MAK310 - TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemi

A) Basit kökler hali : $F(s)=\dfrac{s+1}{s(s+2)}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{s+2}$

Sabitlerin bulunuşu;

$$A_1=\left.\frac{s+1}{s(s+2)}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}$$

$$A_2=\left.\frac{s+1}{s(s+2)}\right|_{s=-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

Böylece, $F(s)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+2}$

ve, $f(t)=\dfrac{1}{2}U(t)+\dfrac{1}{2}e^{-2t}U(t)$

burada U(t) birim basamak fonksiyonudur,

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t},\quad t>0$$

Sonucun t=0 ve t<0 için sıfır olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda genel olarak:

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

B) Katlı kökler hali:

$$F(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+2)}=\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s}+\frac{A_3}{s^2}$$

$$A_1=\left.\frac{s^2+1}{s^2(s+2)}\right|_{s=-2}=\frac{5}{4}$$

$$A_3=\left.\frac{s^2+1}{s^2(s+2)}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}$$

A_2 katsayısını bulmak için,

$$s^2+1 = s^2(s+2)\left(\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s}+\frac{A_3}{s^2}\right)$$
$$= s^2A_1 + s(s+2)A_2 + (s+2)A_3$$

s 'nin aynı üslerini eşitleyerek,

"s" üssü	Denklem
s^2	$1 = A_1 + A_2$
s^1	$0 = 2A_2 + A_3$
s^0	$1 = 2A_3$

A_1, A_2, and A_3 bulmak için bu denklemleri kullanabiliriz. Buradan A_2=-0.25 bulunur.

Böylece, $$F(s) = \frac{5}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$$

ve $$f(t) = \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t$$

(burada f(t)=0 tüm t<0 için).

C) Karmaşık kökler hali

Aşağıdaki ifadenin paydasındaki ikinci terimin kökleri komplex (karmaşık) tır.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

1) **Method**

F(s) fonksiyonunu basitleştirip Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanabiliriz. Paydadaki ikinci terimin komplex köklerini bularak fonksiyonu kesirlere ayırabiliriz.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)} = \frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}$$
$$= \frac{A_1}{(s+5)} + \frac{A_2}{(s+2-j)} + \frac{A_3}{(s+2+j)}$$

Burada,

$$A_1 = (s+5)F(s)\big|_{s=-5}$$
$$A_2 = (s+2-j)F(s)\big|_{s=-2+j}$$
$$A_3 = (s+2+j)F(s)\big|_{s=-2-j} = A_2^*$$

Burada A_2 and A_3 birbirinin complex eşleniği olmalıdır. Gerekli hesaplamaları yaparak

$$A_1 = (s+5)F(s)\Big|_{s=-5} = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}\Bigg|_{s=-5} = -0.2$$

$$A_2 = (s+2-j)F(s)\Big|_{s=-2+j} = \frac{s+3}{(s+5)(s+2+j)}\Bigg|_{s=-2+j}$$

$$= \frac{-2+j+3}{(-2+j+5)(-2+j+2+j)} = 0.1-0.2j$$

$$A_3 = (s+2+j)F(s)\Big|_{s=-2-j} = A_2^* = 0.1+0.2j$$

Böylece,

$$F(s) = \frac{-0.2}{s+5} + \frac{0.1-0.2j}{s+2-j} + \frac{0.1+0.2j}{s+2+j}$$

$$F(s) = \frac{-0.2}{s+5} + \frac{0.1-0.2j}{s+2-j} + \frac{0.1+0.2j}{s+2+j}$$

$$f(t) = -0.2e^{-5t} + (0.1-0.2j)e^{(-2+j)t} + (0.1+0.2j)e^{(-2-j)t}$$

$$= -0.2e^{-5t} + e^{-2t}\left[0.1\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) - 0.2j\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]$$

$$= -0.2e^{-5t} + e^{-2t}\left[0.2\frac{\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)}{2} + 0.4\frac{\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)}{2j}\right]$$

$$= -0.2e^{-5t} + 0.2\cos(t)e^{-2t} + 0.4\sin(t)e^{-2t}$$

2) **Metod**: paydadaki ikinci terimi polynomial olarak bırakırsak,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+5} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$$

Önceki metodla A_1=-0.2 olarak bulmuştuk. B ve C sabitlerini bulmak için,

$$s+3 = (s^2+4s+5)(s+5)\left(\frac{A}{s+5} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}\right)$$

$$= (s^2+4s+5)A + (s+5)(Bs+C)$$

$$= (A+B)s^2 + (4A+5B+C)s + (5A+5C)$$

Aynı s üslü terimleri eşitleyerek,

s üssü	Sol taraf katsayısı	Sağ taraf katsayısı
2 inci (s^2)	0	A+B
1 inci (s^1)	1	4A+5B+C
0 ıncı (s^0)	3	5A+5C

A_2=-0.2 olduğu bilindiğinden, yukardaki eşitliklerden, (0=A+B) den B=0.2, ve (3=5A+5C) den C=0.8 bulunur. (1=4A+5B+C) kullanarak sonucu control edebiliriz. Fonsiyonu sonuç olarak,

$$F(s) = \frac{-0.2}{s+5} + \frac{0.2s+0.8}{s^2+4s+5}$$

Ters Laplace dönüşümü,

$$F(s) = \frac{-0.2}{s+5} + \frac{0.2s+0.8}{s^2+4s+5}$$
$$= \frac{-0.2}{s+5} + \frac{0.2s+0.8}{(s+2)^2+1}$$
$$f(t) = -0.2e^{-5t} + 0.2\cos(t)e^{-2t} + 0.4\sin(t)e^{-2t}$$

3) Method:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)} = \frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}$$
$$= \frac{A_1}{(s+5)} + \frac{A_2}{(s+2-j)} + \frac{A_3}{(s+2+j)}$$

Burada A_2 ve A_3 birbirinin komplex eşleniği olduğunu biliyoruz: $A_3 = A_2^*$

Bu durumda,

$$A_2 = Ke^{j\phi}$$
$$A_3 = Ke^{-j\phi}$$

burada $K = |A_2|,\ \phi = \angle A_2 = \tan^{-1}\left(\frac{Im(A_2)}{Re(A_2)}\right)$

Komplex eşlenik terimleri basit birinci derece terimler olarak yazarız,

$$\frac{A_2}{(s+2-j)}+\frac{A_3}{(s+2+j)}=\frac{Ke^{j\phi}}{(s+2-j)}+\frac{Ke^{-j\phi}}{(s+2+j)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Ke^{j\phi}}{(s+2-j)}+\frac{Ke^{-j\phi}}{(s+2+j)}\right\}=Ke^{j\phi}e^{-(2-j)t}+Ke^{-j\phi}e^{-(2+j)t}$$

$$=Ke^{-2t}\left(e^{j(t+\phi)}+e^{-j(t+\phi)}\right)$$

$$=2Ke^{-2t}\frac{\left(e^{j(t+\phi)}+e^{-j(t+\phi)}\right)}{2}$$

$$=Me^{-2t}\cos(t+\phi)$$

$$=Me^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$$

Burada, M=2K. Frekans (ω) ve sönüm katsayısı (σ), A_2 nin paydasının kökünden belirlenir. (bu terimin kökü, s=-2+j). Frekans kökün imajinari kısmıdır, ω=1 ve sönüm katsayısı kökün gerçek kısmı, σ=-2. Önceki metodlardan,

$$A_1=(s+5)F(s)\big|_{s=-5}=-0.2$$

$$A_2=(s+2-j)F(s)\big|_{s=-2+j}=0.1-0.2j$$

$$A_3=(s+2+j)F(s)\big|_{s=-2-j}=A_2^*=0.1+0.2j$$

ve

$$K=|A_2|=|A_2|=\sqrt{0.1^2+0.2^2}=0.224$$

$$\phi=\angle K=\tan^{-1}(0.2/0.1)=63.4^\circ$$

$$M=0.448$$

Buradan,

$$f(t)=-0.2e^{-5t}+0.448e^{-2t}\cos(t+63.4^\circ)$$

Bu önceki bulunan sonuca eşdeğerdir.

$$f(t)=-0.2e^{-5t}+0.448e^{-2t}\cos(t+63.4^\circ)$$
$$=-0.2e^{-5t}+0.2\cos(t)e^{-2t}+0.4\sin(t)e^{-2t}$$

4) Method:

$$F(s)=\frac{5s^2+8s-5}{s^2\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{Bs+C}{s+2s+5}$$

$$5s^2+8s-5=s^2\left(s^2+2s+5\right)\left(\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{Bs+C}{s+2s+5}\right)$$

$$=A_1\left(s^3+2s^2+5s\right)+A_2\left(s^2+2s+5\right)+Bs^3+Cs^2$$

Aynı s üslerini gruplayarak,

s üsleri	Denklem
s^3	$0=A_1+B$
s^2	$5=2A_1+A_2+C$
s^1	$8=5A_1+2A_2$
s^0	$-5=5A_2$

Bu denklemlerden,

$$A_2 = -1$$
$$A_1 = \frac{8+2}{5} = 2$$
$$C = 5 - 4 + 1 = 2$$
$$B = -A_1 = -2$$

Böylece,

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{-2s+2}{s^2+2s+5}$$

Son terim istediğimiz gibi değildir. Uygun şekilde kare alırsak,

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{-2s+2}{(s+1)^2+4}$$

Buradaki tüm terimler Laplace dönüşüm tablosundadır. Böylece,

$$f(t) = 2 - t + e^{-t}\left(2\cos(2t) + 2\sin(2t)\right)$$

5) Method:

$$F(s) = \frac{5s^2+8s-5}{s^2\left(s^2+2s+5\right)} = \frac{5s^2+8s-5}{s^2(s+1-2j)(s+1+2j)}$$

Bu fonksiyonu 4 terim toplamı olarak yazabiliriz Komplex terimler, $A_3=A_4^*$)

$$F(s) = \frac{5s^2+8s-5}{s^2\left(s^2+2s+5\right)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s+1-2j} + \frac{A_4}{s+1+2j}$$

Burada, $(s+1-2j)(s+1+2j)=(s^2+2s+5))$

$$\begin{aligned} 5s^2+8s-5 &= \left(\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s+1-2j} + \frac{A_4}{s+1+2j}\right)\cdot\left(s^2(s+1-2j)(s+1+2j)\right) \\ &= A_1 s(s+1-2j)(s+1+2j) + A_2(s+1-2j)(s+1+2j) + A_3 s^2(s+1+2j) + A_4 s \\ &= A_1 s\left(s^2+2s+5\right) + A_2\left(s^2+2s+5\right) + A_3 s^2(s+1+2j) + A_4 s^2(s+1-2j) \end{aligned}$$

s nin benzer üsleri,

s üsleri	denklem
s^3	$0=A_1+A_3+A_4$
s^2	$5=2A_1+A_2+(1+2j)A_3+(1-2j)A_4$
s^1	$8=5A_1+2A_2$
s^0	$-5=5A_2$

Elle yada MatLab kullanarak çözebiliriz:

```
>> A=[1 0 1 1; 2 1 1+2j 1-2j; 5 2 0 0; 0 5 0
0];

>> b=[0 5 8 -5]';

>> inv(A)*b



ans =

   2.0000

  -1.0000

  -1.0000 - 1.0000i

  -1.0000 + 1.0000i
```

burada,

$$A_1 = 2$$
$$A_2 = -1$$
$$A_3 = -1 - 1j = \sqrt{2}\angle 225^\circ$$
$$A_3 = -1 + 1j = \sqrt{2}\angle 135^\circ$$

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{-1-j}{s+1-2j} + \frac{-1+j}{s+1+2j}$$

A_3 terimin paydasının kökü s=-1+2j (yani, payda 0 gider s=-1+2j olduğunda), A_3 nin büyüklüğü $\sqrt{2}$, ve açısı 225°. Böylece, $M=2\sqrt{2}$, $\varphi=225°$, $\omega=2$, ve $\sigma=-1$. f(t) için çözersek, t

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 2 - t + Me^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) \\
&= 2 - t + 2\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t + 225^\circ)
\end{aligned}
$$

Bu ifade önceki sonuçla eşdeğerdir.

Paydaki polinomun mertebesi paydadakiyle aynı olursa:

Örnek:

$$F(s) = \frac{3s^2 + 2s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Önce polinomda düzenleme yaparız,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3 \\
s^2 + 3s + 2 & 3s^2 + 2s + 3 \\
 & \underline{3s^2 + 9s + 6} \\
 & -7s - 3
\end{array}
$$

Fonksiyonu bir sabit ve uygun polinom bölümü olarak kismi kesirlere ayırırız;

$$
\begin{aligned}
F(s) &= 3 + \frac{-7s - 3}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{-7s - 3}{(s+1)(s+2)} \\
&= 3 + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}
\end{aligned}
$$

A_1 ve A_2 için önceki methodlardan,

$$F(s) = 3 + \frac{4}{s+1} - \frac{11}{s+2}$$

böylece

$$f(t) = 3\delta(t) + 4e^{-t} - 11e^{-2t}$$

Payda üstel olunca,

Örnek :

$$F(s) = \frac{s\left(1 + e^{-1.5s} + e^{-2.2s}\right) + e^{-1.5s}}{s(s+2)}$$

Uygun düzenleme yaparak,

$$F(s) = \frac{s}{s(s+2)} + e^{-1.5s}\frac{s+1}{s(s+2)} + e^{-2.2s}\frac{s}{s(s+2)}$$
$$= \frac{1}{(s+2)} + e^{-1.5s}\frac{s+1}{s(s+2)} + e^{-2.2s}\frac{1}{(s+2)}$$

Ikinci terimi kismi kesirlere ayırırsak,

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)} + e^{-1.5s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)}\right) + e^{-2.2s}\frac{1}{(s+2)}$$

Her terimin ters Laplace dönüşümünü yaparsak,

$$f(t) = e^{-2t}\gamma(t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1.5)}\right)\gamma(t-1.5) + e^{-2(t-2.2)}\gamma(t-2.2)$$