

İSTATİSTİK HESAPLAMALARI LABORATUVARI

Bu yardımcı doküman interaktif (etkileşimli) ders materyali örneği ve Matlab uygulaması için hazırlanmıştır. Bu dokümanda, Gamma dağılımı ve güvenilirlik analizi, Newton-Raphson yöntemi ile kök bulma konularının kısa anlatımları, Matlab kodları ve kullanıcı arayüzleri hakkında bilgiler yer almaktadır.

İnteraktif Ders Materyali Örneği ve Matlab Uygulaması Hazırlayan:

Dr.Öğr.Üyesi Mükerrerem Bahar BAŞKIR (stat.cmputing@gmail.com)

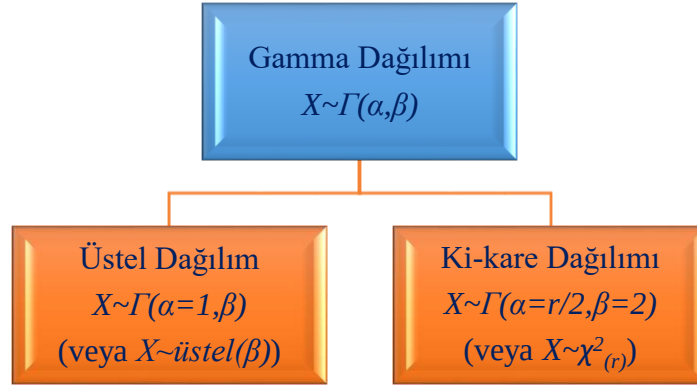
GAMMA DAĞILIMI VE GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

Gamma dağılımı ile ilgili bazı bilgiler Tablo 1’de verilmektedir:

Tablo 1. Gamma dağılımını tanımlayıcı bilgiler ve bazı özellikler

Genel gösterim	$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$
Olasılık yoğunluk fonksiyonu	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $x \in (0, \infty)$
Beklenen değer	$E(X) = \alpha\beta$
Varyans	$Var(X) = \alpha\beta^2$
Moment Çıkarıcı Fonksiyon	$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$, $t < \beta^{-1}$
Parametreler	$\alpha, \beta \in (0, \infty)$, $(\alpha, \beta) \in \Theta \times \Theta \subset \mathbf{R}^2$
Bazı Özellikler	1. $\beta^\alpha \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$ 2. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ 3. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ 4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 5. $X \sim \Gamma(\alpha = 1, \beta) \Rightarrow X \sim \text{üstel}(\beta)$ 6. $X \sim \Gamma(\alpha = r/2, \beta = 2) \Rightarrow X \sim \chi_r^2$

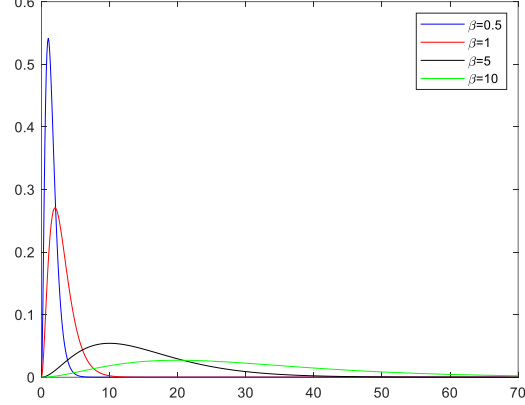
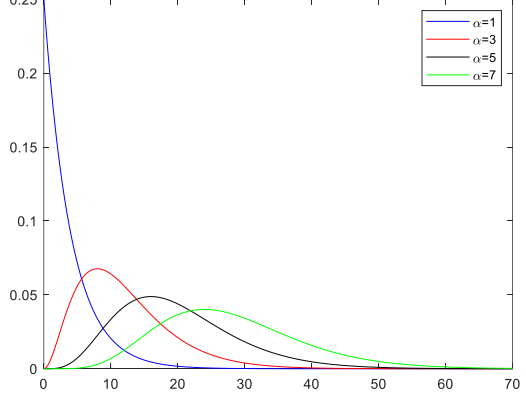
Gamma dağılımının özel halleri olan Üstel ve Ki-kare dağılımlarına (bkz. Şekil 1) ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri Matlab kodları ile Tablo 2’de verilmektedir.



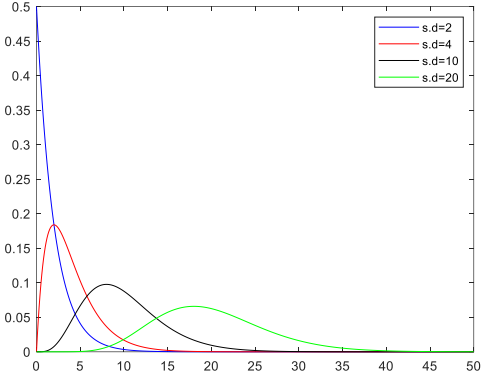
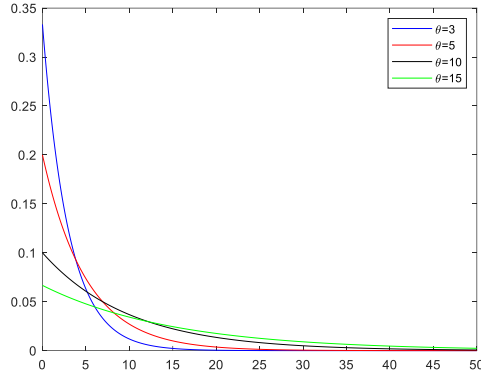
Şekil 1. Gamma dağılımı ve özel halleri.

Tablo 2’de farklı parametre değerleri için Gamma, Ki-kare ve Üstel dağılımlara ait olasılık yoğunluk fonksiyonları (oyf) yer almaktadır.

Tablo 2. Gamma dağılımı ve Matlab uygulamaları

Gamma dağılımı için oyf	
	
<u>Matlab kodları:</u> <pre> clc;clear all;close all t=0:0.1:70; figure plot(t,gampdf(t,3,0.5),'b') hold on plot(t,gampdf(t,3,1),'r') hold on plot(t,gampdf(t,3,5),'k') hold on plot(t,gampdf(t,3,10),'g') legend('\beta=0.5','\beta=1','\beta=5','\beta=10') </pre>	<u>Matlab kodları:</u> <pre> clc;clear all;close all t=0:0.1:70; figure plot(t,gampdf(t,1,4),'b') hold on plot(t,gampdf(t,3,4),'r') hold on plot(t,gampdf(t,5,4),'k') hold on plot(t,gampdf(t,7,4),'g') legend('\alpha=1','\alpha=3','\alpha=5','\alpha=7') </pre>

Tablo 2. (devamı)

Ki-kare Dağılımı için oyf	Üstel dağılım için oyf
 Matlab kodları: <pre> x=0:0.1:50; figure plot(x,chi2pdf(x,2),'b') hold on plot(x,chi2pdf(x,4),'r') hold on plot(x,chi2pdf(x,10),'k') hold on plot(x,chi2pdf(x,20),'g') legend('s.d=2','s.d=4','s.d=10','s.d=20') </pre>	 Matlab kodları: <pre> x=0:0.1:50; figure plot(x,exppdf(x,3),'b') hold on plot(x,exppdf(x,5),'r') hold on plot(x,exppdf(x,10),'k') hold on plot(x,exppdf(x,15),'g') legend('\theta=0.5','\theta=5','\theta=15','\theta=25') </pre>

Belli bir tür elektronik parça için dayanma süreleri rasgele olsun. T rasgele değişkeni dayanma süresi (bozuluncaya kadar geçen zaman) olmak üzere,

Dağılım fonksiyonu:

$$F(t) = P(T \leq t)$$

Olasılık yoğunluk

fonksiyonu:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

Güvenilirlik fonksiyonu:

$$R(t) = P(T > t) \Rightarrow R(t) = 1 - F(t)$$

Bozulma oranı:

$$h(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} \Rightarrow h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

dir.

T : Belirli bir elektronik parçanın dayanma süresi olmak üzere, $T \sim \text{üstel}(\theta)$ için,

Dağılım fonksiyonu:
$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} & , t \geq 0 \end{cases}$$

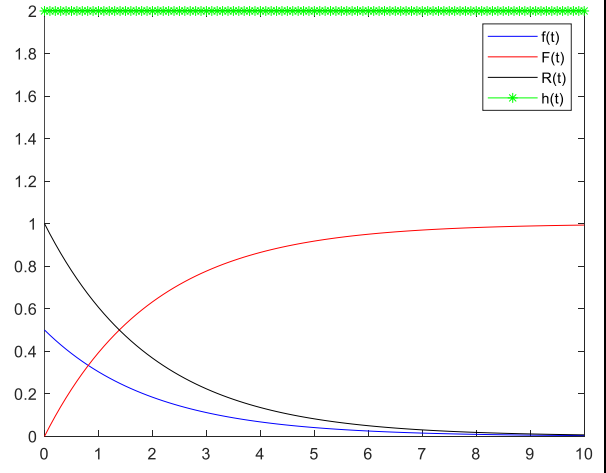
Olasılık yoğunluk fonksiyonu:
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} & , t > 0 \\ 0 & , \text{d.y.} \end{cases}$$

Güvenilirlik fonksiyonu:
$$R(t) = e^{-\frac{t}{\theta}} , t \geq 0$$

Bozulma oranı:
$$h(t) = \frac{1}{\theta} , t \geq 0$$

bulunur. Üstel dağılım ile güvenilirlik analizi Matlab uygulama örneği Tablo 3'deki gibidir:

Tablo 3. Üstel dağılım ile güvenilirlik analizi Matlab çalışması.

Matlab R2019a ile Güvenilirlik Analizi Çalışması	
Matlab kodları	Ekran çıktısı
<pre> clc; clear all; close all teta=input('ttheta='); %ttheta=2 alınsın. y=0:0.1:10; figure plot(y,exp-pdf(y,teta),'b-') hold on plot(y,expcdf(y,teta),'r-') hold on plot(y,1-expcdf(y,teta),'k-') hold on plot(y,teta,'g-*') legend('f(t)','F(t)','R(t)','h(t)') </pre>	

NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir olsun, x_0 -başlangıç değeri ele alınsın. Buna göre, (1) ile verilen yineleme bağıntısından yararlanarak adımsal olarak $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık kök değeri (x_n) hesaplanmaktadır.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n=1,2,3... \quad (1)$$

Burada bahsedilen hesaplamalar Newton-Raphson yöntemi olarak adlandırılmaktadır. Lineer olmayan denklem çözümlemelerinde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Başlangıç değerinin (x_0) seçimi algoritmanın işleyişi için önemlidir. x_0 -başlangıç değerinin belirlenmesinde Bolzano teoreminden yararlanılmaktadır. Bolzano teoremine göre $f(a).f(b) < 0$ koşulunu sağlayan $[a,b]$ aralığından x_0 -başlangıç değeri seçilmektedir. Newton-Raphson yöntemi için durdurma kuralları aşağıda verilmektedir:

1. $|f(x_n)| < \varepsilon$
2. $|x_n - x_{n-1}| < \delta$
3. Belirli adım sayısı.

Newton-Raphson yöntemine göre, $f(x)$ fonksiyonunun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğet denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

dir. $(x_0, f(x_0))$ noktasından $f(x)$ fonksiyonuna çizilen teğetin x eksenini kestiği nokta x_1 olmak üzere, $y=0$ için $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ dir. Buradan,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edildiğinde,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ ile } x_0, x_1, \dots, x_n \text{ değerleri hesaplanmaktadır.}$$

Örnek: $f(x) = x^2 - 6$ fonksiyonunun kökü Newton- Raphson yöntemi ile bulunmak istensin.

Bolzano teoremine göre $f(2).f(3) < 0$ olduğundan $x_0 \in [2,3]$ aralığından seçilebilir.

$x_0 = 2$ olsun. Buna göre,

$$x_1 = 2 - \frac{(2)^2 - 6}{2 \cdot (2)} = 2,5$$

$$x_2 = 2,5 - \frac{(2,5)^2 - 6}{2 \cdot (2,5)} = 2,45$$

$$x_3 = 2,45 - \frac{(2,45)^2 - 6}{2 \cdot (2,45)} = 2,4495$$

.

.

.

şeklinde hesaplanır. Durdurma kuralı $|x_n - x_{n-1}| < \delta$ kullanılır. Bu kural $\delta = 0,001$ için uygulandığında,

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2,5 \quad \text{iken} \quad |x_1 - x_0| = |2,5 - 2| = 0,5 > \delta = 0,001 \quad \text{dir}$$

$$x_1 = 2,5, \quad x_2 = 2,45 \quad \text{iken} \quad |x_2 - x_1| = |2,45 - 2,5| = 0,05 > \delta = 0,001 \quad \text{dir}$$

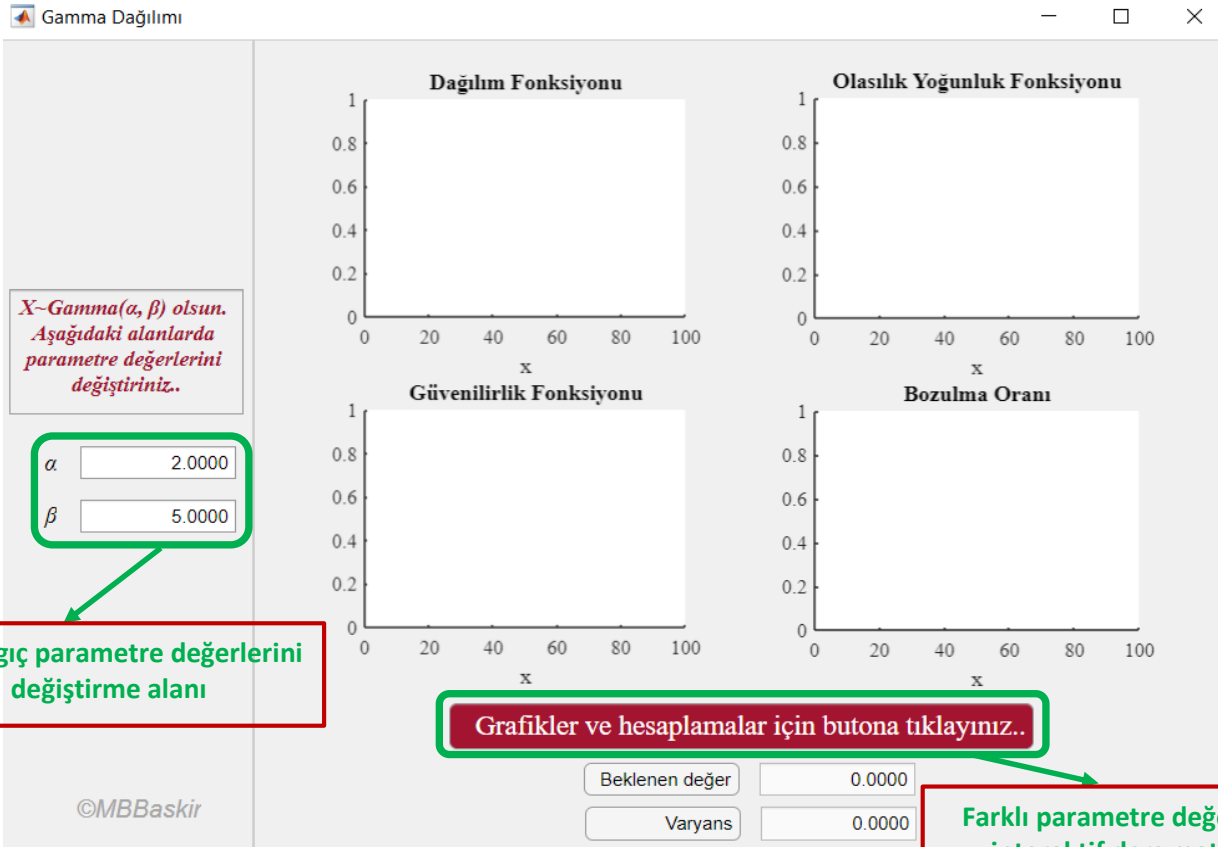
$$x_2 = 2,45, \quad x_3 = 2,4495 \quad \text{iken} \quad |x_3 - x_2| = |2,4495 - 2,45| = 0,0005 < \delta = 0,001 \quad \text{olacaktır.}$$

Buna göre, yaklaşık kök değeri $\delta = 0,001$ için $x_3 = 2,4495$ olarak belirlenir. Yaklaşık kök değeri ile fonksiyon değeri $f(x_3) = f(2,4495) = (2,4495)^2 - 6 = 0,00005025$ olarak hesaplanır. $\delta > 0$ olacak şekilde daha hassas bir hata değeri belirlendiğinde yaklaşık kök değeri ve buna karşılık fonksiyonun değeri için daha hassas sonuçlara ulaşılır.

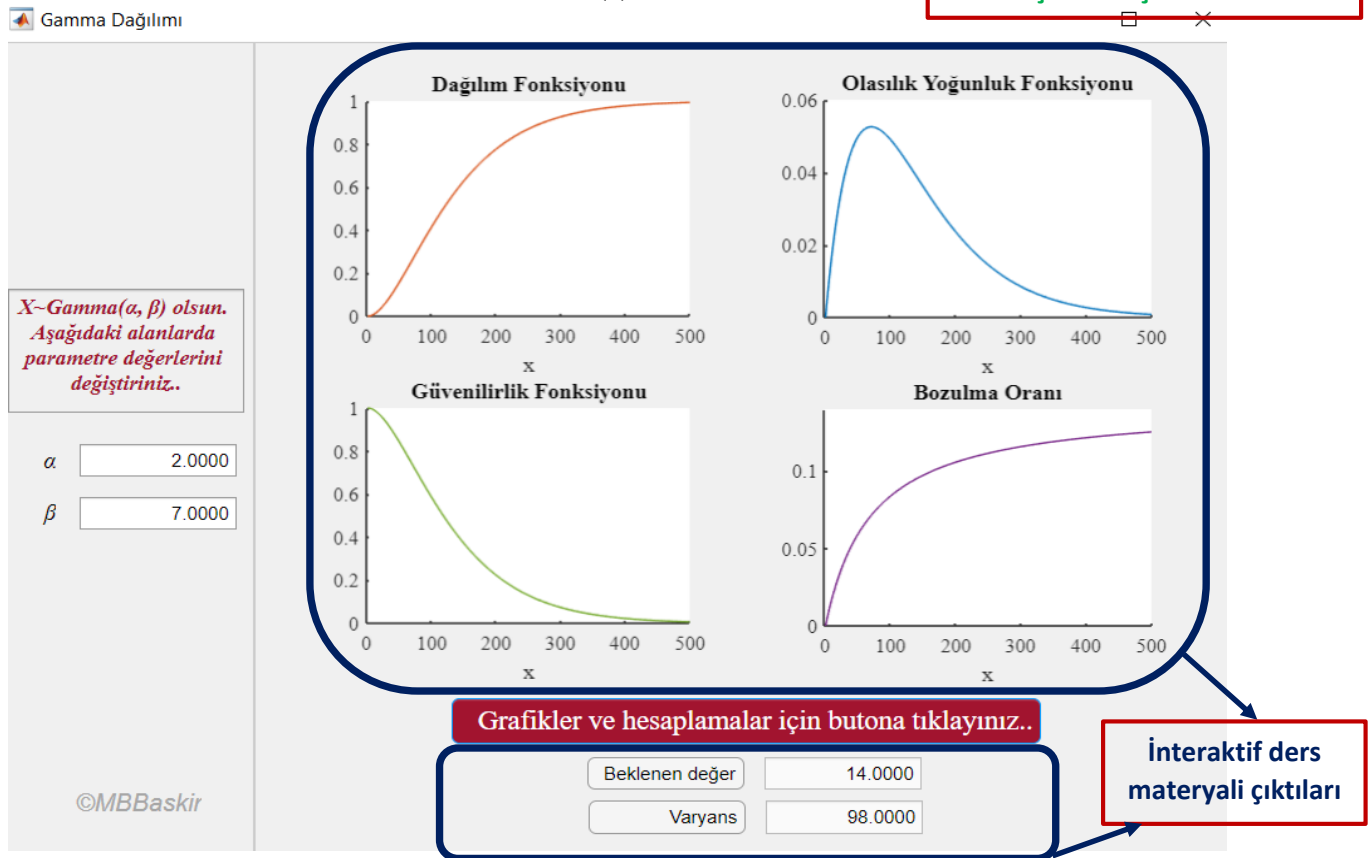
MATLAB APP İLE İNTERAKTİF DERS MATERYALİ ÖRNEĞİ:

Matlab App Designer kullanımı temel olarak iki aşamadan oluşmaktadır: i) Kullanıcı arayüzü tasarımı, ii) App-davranışı programlama. Arayüz tasarım kolaylığının yanı sıra, app-davranışı için hazırlanan program kodları ile farklı uygulamalar (hesaplama, tablo oluşturma, grafik anlatımı vb) içeren kullanıcı arayüzleri hazırlanabilmektedir. Matlab app designer ile hazırlanan kullanıcı arayüzü Matlab derleyicisi ile exe uzantılı dosyaya dönüştürülmektedir. Yürütülebilir kullanıcı arayüzü Matlab Runtime ile Matlab yüklü olmayan elektronik ortamda çalıştırılabilmektedir.

Gamma dağılımı ve güvenilirlik analizi için Matlab app tasarım örneği Şekil 2'deki gibidir. (Gamma dağılımı ve güvenilirlik analizi çalışmasına ilişkin Excel'de hazırlanan interaktif ders materyali ile çalışmak için [tıklayınız.](#))



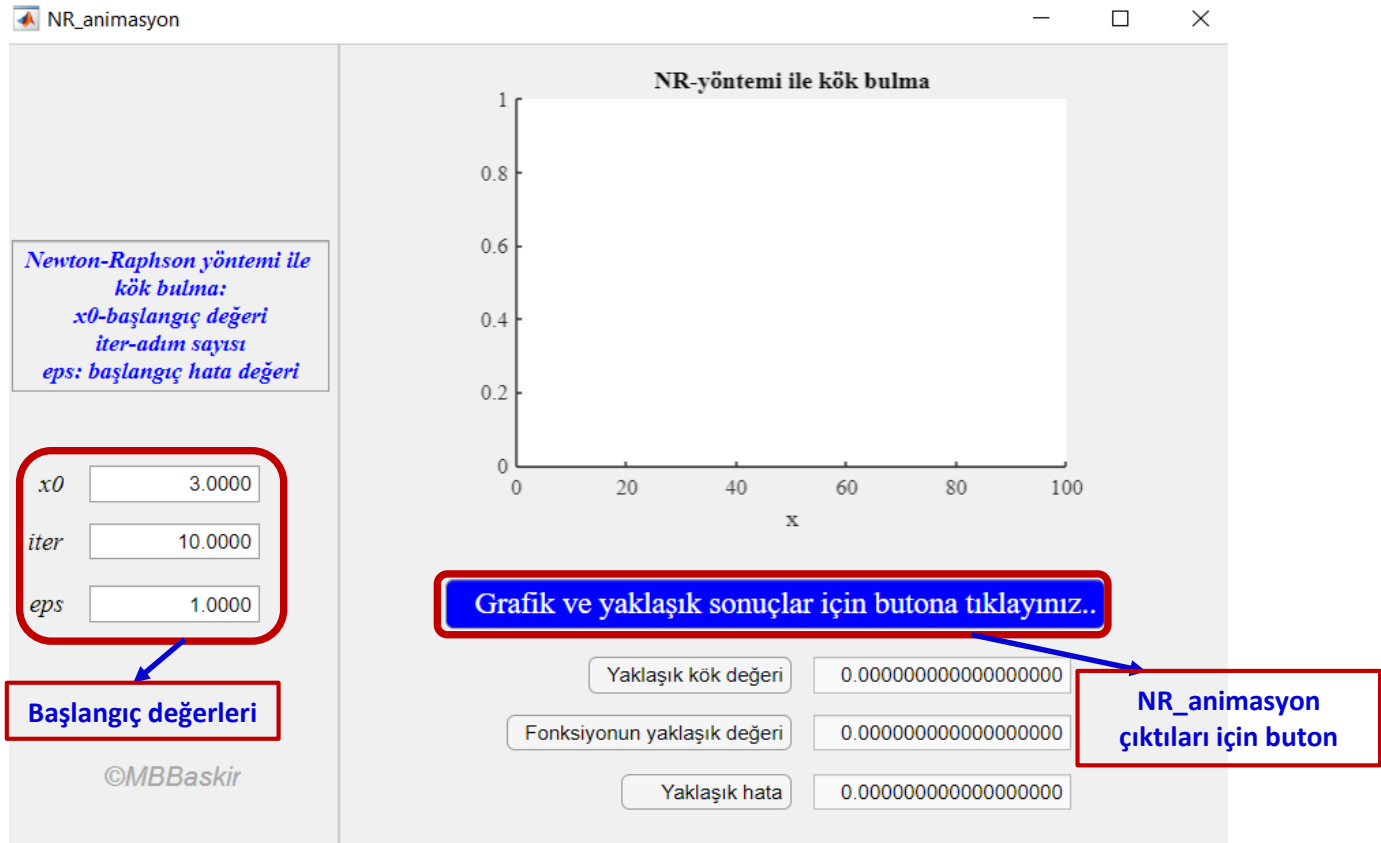
(a)



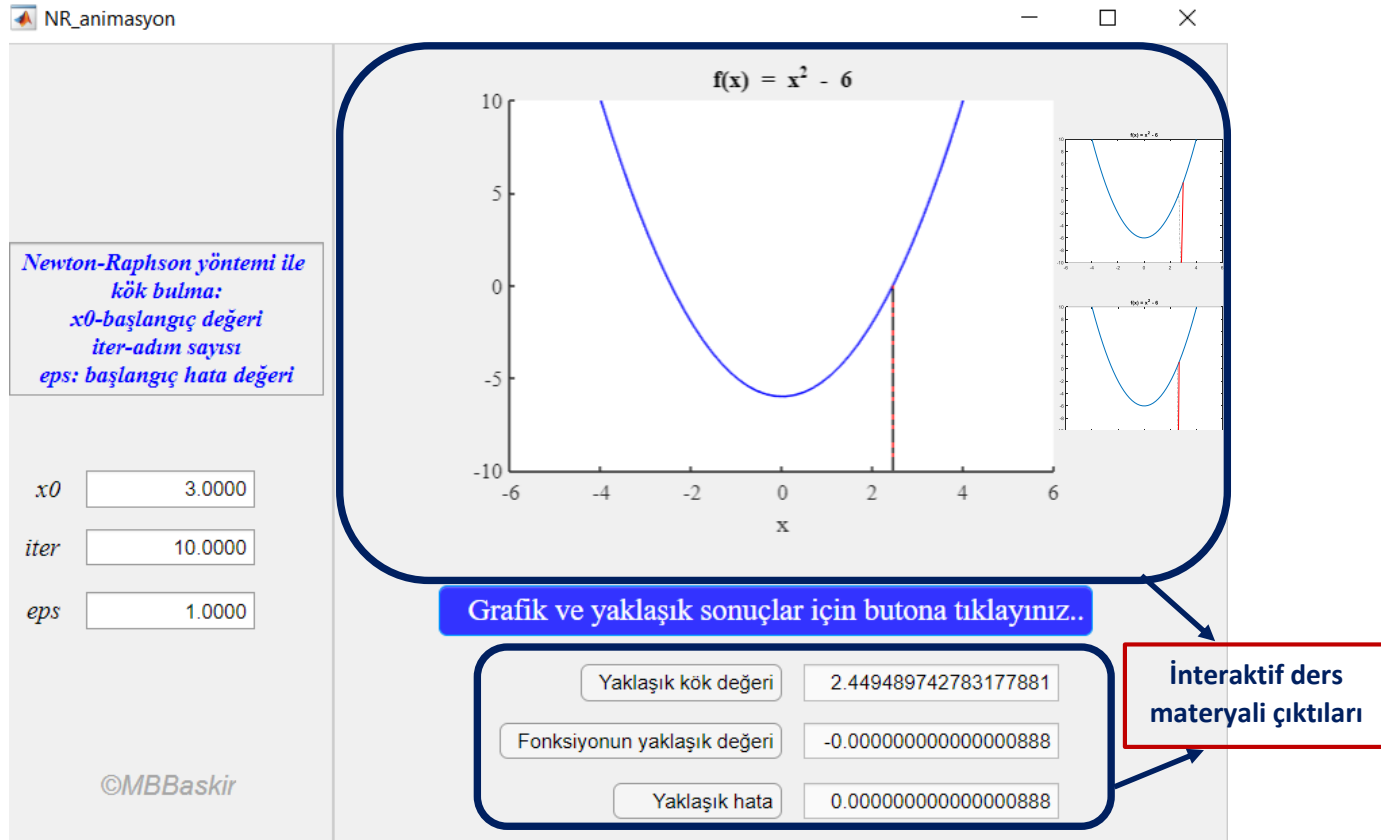
(b)

Şekil 2. Matlab app ile interaktif ders materyali örneği-1: (a) Varsayılan, (b) App-çıktısı

Newton-Raphson yöntemi ile animasyon için Matlab app tasarımı örneği Şekil 3'deki gibidir:



(a)



(b)

Şekil 3. Matlab app ile interaktif ders materyali örneği-2: (a) Varsayılan, (b) App-çıkıtısı

Bazı Kaynaklar:

1. Başkır, M.B. (2019) Bilgisayar programlama, rasgele sayılar ve simülasyon, istatistiksel yazılımlar vb algoritma tasarımı ve programlama, istatistik ve matematik bilgisi içeren ders materyalleri, Paylaşım linki: eders.bartın.edu.tr
2. Başkır, M.B., Biçer, C., Öztürk, F. 2011 (Ağustos). *İST 251 İstatistik Laboratuvarı*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Modelleme ve Simülasyon Laboratuvarı, Ankara, 130 s. (Laboratuvar kitapları (yayınlanmamış ders notları)).
3. Başkır, M.B., Biçer, C., Öztürk, F. 2011 (Ocak). *İST 252 İstatistik Laboratuvarı*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Modelleme ve Simülasyon Laboratuvarı, Ankara, 118 s. (Laboratuvar kitapları (yayınlanmamış ders notları)).
4. Gilat, A. (2008). *Matlab: An Introduction with Applications*, John Wiley and Sons, Inc.
5. Gül, E. (2016). *Matlab Uygulamalı Olasılık Teorisi ve Rastgele Değişkenler*, Seçkin Yayıncılık.
6. Martinez, W.L., Martinez, A.R., Solka, J. (2005). *Exploratory Data Analysis with Matlab*, Chapman & Hall.
7. Özbek, L., Köksal Babacan, E., Başkır, M.B. 2010 (Nisan). *Algoritma Tasarımına Giriş: Bazı Matematiksel ve İstatistiksel Uygulamalar*, Gazi Kitabevi, Ankara.
8. Öztürk, F. (2011). *Olasılık ve İstatistiğe Giriş I,II*, Gazi Kitabevi.