rho + w_\rho)(a + w_a)(b + w_b)(v + w_v)$$

$$\dot{m}_{\max.} = (1.28 + 0.0256)(0.3 + 0.003)(0.4 + 0.004)(3 + 0.09) \cong 0.49385 \text{ [kg/s]} \text{ bulunur.}$$

$$\% \text{ Hata} = \frac{\dot{m}_{\max.} - \dot{m}_n}{\dot{m}_n} \cdot 100 \cong \frac{0.49385 - 0.4608}{0.4608} \cdot 100 \cong \% + 7.17231$$

$$\dot{m}_{\min.} = (\rho - w_\rho)(A - w_A)(v - w_v) \quad A = ab \text{ olduğundan; } \dot{m}_{\min.} = (\rho - w_\rho)(a - w_a)(b - w_b)(v - w_v)$$

$$\dot{m}_{\min.} = (1.28 - 0.0256)(0.3 - 0.003)(0.4 - 0.004)(3 - 0.09) \cong 0.42932 \text{ [kg/s]} \text{ bulunur.}$$

$$\% \text{ Hata} = \frac{\dot{m}_{\min.} - \dot{m}_n}{\dot{m}_n} \cdot 100 \cong \frac{0.42932 - 0.4608}{0.4608} \cdot 100 \cong \% - 6.83160$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

c) Belirsizlik analizine göre çözüm:

$$\text{Bilindiği gibi; } w_m = \pm \left[\left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} w_\rho \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} w_A \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial v} w_v \right)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklinde verilir. Buna göre;}$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} = Av = (0.30 \cdot 0.40) \cdot 3 = 0.36 \text{ [m}^3\text{/s]}$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} = \rho v = 1.28 \cdot 3 = 3.84 \text{ [kg/m}^2\text{s]}$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial v} = \rho A = 1.28 \cdot (0.30 \cdot 0.40) = 0.1536 \text{ [kg/m]}$$

Hata Analizi İle İlgili Örnek Sorular ve Çözümleri

$$A=a \cdot b \Rightarrow w_A = \pm \left[\left(\frac{\partial A}{\partial a} w_a \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b} w_b \right)^2 \right]^{1/2} \text{ olacaktır.}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b = 0.40 \text{ [m]} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial A}{\partial b} = a = 0.30 \text{ [m]} \Rightarrow$$

$$w_A = \pm \left[(0.4 \cdot 0.003)^2 + (0.3 \cdot 0.004)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow w_A = \pm 0.0016971 \text{ [m}^2\text{]} \text{ bulunur.}$$

$$w_m = \pm \left[\left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial p} w_p \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} w_A \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial v} w_v \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$w_m = \pm \left[(0.36 \cdot 0.0256)^2 + (3.84 \cdot 0.0016971)^2 + (0.1536 \cdot 0.09)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow w_m \cong \pm 0.0178467 \text{ [kg/s]}$$

$$\%w_m = \frac{w_m}{\dot{m}_n} \cdot 100 = \frac{\pm 0.0178467}{0.4608} \cdot 100 = \% \pm 3.87298 \text{ bulunur.}$$

Deneyel Bulguların İstatistik Analizi

Bu kısımda özellikle deneysel bulguların analizi için kullanılan bazı tanımlar ile temel istatistik bilgileri verilecektir.

Bir ölçme aleti ile yapılan aynı bir fiziksel büyüklüğün ölçümleri aynı şahıs veya değişik şahıslar tarafından tekrarlandığında, bulunan değerler arasında farklılıklar görülür.

Örnek olarak; küre şeklindeki çelik bir bilyenin çapının, bir mikrometre ile yapılan bir kaç ölçümü farklı değerler verebilir. Deneyi yapan veya deneyin sonuçları ile ilgilenen kimse için, çoğunlukla bu değerlerin ortalaması önemlidir.